

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова
Российской академии наук

На правах рукописи

Зоалкфл Даниаль Аммарович



**НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ИЗ МОНОЛИТНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОНА
В СТАДИИ ВОЗВЕДЕНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель
д.т.н., доц. С.Б. Языев

Грозный — 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Состояние вопроса	11
1.1 Механизмы раннего трещинообразования в массивных монолитных конструкциях	11
1.2 Существующие методики определения напряженно-деформированного состояния в массивных монолитных конструкциях в процессе возведения.....	16
1.3 Основные соотношения модели и ее валидация.....	20
1.4 Выводы по главе.....	27
Глава 2. Определение температурных полей при возведении монолитных толстостенных оболочек	29
2.1 Одномерная осесимметричная задача теплопроводности.....	29
2.2 Анализ влияния зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации на распределение температуры в конструкции	33
2.3 Двумерная нестационарная задача теплопроводности в толстостенной цилиндрической оболочке в процессе возведения	40
2.4 Учет стадийности возведения при определении температурных полей.	45
2.5 Выводы по главе.....	48
Глава 3. Одномерные задачи определения напряженно-деформированного состояния в толстостенных цилиндрических оболочках при возведении	49
3.1 Конечно-разностная реализация задачи	49
3.2 Конечно-элементная реализация задачи	51
3.3 Решение тестовых задач.....	54
3.4 Определение температурных напряжений в трехслойной цилиндрической оболочке в процессе возведения	58

3.5 Выводы по главе.....	67
Глава 4. Двумерные осесимметричные задачи расчета напряженно-деформированного массивных монолитных конструкций в процессе возведения.....	69
4.1 Методика расчета.....	69
4.2 Расчет толстостенной цилиндрической оболочки в двумерной постановке.....	71
4.3 Анализ влияния стадийности возведения на напряженно-деформированное состояние.....	85
4.4 Расчет температурных полей и напряжений при возведении массивного монолитного фундамента ветрогенератора.....	86
4.5 Выводы по главе.....	96
Заключение.....	98
Список литературы.....	100
Приложение А. Внедрение результатов диссертационной работы.....	110
Приложение В. Программа расчета температурного поля temperature.m ...	112

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации. Толстостенные цилиндрические оболочки являются одним из широко используемых типов массивных железобетонных конструкций. Они применяются в гидротехнических сооружениях, защитных конструкциях реакторов АЭС, пусковых установках ракетных комплексов и т.д. К таким конструкциям, как правило, предъявляются повышенные требования по трещиностойкости, и наличие в них начальных трещин, образовавшихся на стадии изготовления, недопустимо.

Массивность конструкции предопределяет необходимость разработки специальных технологических решений по регулированию параметров тепло- и массообмена, темпа бетонирования, а также подбору рецептуры бетонных смесей для исключения риска раннего трещинообразования. Выбор рациональных технологических решений может быть осуществлен на основе методов компьютерного моделирования. Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния в массивных монолитных железобетонных конструкциях в процессе возведения требует расчета нестационарного температурного поля при наличии внутренних источников тепловыделения, а также учета при расчете внутренних напряжений таких факторов, как ползучесть и усадка бетона, зависимость характеристик материала от времени и температуры, послойность изготовления конструкции.

Степень разработанности проблемы. Исследованию температурных полей и напряжений при возведении массивных монолитных конструкций посвящены работы С.В. Федосова, В.И. Андреева, В.Т. Ерофеева, А.А. Гвоздева, И.Е. Прокоповича, В.С. Лукьянова, И.Д. Запорожца, С.В. Александровского, А.Г. Тамразяна, Г.В. Несветаева, Н.А. Анискина, А.В. Бушмановой, Y. Zhao, M. Zhang, W. Klemczak и др. Большинство публикаций по данной проблеме относится к массивным монолитным фундаментным плитам и стенам, для расчета которых применяются упрощенные методики. Для толстостенных цилиндрических оболочек такая задача ранее не ставилась.

Проблемой определения температурных напряжений в неоднородных толстостенных цилиндрических оболочках занимались такие ученые, как С.Г. Михлин, В.А. Ломакин, С.В. Федосов, В.И. Андреев, В.Т. Ерофеев, Р.А. Турусов, Б.М. Языев, С.В. Литвинов, Ю.Ф. Козельский, Э.К. Агаханов, А.С. Чепурненко и др. Указанные авторы не исследовали напряженно-деформированное состояние монолитных конструкций в стадии возведения, однако имеющийся в их работах аппарат может быть адаптирован к решению рассматриваемой проблемы.

Цель диссертационной работы — разработка алгоритмов определения температурных полей, а также напряженно-деформированного состояния в толстостенных цилиндрических оболочках в процессе возведения с учетом неоднородности теплофизических и механических свойств, вызванной теплом гидратации.

Объект исследования: толстостенные цилиндрические оболочки из монолитного железобетона.

Предмет исследования: напряженно-деформированное состояние монолитных толстостенных цилиндрических оболочек на стадии возведения, обусловленное неравномерным нагревом за счет тепла гидратации цемента и теплообмена с окружающей средой, а также деформаций усадки бетона.

Задачи исследования:

— выбор основных соотношений модели, определяющих изменение во времени механических характеристик бетона, а также ее валидация путем сравнения с экспериментальными данными;

— разработка методики определения нестационарных температурных полей при возведении толстостенных цилиндрических оболочек с учетом зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации, а также стадийности возведения конструкции;

- разработка алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния при возведении толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной осесимметричной постановке;

- разработка алгоритмов расчета напряжений, возникающих в процессе твердения в массивных монолитных конструкциях в двумерной осесимметричной постановке.

Научная новизна работы:

- впервые исследовано влияние неоднородности, вызванной зависимостью коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации, на результирующие температурные поля при возведении толстостенных цилиндрических оболочек;

- проведено исследование влияния технологических перерывов между укладкой слоев на величину максимальной температуры в объеме конструкции, а также перепада температур между ее центром и поверхностью;

- предложен оригинальный подход к определению напряженно-деформированного состояния трехслойной толстостенной оболочки в процессе возведения;

- впервые решена задача определения напряженно-деформированного состояния при бетонировании массивных монолитных конструкций с учетом послойности возведения.

Теоретическая значимость работы:

- показано, что эффектами ползучести при определении напряженно-деформированного состояния массивных монолитных конструкций на стадии возведения можно пренебречь;

- установлено, что при определении температурных полей, возникающих при возведении монолитных толстостенных цилиндрических оболочек, зависимость коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации можно не учитывать;

– показано, что учет послойности возведения конструкции приводит к несущественному изменению максимальных температур в объеме, максимального перепада между центром и поверхностью конструкции, а также максимальных величин напряжений;

– установлены существенные различия в результатах расчета при постоянном модуле упругости бетона во времени, а также в случае учета зависимости физико-механических характеристик материала от степени зрелости.

Практическое значение работы: разработанные алгоритмы реализованы в виде пакета прикладных программ в среде MATLAB, который позволяет путем численного моделирования выбрать оптимальные параметры теплообмена на поверхностях конструкции, а также параметры кинетики тепловыделения бетона для снижения риска раннего трещинообразования конструкций.

Методы исследования. Исследование базируется на современных методах строительной механики и теории упругости неоднородного тела. Анализ выполняется при помощи численных методов, а именно метода конечных разностей и метода конечных элементов, реализованных автором в среде MATLAB. Для расчетов во временной области применяется явная схема интегрирования по времени на основе метода Эйлера.

Внедрение результатов работы. Разработанные автором программные продукты и рекомендации используются в практике проектирования института ООО «Севкавнипиагропром».

Основные положения, выносимые на защиту:

– основные соотношения модели, определяющие зависимость физико-механических характеристик бетона от степени его зрелости и апробация модели на экспериментальных данных для образцов, твердеющих при 100% ограничении деформации;

– алгоритмы расчета температурных полей при возведении осесимметричных массивных монолитных конструкций с учетом зависимости

коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации, а также с учетом стадийности возведения конструкций;

– алгоритмы определения напряженно деформированного состояния при возведении однослойных и трехслойных толстостенных цилиндрических оболочек из монолитного железобетона в одномерной осесимметричной постановке;

– алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния при возведении осесимметричных массивных монолитных конструкций в двумерной постановке и практические рекомендации по уменьшению риска раннего трещинообразования.

Достоверность результатов обеспечивается: строгой математической постановкой задачи, проверкой выполнения граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений; сравнением результатов с экспериментальными данными других авторов; сравнением с результатами расчета в верифицированном программном комплексе ANSYS.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на Всероссийской (национальной) научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и техники» (г. Ростов-на-Дону, 2023), международных научно-практических конференциях International Scientific Siberian Transport Forum - TransSiberia 2023 (г. Новосибирск), Строительство и архитектура – 2024 (г. Ростов-на-Дону).

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 7 печатных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, определенных ВАК РФ – 4, в изданиях, входящих в международные реферативные базы Scopus/Web of Science – 1. Получено авторское свидетельство на программу для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Изложена на 122 страницах машинописного текста и содержит 66 рисунков и 2 таблицы.

Соответствие работы паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности ВАК 2.1.9. Строительная механика работа включает следующие области исследований:

- п. 2: «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;
- п. 4: «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях».

Основное содержание работы.

Во введении обоснована актуальность проблемы и выбор направления исследования, сформулированы цели и задачи, основные положения, приведена краткая аннотация всех глав работы.

В главе 1 представлен литературный обзор по выбранному направлению исследования, в котором рассматриваются механизмы раннего трещинообразования, а также существующие методики расчета температурных полей и напряжений при возведении массивных монолитных конструкций. Также представлены основные соотношения, определяющие зависимость физико-механических характеристик бетона от степени его зрелости, используемые в расчетной модели. Выполнена валидация используемых соотношений на экспериментальных данных других авторов.

В главе 2 рассматриваются вопросы определения температурных полей при возведении толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной и двумерной постановке. Проводится исследование влияния зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации на величину максимальных температур и характер распределения температурных полей, возникающих в процессе бетонирования. Анализируется влияние технологических перерывов между укладкой слоев на температурные градиенты в конструкции.

Глава 3 посвящена вопросам расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) при возведении толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной осесимметричной постановке. Рассматривается случай плоского

напряженного и плоского деформированного состояния. Приведено решение для трехслойного полого толстостенного цилиндра, наружные слои которого выполнены из стали.

В главе 4 изложены вопросы расчета НДС осесимметричных массивных монолитных конструкций в двумерной постановке. Представлено решение для толстостенной цилиндрической оболочки с учетом ее совместной работы с фундаментом, а также массивного монолитного фундамента ветрогенератора.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

1.1 Механизмы раннего трещинообразования в массивных монолитных конструкциях

Проблема, связанная с растрескиванием твердеющих бетонных конструкций, вызванным теплом гидратации, известна давно. Эта проблема существует, наверное, столько же, сколько применяется бетон в качестве строительного материала. При строительстве массивных плотин это было особенно заметно в первые дни после их возведения. В 1930 г. Норвежской инженерной ассоциацией (Den Norske Ingeniørforening) была выполнена первая масштабная оценка большого количества построенных в Норвегии плотин [1]. В указанной публикации усадка при высыхании и перепады внутренних температур были сочтены одними из нескольких вредных механизмов (мороз, естественно, также был включен в число причин) образования поверхностных трещин, в которые потом проникала вода. Сообщается, что также наблюдались некоторые «внутренние усадочные трещины», но никаких объяснений по поводу механизмов их образования не приводилось.

Примерно в это же время на температурное происхождение трещин в монолитных конструкциях на этапе строительства впервые указал советский ученый В.С. Лукьянов. В то время получить прямое решение задачи расчета температурных полей путем интегрирования дифференциальных уравнений было невозможно, и он разработал прибор для прогнозирования температурных режимов на основе гидравлической аналогии [2].

В качестве стратегии для ограничения трещинообразования вследствие неравномерного нагрева в начале 1930-х годов стала применяться встроенная система охлаждающих труб. Ярким примером сооружения, в котором использовалась данная технология, является дамба Гувера (Боулдер) (между штатами Аризона и Невада в США) [3]. Кроме того, данная плотина была построена последовательно, чтобы обеспечить отвод большего количества тепла во

время строительства, а также с деформационными швами. Плотина имеет высоту 220 м и длину 379 м, толщину дна 200 м и толщину верха 15 м, всего было использовано 3,3 млн м³ бетона [4].

Представляется, что основным мотивом использования охлаждающих трубок было снижение максимальных температур и сокращение всего периода охлаждения, а значит, сокращение периода с возможными вредными перепадами температур. В плотине Гувера было использовано более 900 км охлаждающих труб, а для долгосрочного мониторинга было установлено около 400 термометров. Бланкс Р. и др. [5] сообщили в 1938 году, что большинство плотин США, построенных до этого времени, растрескивались в меньшей или большей степени, но утверждали, что система охлаждающих труб в плотине Гувера положительно повлияла на уменьшение степени растрескивания. Однако при изучении данных по плотине Гувера Д. Абрамсом [6] через 12 лет после строительства был сделан вывод о том, что система трубного охлаждения в дамбе Гувера оказалась неэффективной, и заявленные цели не были достигнуты. Вероятно, технология охлаждения не была достаточно проработанной с самого начала, что и неудивительно для новой технологии, примененной в огромном строительном проекте.

Известно, что температурные напряжения, приводящие к трещинообразованию, возникают только при наличии ограничений деформации. Эти ограничения можно разделить на внутренние и внешние. Поясним, что такое внутренние ограничения, на примере толстой монолитной стены (рис 1.1).

Вследствие тепловыделения бетона и теплообмена с окружающей средой распределение температуры по сечению стены будет иметь вид, представленный на рис 1.1, а. Такой же вид будет иметь эпюра температурных деформаций. При этом каждое сечение стены должно остаться плоским, т.е. полная деформация, представляющая сумму температурной деформации и деформации, вызванной температурными напряжениями должна быть постоянна по толщине стены. Поэтому для выравнивания полной деформации на поверхностях стены возникнут растягивающие напряжения, а в середине – сжимающие (рис 1.1, б).

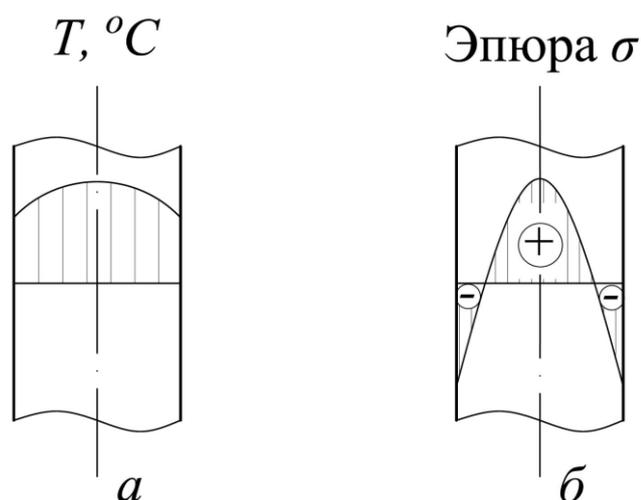


Рис 1.1 – Иллюстрация внутреннего ограничения

Растягивающие напряжения на поверхностях стены приведут к поверхностным трещинам. Эти трещины имеют тенденцию закрываться позже в фазе охлаждения, когда ядро также остывает, но, тем не менее, они являются начальным повреждением, снижающим несущую способность конструкции и выступающим как слабое место при дальнейших климатических воздействиях.

Внешние ограничения, как правило связаны с устройством рабочих швов, т.е. когда твердеющая конструкция ограничена в деформациях жесткими уже затвердевшими примыкающими конструктивными элементами. Классический пример – это стена, расположенная на жестком основании/плите. Во время стадии охлаждения стена стремится уменьшиться в размере, но она ограничена жестким основанием. Напряжения, которые возникают в этой ситуации, как правило, продольные.

Критическое время растрескивания (при его возникновении) будет варьироваться в зависимости от толщины конструкции, типа бетона и т. д., но обычно оно может составлять от 5 дней до нескольких недель после заливки [7]. Такие трещины, как правило, являются «сквозными», т. е. трещины проходят через всю толщину стены. Трещины часто идут стыка стены с основанием по вертикали на несколько метров вверх (рис. 1.2). Ширина трещин может варьироваться от очень тонких (0,05 мм) до 0,3 мм и даже шире [8].



Рис. 1.2 – Пример трещин, вызванных внешним ограничением деформации

Главной проблемой на начальном этапе исследования вопроса раннего трещинообразования были перепады температур (т.е. внутренние ограничения). Обычными контрмерами было использование низкотемпературных цементов и деформационных швов. Для оценки роста температур использовались аналитические или графические решения фундаментальных дифференциальных уравнений теплопередачи [9, 10].

Тот факт, что твердеющие бетонные конструкции подвергаются внешнему стеснению (от основания или от примыкающих конструкций) был признан еще в 1930-х годах [9, 11, 12, 13]. Как для массивных конструкций, так и для конструкций средней массивности росло понимание того, что этот тип ограничения может привести к образованию сквозных трещин. В то же время усадка бетона при высыхании считалась менее важной для такого растрескивания, поскольку это поверхностный эффект. Были выполнены упрощенные расчеты напряжений, предполагающие полное (100 %) ограничение деформации. И существовало убеждение, что армирование можно использовать для контроля ширины раскрытия трещин, но не для влияния на вероятность появления трещин.

Первые лабораторные испытания заземленных образцов, подвергнутых реалистичным температурным режимам, были проведены в США в 1937 году R. Davis и соавт. [11]. В дальнейшем в 70-х годах прошлого века в Германии R. Springenschmid [14, 15], проводились испытания заземленных бетонных балок, подвергнутым воздействию реальных температурных нагрузжений. В 1984 г. им же была предложена усовершенствованная «Машина для испытаний на температурную нагрузку» [16, 17], которая контролировала температуру и деформацию, обеспечивая 100% условия ограничения. В последующие годы, вплоть до настоящего времени, по всему миру были изготовлены десятки таких машин. Примечательно, что устройства для ограничения напряжения, контролируемого деформацией, были разработаны еще в 1970-х годах D. Orr и соавт. [18] в 1971 г. и A. Paillere и соавт. [19] в 1976 году, но эти установки были в первую очередь предназначены для изучения влияния усадки при высыхании на образцы цементного теста и цементного камня, а не для изучения влияния температуры.

Вплоть до 1970-х годов наблюдался непрерывный прогресс в исследованиях и понимании влияния раннего механического и вязкоупругого поведения бетона, а также реакции конструкции в условиях внешних ограничений [20, 21, 22, 23, 24].

Помимо неравномерного нагрева, одной из основных причин трещинообразования в твердеющем бетоне выступает его усадка. Температурные деформации и деформации усадки возникают одновременно, вызывая объемную нестабильность твердеющего бетона. Влияние усадки бетона на напряженно-деформированное состояние массивных монолитных конструкций может быть непредсказуемым. В ряде случаев усадка бетона оказывает заметно меньшее влияние, чем тепловые эффекты, но может быть очень существенной в других, и ее взаимосвязь с тепловыми эффектами достаточно сложна [25]. Тот факт, что изотермическая гидратация цемента связана с потерей объема, был показан еще в 1900 г. Ле Шателье. С тех пор эту потерю объема стали называть усадкой Ле-Шателье, химической или контракционной усадкой.

Первые масштабные исследования контракционной усадки бетона были проведены в связи с проектированием плотины Дворшак (штат Огайо, США). В работе I. Houk и соавт. [26] контракционная усадка замерялась на различных бетонах, исследовалось влияние добавления пуццолана, содержания цемента, тонкости помола цемента и температуры. Если говорить о существовании в бетоне аутогенной усадки и ее вкладе в создание ограничивающих напряжений и растрескивание твердеющих бетонных конструкций, то можно сказать, что проведенные в США разработки были в первых рядах. В Европе и СССР контракционная усадка, по-видимому, была неизвестна, либо игнорировалась в течение многих десятилетий. Примерно с 1990 года, интерес к контракционной усадке и всей теме технологии отверждения под напряжением как таковой возрос во всем мире [27, 28, 29, 30, 31, 32].

1.2 Существующие методики определения напряженно-деформированного состояния в массивных монолитных конструкциях в процессе возведения

Решение задачи определения напряженно-деформированного состояния в массивных монолитных железобетонных конструкциях в процессе твердения требует в первую очередь расчета нестационарного температурного поля при наличии внутренних источников тепловыделения.

Расчету температурных полей на стадии изготовления массивных монолитных конструкций посвящено значительное количество работ. Так, в работе Bennet Kuriakose и соавт. [33] проводится решение задачи расчета температурного поля в массивных монолитных фундаментных плитах. В указанной работе расчет выполняется в двумерной постановке при помощи метода конечных элементов (МКЭ) с учетом суточных колебаний температуры, а также изменения во времени коэффициента теплопроводности твердеющего бетона. Также производится сравнение с экспериментальными данными.

В статье Т.С. Nguyen и Х. В. Luu [34] предлагается способ снижения перепада температур между поверхностью конструкции и серединой при помощи теплоизоляции поверхностей. Моделирование производится при помощи МКЭ в программном комплексе Midas Civil. В работе J. Xu и соавт. [35] выполняется конечно-элементное моделирование предотвращения трещинообразования в бетоне с использованием водяного охлаждения в среде ABAQUS. Данная задача также рассматривается в работе А. Tasri и А. Susilawati [36], Т. С. Nguyen и соавт. [37]. В статье В. Klemczak и соавт. [38] исследуется влияние состава бетонов на их теплофизические свойства и дальнейший риск раннего трещинообразования с использованием конечно-элементного анализа. Аналогичная задача решается в работе Т. Van Lam и соавт. [39]. В статье Z. Xie и соавт. [40] для расчета температурных полей предлагается интервальный метод конечных элементов. Данный метод позволяет выполнять анализ при многократном воздействии неопределенностей, например, температура окружающей среды, свойства материалов, технология заливки и охлаждения. В статье Р. Havlásek и соавт. [41] предлагается слабосвязанная термомеханическая модель для бетона раннего возраста с моделью гидратации на основе средства для термической части с учетом состава бетонной смеси, типа цемента и граничных условий теплообмена. Работа Н. Абека и соавт. [42] посвящена экспериментальным и численным исследованиям температурных эффектов в массивных монолитных конструкциях тропической климатической зоны.

В статье А. Długosz и соавт. [43] для определения теплофизических свойств твердеющих массивных монолитных железобетонных конструкций используются эволюционные вычислительные процедуры. Генетические алгоритмы также используются в работе Е. Fairbairn и соавт. [44] для оптимизации массивных монолитных конструкций. Работа А. Kuryłowicz-Cudowska [45] посвящена моделированию температурных полей в мостовых настилах из монолитного железобетона. В статье Min Zhang и соавт. [46] при анализе температурного поля в массивных монолитных конструкциях вводится коэффициент влияния

температуры, на который домножается плотность внутренних источников тепловыделения.

Во всех перечисленных выше публикациях при моделировании температурных полей предполагается, что конструкция изготавливается одномоментно. В реальности процесс бетонирования может занимать значительное время и осуществляться с технологическими перерывами. Помимо этого фактора, существует еще несколько условий, влияющих на неравномерность распределения температур по толщине конструкции. Какие-то из них в большей, а какие-то в меньшей степени влияют на вероятность раннего трещинообразования.

В работе [47] проводится исследование влияния на распределение температурных полей в массивных монолитных фундаментных плитах таких факторов, как стадийность возведения, условия теплообмена на внешних поверхностях, а также уровень тепловыделения бетона. При этом устанавливается, что наличие технологических перерывов не столь существенно снижает перепад между серединой и поверхностью конструкции, как регулирование условий теплообмена и кинетики тепловыделения бетона.

Основным инструментом в определении температурных полей при возведении массивных монолитных конструкций в настоящее время выступает метод конечных элементов. Конечно-элементное моделирование показывает неплохую сходимость с результатами натурных измерений температур [48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55].

Что касается, определения температурных напряжений, вызванных тепловыделением бетона и теплообменом конструкции с окружающей средой, здесь следует выделить два подхода. Первый подход предполагает конечно-элементное моделирование в готовых программных продуктах (Midas Civil, ANSYS и др.) и используется, например, в работах [56, 38, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Однако в готовых МКЭ комплексах нет возможности заложить изменение физико-механических характеристик бетона во времени, а также учесть усадку бетона, и результаты будут носить лишь оценочный характер.

Второй подход предполагает определение температурных напряжений по упрощенной формуле [65, 39, 34, 66, 67]:

$$\sigma = \frac{k_T E \alpha \Delta T}{(1 + \varphi)}, \quad (1.1)$$

где k_T – коэффициент ограничения деформаций, E – модуль упругости бетона, α – коэффициент линейного температурного расширения, ΔT – перепад температур между центром и поверхностью конструкции, φ – коэффициент ползучести бетона.

Данный подход применим только для объектов типа фундаментных плит и стен. Он не позволяет учесть то, что характер напряженного состояния может быть двухосным или трехосным, и кроме того, возникает вопрос определения коэффициента k_T , который зависит от жесткости основания, габаритов бетонизируемой конструкции и множества других факторов.

В работах [68, 69, 70, 103, 104] предлагается упрощенная методика определения температурных напряжений в массивных монолитных фундаментных плитах, вызванных внутренним ограничением деформаций. Для подтверждения ее достоверности выполняется сравнение с результатами конечно-элементного моделирования в программном комплексе ANSYS в трехмерной постановке при постоянном модуле упругости бетона. Данная методика также позволяет учесть изменение характеристик бетона во времени, наличие деформаций ползучести и усадки, коэффициент армирования конструкции. При учете зависимости модуля упругости бетона от времени картина напряженно-деформированного состояния существенно меняется. Недостатком данной методики является отсутствие возможности учесть внешние ограничения деформации.

Наиболее близкими к реальным условиям работы будут результаты конечно-элементного моделирования с учетом изменения модуля упругости бетона во времени [71, 72, 73, 74, 75].

Отметим, что в рассмотренных выше публикациях объектом исследования в основном выступают массивные монолитные фундаментные плиты и стены. Для конструкций в виде толстостенных цилиндрических оболочек такие задачи ранее вообще не ставились.

1.3 Основные соотношения модели и ее валидация

Как было сказано ранее, при моделировании напряженно-деформированного состояния массивных монолитных железобетонных конструкций необходимо учесть изменение физико-механических характеристик бетона во времени. Одной из простейших зависимостей модуля упругости от времени является формула вида:

$$E(t) = E_{\infty}(1 - e^{-\alpha t}). \quad (1.2)$$

Данная формула используется для определения НДС массивных монолитных железобетонных конструкций в процессе изготовления, например в [34, 37, 76]. E_{∞} здесь – предельное значение модуля упругости материала (при $t \rightarrow \infty$). Существенным недостатком формулы (1.2) является, то, что определение величины E_{∞} вызывает некоторые трудности: необходимо ждать достаточное время до того момента, пока изменение модуля упругости во времени становится незначительным.

Аналогичная по структуре формула, в которой содержится два коэффициента, подлежащих определению, была предложена Н.Х. Арутюняном [77, 78, 79]:

$$E(t) = E_{\infty}(1 - ae^{-bt}). \quad (1.3)$$

За счет увеличения числа эмпирических коэффициентов данная формула позволяет лучше описывать экспериментальные кривые $E(t)$, но имеет тот же недостаток, что и формула (1.2).

Указанный недостаток был устранен С.Г. Есаяном [80], который предложил формулу вида:

$$E(t) = E(\tau_0)[k - (k - 1)e^{-c(t-\tau_0)}], \quad (1.4)$$

где $E(\tau_0)$ – модуль упругости бетона в момент времени τ_0 , c и k – коэффициенты, получаемые экспериментально.

В работе [81] модуль упругости бетона в момент времени t выражается через модуль упругости E_0 в проектном возрасте (28 суток нормального твердения) следующим образом:

$$E(t) = E_0 \exp \left(k \left(1 - \left(\frac{28}{t} \right)^{0,545} \right) \right), \quad (1.5)$$

где t – время в сутках, коэффициент k зависит от типа цемента (быстротвердеющий, нормально твердеющий или медленно твердеющий).

Некоторые другие формулы зависимости модуля упругости от времени можно найти, например, в [82, 83]. Все эти формулы объединяет то, что в них не учитывается температура, при которой происходит твердение бетона, а она может меняться вследствие внутреннего тепловыделения. Более совершенной является концепция выражения физико-механических характеристик бетона через степень его зрелости C_m (Concrete maturity) [7], определяемую интегралом:

$$C_m(t) = \int_0^t T(\tau) d\tau, \quad (1.6)$$

где $T(\tau)$ – температура бетона в момент времени τ .

Предел прочности бетона при сжатии R в момент времени t может быть определен по эмпирической формуле [84, 85]:

$$\frac{R}{R_{28}} = \exp \left(0,35 \left[1 - \left(\frac{15800 - 122,5\bar{T}}{\bar{T}t} \right)^{0,55} \right] \right), \quad (1.7)$$

где R_{28} – прочность бетона в возрасте 28 суток, $\bar{T} = C_m/t$, t – возраст бетона в часах.

Между прочностью бетона на сжатие и его модулем упругости существует взаимосвязь, которая описывается различными авторами множеством зависимостей. Одной из наиболее известных таких формул является формула Н.И. Карпенко [86]:

$$E(R_b) = \frac{52000 \cdot R_b}{18 + R_b}, \quad (1.8)$$

где $R_b = 0,8R$ – призмная прочность бетона, МПа.

Поскольку нами за основу берется формула (1.7), предложенная Г.В. Несветаевым, для зависимости $E(R)$ мы будем использовать полученную им же формулу [87]:

$$E(R) = 1000 \frac{0,04R + 57}{1 + \frac{29}{3,8 + 0,8R}}, \text{ МПа} \quad (1.9)$$

Значения R в формулу (1.9) следует подставлять в МПа. Под E здесь понимается начальный модуль упругости бетона при уровне напряжений не превышающем $0,3-0,4 R$, т.е. физическая нелинейность бетона не рассматривается.

Отметим, что формула (1.9) дает приемлемые результаты при возрасте бетона не менее 1 суток. При $t = 0$ прочность при сжатии на основе формулы (1.7) будет равна нулю, но модуль упругости окажется не равным нулю, что не очень удобно, и может привести к завышенным напряжениям на начальной стадии набора прочности. Поэтому при $t \leq 24$ ч будем зависимость модуля упругости от времени представлять уравнением вида (1.5):

$$E(t) = E_{24} \cdot \exp\left(1,348 \left[1 - \left(\frac{24}{t}\right)^{1,438}\right]\right). \quad (1.10)$$

где t – время в часах, E_{24} модуль упругости бетона после 1 суток твердения, вычисленный на основе формул (1.7)-(1.9) с учетом времени и температуры твердения.

Для деформаций усадки бетона ε_{sh} нами будет использована явная зависимость от времени, как это делалось, например в [69, 88]:

$$\varepsilon_{sh}(t) = -(0,2B - 2)(a \ln t - b) \cdot 10^{-5} \leq 0, \quad (1.11)$$

где B – класс бетона (МПа), a и b – эмпирические коэффициенты.

Для быстротвердеющего бетона $a = 0,31$ и $b = 0,4$, для медленнотвердеющего – $a = 0,41$ и $b = 0,85$.

Прочность бетона на растяжение R_t принимается функцией от прочности на сжатие на основе [68]:

$$R_t = 0,29 \cdot R^{0,6}. \quad (1.12)$$

Валидацию используемых соотношений выполним на экспериментальных данных, представленных в публикации [7]. В указанной работе твердение образцов происходило при полном ограничении на их деформацию, и при этом выполнялись

замеры температуры и напряжений в различные моменты времени. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1.3.

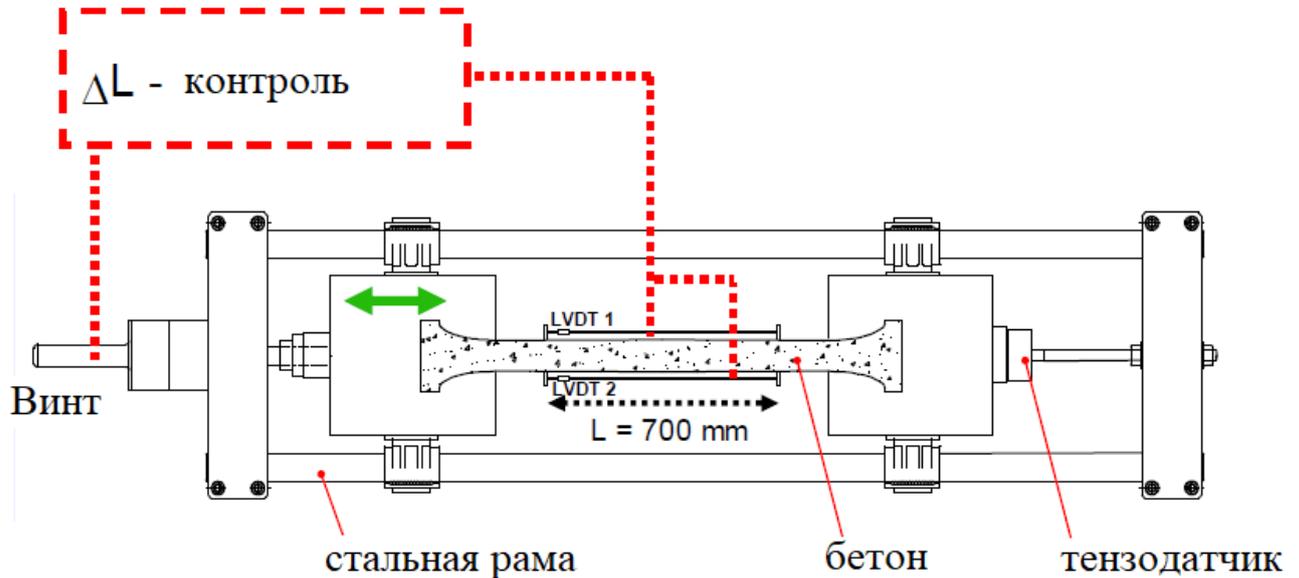


Рис. 1.3 – Схема испытаний, проведенных в [7]

Приращение полной деформации бетона можно представить в виде:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E(t)} + \Delta\varepsilon_{sh} + \Delta\varepsilon_{cr} + \alpha\Delta T, \quad (1.13)$$

где $\Delta\sigma$ – приращение напряжения, $\Delta\varepsilon_{sh}$ – приращение деформации усадки, $\Delta\varepsilon_{cr}$ – приращение деформации ползучести.

Ползучесть будем учитывать так же, как это делалось в [69] при расчете массивных монолитных фундаментных плит. Деформация ползучести при одноосном напряженном состоянии запишется в виде:

$$\varepsilon_{cr} = - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.14)$$

Меру ползучести примем в виде:

$$C(t, \tau) = \frac{\varphi(\tau)}{E(t)} (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad (1.15)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{8000}{(E(\tau))^{0,785}}, \gamma = 0,05 \text{ сут}^{-1}.$$

Значения $E(\tau)$ в формулу (1.15) следует подставлять в МПа.

С учетом полного ограничения на деформацию в эксперименте приращение напряжения за время Δt запишется в виде:

$$\Delta\sigma = -E(t)(\Delta\varepsilon_{sh} + \Delta\varepsilon_{cr} + \alpha\Delta T). \quad (1.16)$$

Испытания в работе [7] проводились для образцов из бетона с прочностью в проектном возрасте 28 сут $R_{28} = 80$ МПа. При расчете деформаций усадки по формуле (1.11) нами принималось $B = 68$ МПа, $a = 0,31$, $b = -0,4$. Коэффициент температурного расширения $\alpha = 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$. На рис. 1.4 приведен график изменения во времени температуры для одного из испытанных образцов.

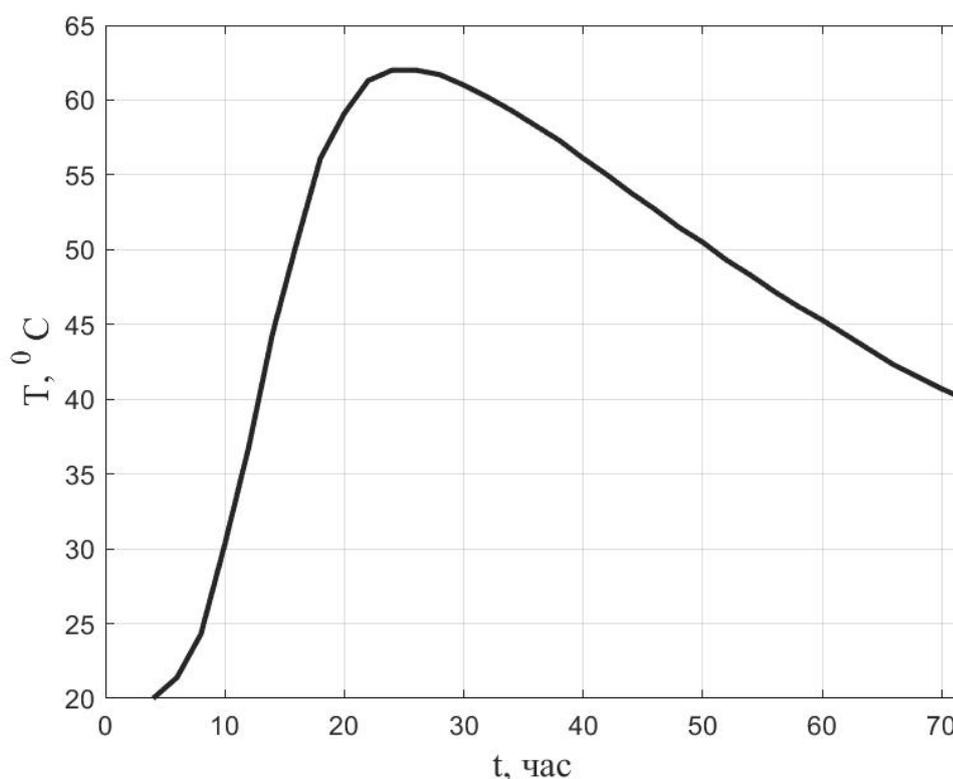


Рис. 1.4 – Изменение во времени температуры испытанного образца

Соответствующие графики изменения во времени модуля упругости бетона и его прочности при сжатии, построенные с использованием формул (1.7)-(1.10), приведены на рис. 1.5 и рис. 1.6.

На рис. 1.7 приведено сравнение значений напряжений в различные моменты времени, полученных экспериментально, с результатами численного моделирования с использованием соотношений (1.7)-(1.11) и (1.14)-(1.16). Штриховой линией на данном графике показано решение без учета деформаций ползучести, а штрихпунктирной – без учета ползучести и усадки.

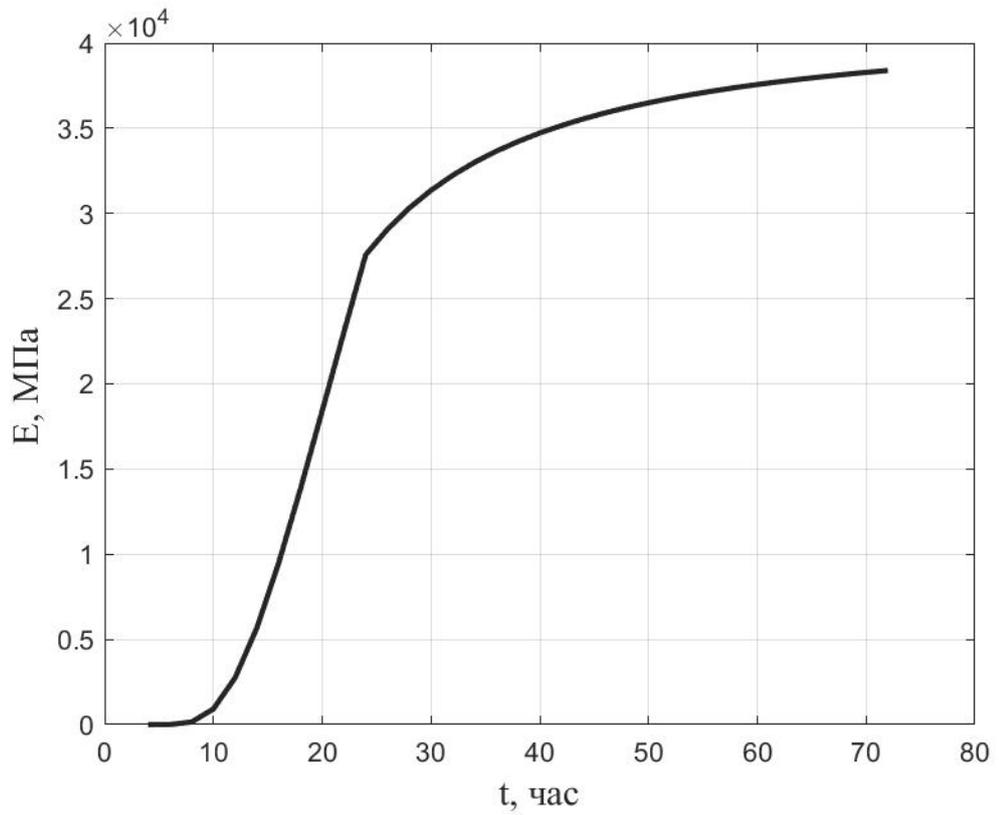


Рис. 1.5 – Изменение во времени модуля упругости бетона

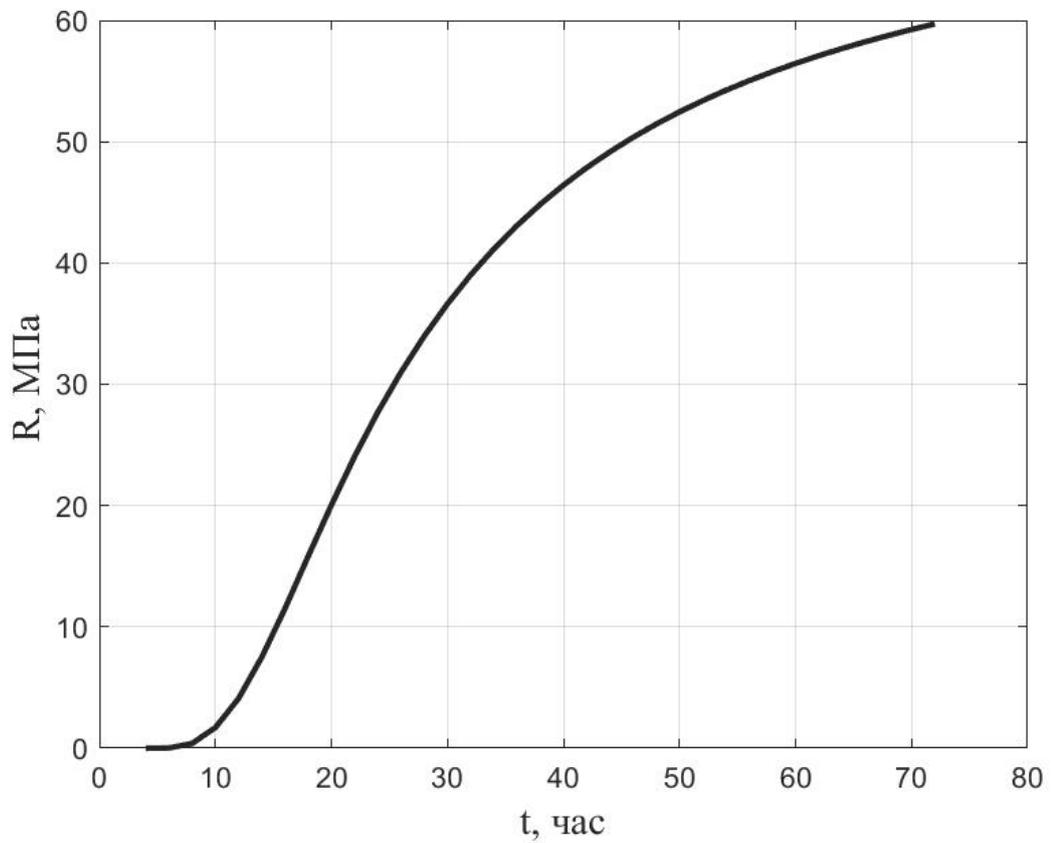


Рис. 1.6 – Изменение во времени прочности бетона при сжатии

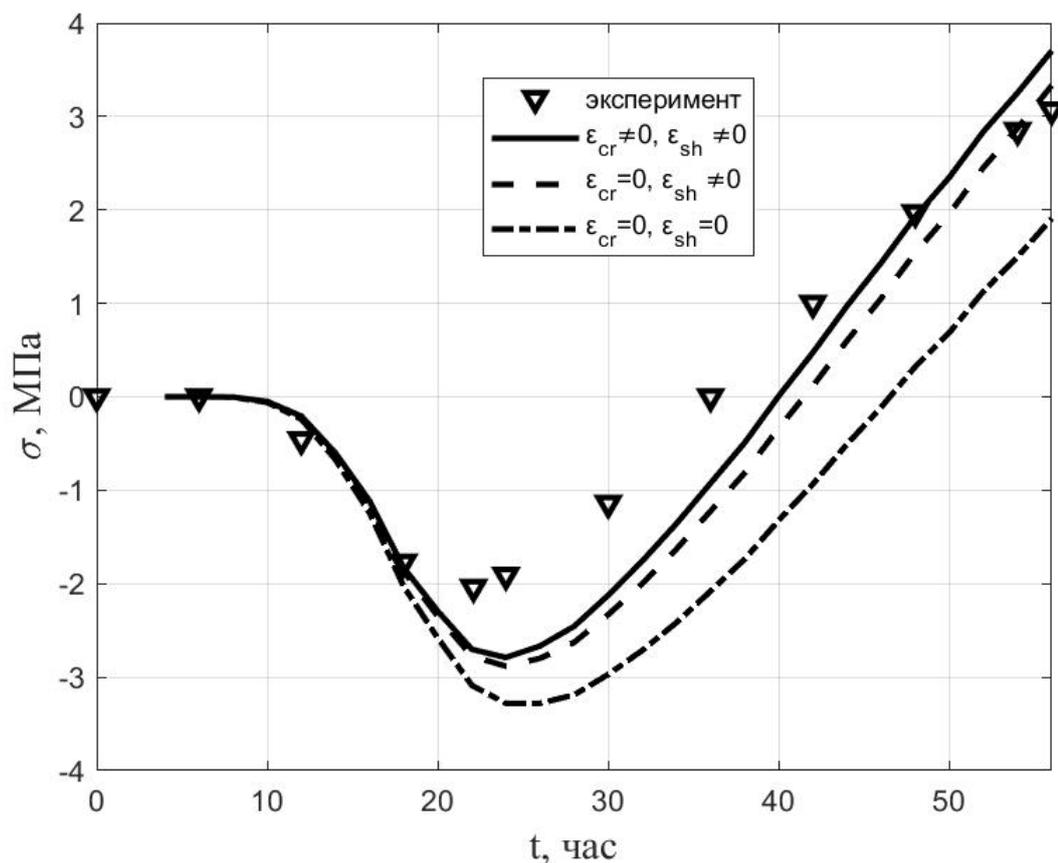


Рис. 1.7 – Сравнение результатов эксперимента с результатами расчета

Из рис. 1.7 видно удовлетворительное совпадение результатов эксперимента с теорией. Также представленные на рис. 1.7 графики показывают, что влияние ползучести в рассматриваемых временных диапазонах несущественно, и ей можно пренебречь. В то же время деформациями усадки бетона пренебрегать нельзя. В дальнейших расчетах ползучесть мы учитывать не будем.

В работе [7] для рассматриваемых образцов также приведена кривая изменения во времени прочности на растяжение. Сравнение кривой, представленной в [7], с кривой $R_t(t)$, построенной с использованием зависимостей (1.7) и (1.12), приведено на рис. 1.8. Из представленного графика видно хорошее совпадение результатов.

Полученные результаты свидетельствуют о возможности использования представленных в данном разделе соотношений при решении практических задач определения напряженно-деформированного состояния массивных монолитных конструкций в процессе твердения.

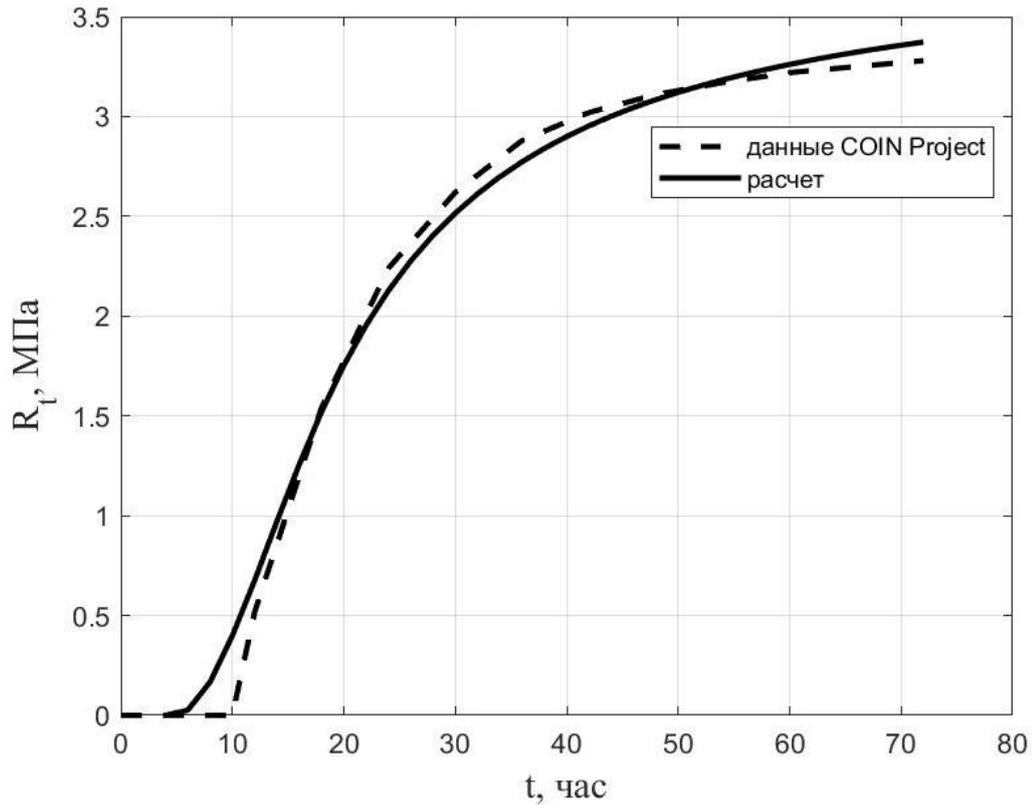


Рис. 1.8 – Сравнение кривой $R_t(t)$, приведенной в [7], с кривой, построенной по формулам (1.7) и (1.12)

1.4 Выводы по главе

. Проведенный литературный обзор показал актуальность проблемы определения температурных полей и напряжений в массивных монолитных конструкциях при их возведении для предотвращения риска раннего трещинообразования. Большинство существующих публикаций посвящено решению данной проблемы для массивных монолитных фундаментных плит. Что касается конструкций в виде толстостенных цилиндрических оболочек, такие исследования ранее не проводились.

Выбраны зависимости, определяющие изменение физико-механических характеристик твердеющего бетона во времени на основе концепции их зависимости от степени зрелости. Выполнена валидация основных соотношений модели на экспериментальных данных норвежских ученых для твердеющих бетонных образцов при 100% ограничении деформации. Установлено

существенное влияние усадки на напряжения в бетонных элементах. В то же время влияние эффектов ползучести не столь существенно. Удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными позволяет использовать выбранные соотношения для решения задачи определения напряженно-деформированного состояния.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ МОНОЛИТНЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

2.1 Одномерная осесимметричная задача теплопроводности

В силу осевой симметрии задача определения температурного поля, вызванного внутренним тепловыделением бетона в процессе твердения, в толстостенных цилиндрических оболочках может быть решена в одномерной и двумерной постановке. При решении в одномерной постановке пренебрегают граничными условиями на верхнем и нижнем торце цилиндра, а также изменением температуры по оси z , считая ее функцией только от радиуса r . В случае постоянного по толщине конструкции коэффициента теплопроводности бетона задача сводится к дифференциальному уравнению:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W, \quad (2.1)$$

где T – температура, λ – коэффициент теплопроводности бетона, ρ_0 и c – соответственно его плотность и удельная теплоемкость, W – мощность внутренних источников тепловыделения на единицу объема ($\text{Вт}/\text{м}^3$).

При наличии конвективного теплообмена на внутренней и внешней поверхности цилиндра граничные условия к уравнению (2.1) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a: -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h_a(T - T_{\infty,a}) &= 0, \\ \text{при } r = b: \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + h_b(T - T_{\infty,b}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где a – внутренний радиус конструкции, b – внешний радиус конструкции, $T_{\infty,a}$ – температура среды при $r = a$, $T_{\infty,b}$ – температура среды при $r = b$, h_a и h_b – коэффициенты теплоотдачи на внутренней и внешней поверхности ($\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$).

Решение нестационарной задачи теплопроводности с учетом внутренних источников тепловыделения может быть выполнено численно методом конечных

разностей. Введем равномерную сетку по r с шагом Δr и по t с шагом Δt . Используя разностную схему второго порядка точности, первую и вторую производную от температуры по радиусу в i – м узле запишем в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \Big|_i &= \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2}; \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_i &= \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Расчет во временной области выполняется шаг за шагом. Производную температуры по времени будем аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \Big|_t = \frac{T_t - T_{t-\Delta t}}{\Delta t}.\tag{2.4}$$

Таким образом, на шаге по времени t разностная аппроксимация уравнения (2.1) принимает вид:

$$\lambda \left(\frac{T_{i+1,t} - 2T_{i,t} + T_{i-1,t}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_i} \frac{T_{i+1,t} - T_{i-1,t}}{2\Delta r} \right) - \rho_0 c \frac{T_{i,t}}{\Delta t} = -\rho_0 c \frac{T_{i,t-\Delta t}}{\Delta t} - W_t.\tag{2.5}$$

При определении производных по r в граничных условиях также воспользуемся схемой второго порядка точности [89]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=a} &= \frac{1}{2\Delta r} (-3T_1 + 4T_2 - T_3); \\ \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=b} &= \frac{1}{2\Delta r} (3T_{nr+1} - 4T_{nr} + T_{nr-1}),\end{aligned}\tag{2.6}$$

где nr – число отрезков по r .

Таким образом, на каждом шаге по времени задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных, равных числу узлов по радиусу. Зная значения температур на предыдущем шаге, можно найти распределение температуры по радиусу на текущем шаге.

В работе [33] указывается, что коэффициент теплопроводности бетона зависит от его степени гидратации ξ . Для этой зависимости предлагается следующая формула:

$$\lambda(\xi) = \lambda_\infty (1,33 - 0,33\xi).\tag{2.7}$$

Степень гидратации может быть определена из дифференциального уравнения :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = f(\xi) \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (2.8)$$

где E_a – энергия активации, R – универсальная газовая постоянная, а функция $f(\xi)$ определяется эмпирической формулой [45]:

$$f(\xi) = \frac{m}{n_0} \left(\frac{A}{m\xi_\infty} + \xi \right) (\xi_\infty - \xi) \exp\left(-\frac{\bar{n}\xi}{\xi_\infty}\right). \quad (2.9)$$

Здесь A_0 , m , n_0 и \bar{n} – постоянные материала, зависящие от типа цемента.

При учете зависимости коэффициента теплопроводности от степени гидратации он становится функцией не только от времени, но и от радиуса. В этом случае для учета неоднородности вместо уравнения (2.1) следует использовать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\lambda(r, t) \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W. \quad (2.10)$$

Решение задачи теплопроводности с учетом зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации эффективнее выполнить методом конечных элементов. При конечно-элементной дискретизации дифференциальное уравнение (2.10) с граничными условиями (2.2) сводится к системе дифференциальных уравнений [90]:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K]\{T\} + \{F\} = 0, \quad (2.11)$$

где $[C]$ – матрица демпфирования, $\{T\}$ – вектор узловых значений температуры, $[K]$ – матрица теплопроводности, $\{F\}$ – вектор нагрузки, содержащий вклад внутренних источников тепловыделения и условий окружающей среды.

Входящие в (2.11) матрицы для отдельного конечного элемента определяются по формулам:

$$[C^{(e)}] = \int_V \rho_0 c [N]^T [N] dV, \quad (2.12)$$

$$[K^{(e)}] = \int_V \lambda [B]^T [B] dV + \int_S h [N]^T [N] dS,$$

$$\{F^{(e)}\} = - \int_V W [N]^T dV - \int_S h T_\infty [N]^T dS,$$

где V – объем элемента, S – площадь поверхности, по которой происходит конвективный теплообмен, $[N]$ – матрица функций формы, $[B]$ – матрица градиентов функций формы.

При использовании одномерного осесимметричного элемента (рис. 2.1) функции формы принимаются в виде:

$$[N] = [N_i \ N_j] = \begin{bmatrix} \frac{r_j - r}{r_j - r_i} & \frac{r - r_i}{r_j - r_i} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

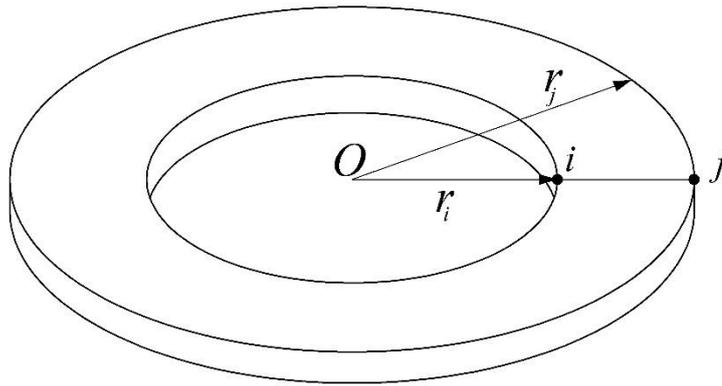


Рис. 2.1 – Используемый конечный элемент

Матрица градиентов $[B]$ при этом записывается в виде:

$$[B] = \frac{\partial [N]}{\partial r} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r_j - r_i} & \frac{1}{r_j - r_i} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Матрица демпфирования $[C^{(e)}]$ с учетом (2.13) принимает вид:

$$[C^{(e)}] = 2\pi\rho_0 c \int_{r_i}^{r_j} [N]^T [N] r dr = \frac{\pi\rho_0 c}{6} (r_j - r_i) \begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Первое слагаемое в матрице теплопроводности $[K^{(e)}]$ с учетом (2.14) принимает вид:

$$\int_V \lambda[B]^T[B]dV = 2\pi \int_{r_i}^{r_j} \lambda[B]^T[B]rdr = \pi\lambda \frac{r_j + r_i}{r_j - r_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Для учета второго слагаемого к коэффициенту матрицы теплопроводности, соответствующему узлу при $r = a$, прибавляется $h_a \cdot 2\pi a$, а к коэффициенту, соответствующему узлу при $r = b$, прибавляется $h_b \cdot 2\pi b$.

Первый интеграл в векторе нагрузки определяется как:

$$\int_V W[N]^T dV = 2\pi \int_{r_i}^{r_j} W[N]^T r dr = \frac{\pi W}{3} \begin{Bmatrix} (r_j - r_i)(2r_i + r_j) \\ (r_j - r_i)(r_i + 2r_j) \end{Bmatrix}. \quad (2.17)$$

Второе слагаемое в выражении для вектора нагрузки учитывается путем прибавления к коэффициенту, соответствующему узлу при $r = a$, величины $h_a \cdot T_{\infty,a} \cdot 2\pi a$ и величины $h_b \cdot T_{\infty,b} \cdot 2\pi b$ к коэффициенту, соответствующему $r = b$.

При аппроксимации производной температуры по времени в форме (2.4) система дифференциальных уравнений (2.11) на каждом шаге по времени сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\left([K] + \frac{[C]}{\Delta t} \right) \{T\} = \frac{[C]}{\Delta t} \{T_{t-\Delta t}\} - \{F\}. \quad (2.18)$$

Для нахождения степени гидратации в каждый момент времени также можно использовать линейную аппроксимацию:

$$\xi_{t+\Delta t} = \xi_t + \frac{\partial \xi}{\partial t} \Delta t \quad (2.19)$$

с начальными условиями $\xi|_{t=0} = 0$.

2.2 Анализ влияния зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации на распределение температуры в конструкции

Для анализа влияния изменения коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации на результирующее температурное поле была решена тестовая задача для толстостенного цилиндра при следующих исходных данных: плотность бетона $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, удельная теплоемкость $c = 1000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$, коэффициенты теплоотдачи на внутренней и внешней поверхности $h_a = h_b =$

10 Вт/(м² · К), температура среды и начальная температура бетонной смеси $T_0 = 20$ °С, внутренний радиус цилиндра $a = 1,5$ м, внешний радиус $b = 2,38$ м, предельное значение коэффициента теплопроводности бетона при степени гидратации $\xi = 1$: $\lambda_\infty = 2,67$ Вт/(м · К). Константы в функции (2.9) и уравнении (2.8): $\xi_\infty = 0,96$, $\bar{n} = 6$, $A/m = 10^{-5}$, $m/n_0 = 0,35 \cdot 10^8$ час⁻¹, $E_a/R = 5000$ К.

Функция изменения во времени количества теплоты, выделяемого 1 м³ бетона в процессе твердения, принималась в соответствии с [68, 91]:

$$Q(t) = Q_{28} \cdot \exp \left[k \cdot \left(1 - \left(\frac{28}{t} \right)^x \right) \right], \quad (2.20)$$

где t – время в сутках.

Расчет выполнялся при $Q_{28} = 130$ МДж/м³, $k = 0,13$, $x = 0,42$. На основе (2.20) мощность внутренних источников тепловыделения определяется как:

$$W(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{28 \cdot Q_{28} \cdot k \cdot x \cdot \exp \left[k \cdot \left(1 - \left(\frac{28}{t} \right)^x \right) \right] \cdot \left(\frac{28}{t} \right)^{x-1}}{t^2}, \frac{\text{МДж}}{\text{сут} \cdot \text{м}^3} \quad (2.21)$$

Графики функций $Q(t)$ и $W(t)$ приведены на рис. 2.2 и рис. 2.3. Рис. 2.2

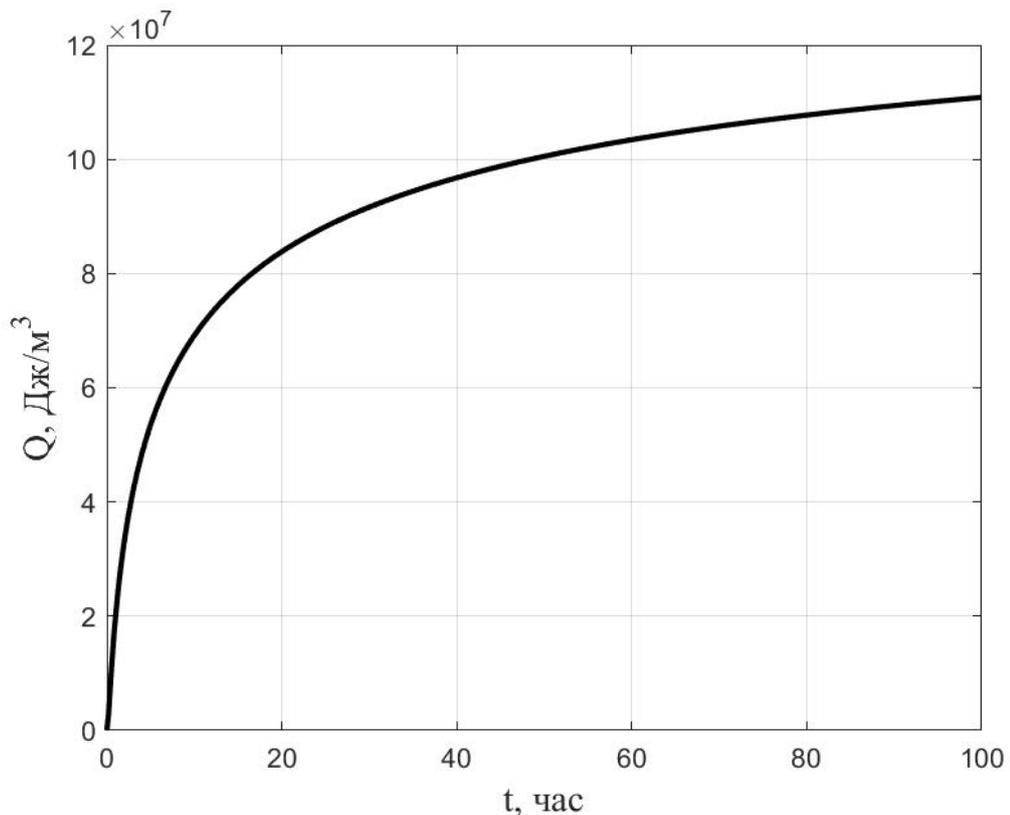


Рис. 2.2 – График $Q(t)$

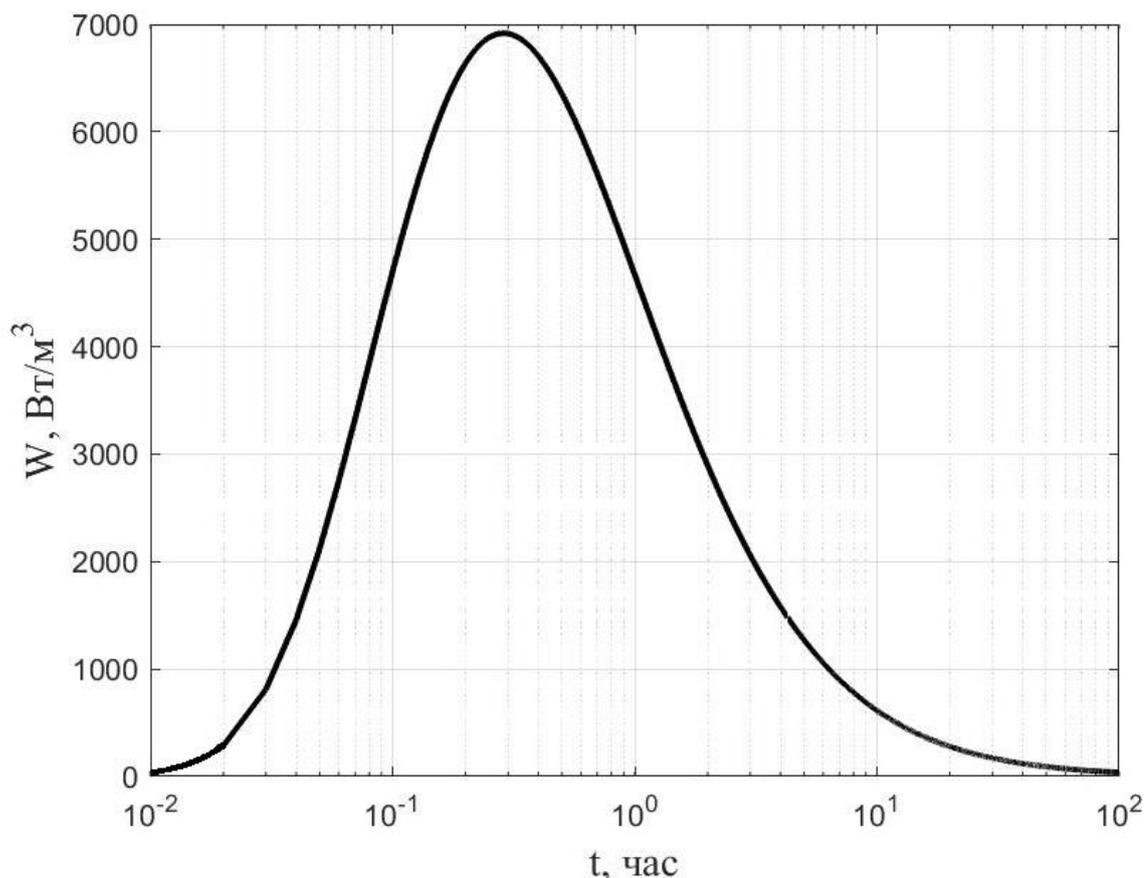


Рис. 2.3 – График изменения во времени мощности тепловыделения бетона

Решение производилось при помощи разработанной автором программы на основе метода конечных элементов в среде MATLAB с учетом зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации, а также методом конечных разностей при $\lambda(r, t) = const$. Помимо этого, для контроля достоверности результатов выполнялось двумерное конечно-элементное моделирование в программном комплексе ANSYS (рис. 2.4). В указанном программном комплексе невозможно заложить зависимость (2.7). На левой и правой стороне исследуемой области, соответствующим внутренней и внешней поверхности цилиндра, в ANSYS задавались условия конвективного теплообмена, соответствующие выражению (2.2), а на верхней и нижней стороне граничные условия не задавались.

Поверхности, показывающие изменение степени гидратации и коэффициента теплопроводности в зависимости от радиуса и времени, приведены на рис. 2.5 и рис. 2.6.

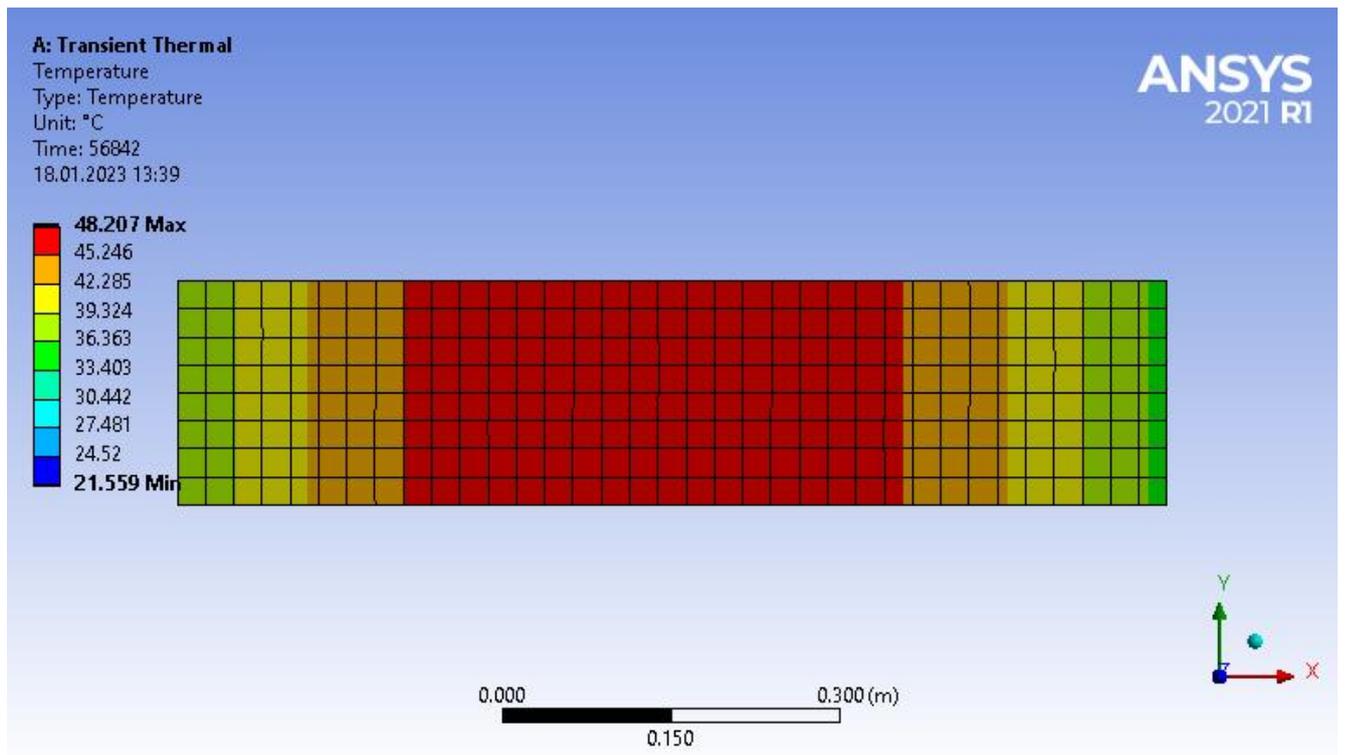


Рис. 2.4 – Результаты анализа температурного поля в ANSYS

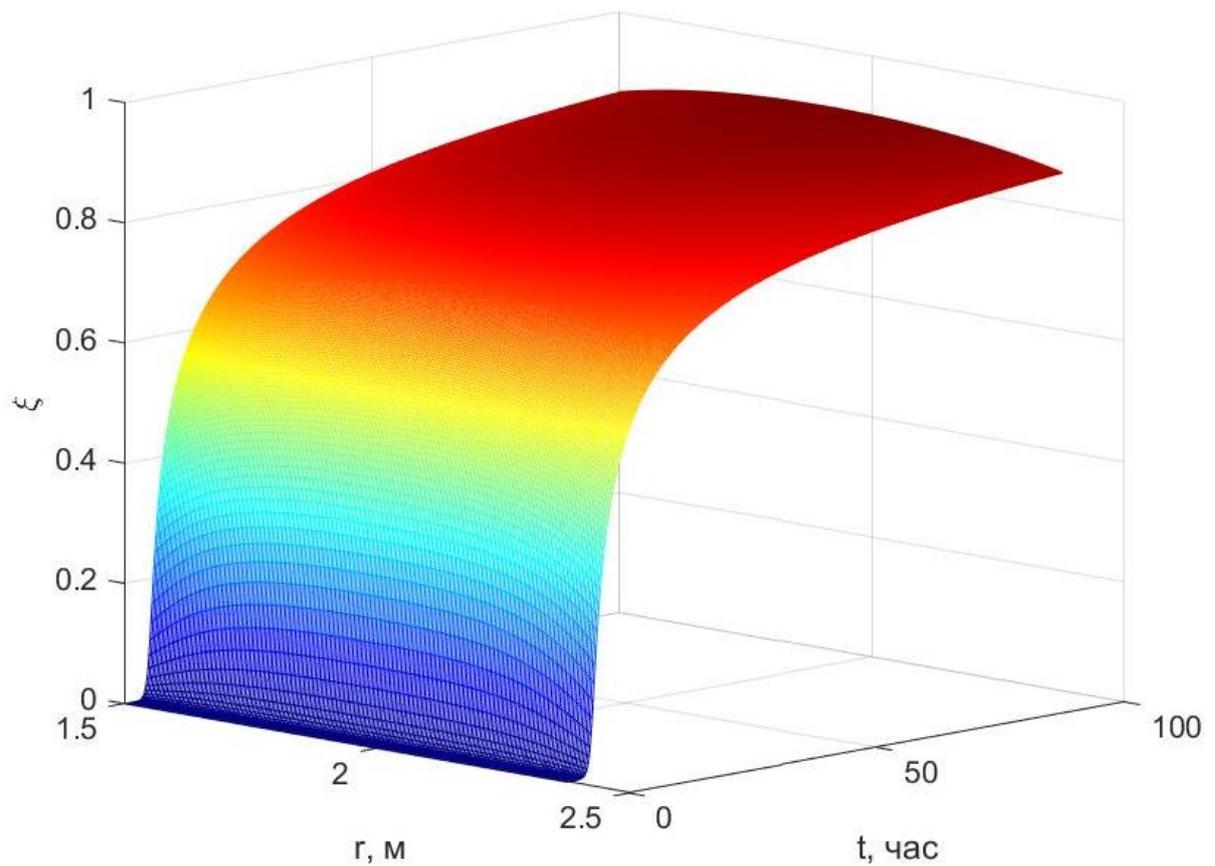


Рис. 2.5 – Изменение степени гидратации в зависимости от r и t

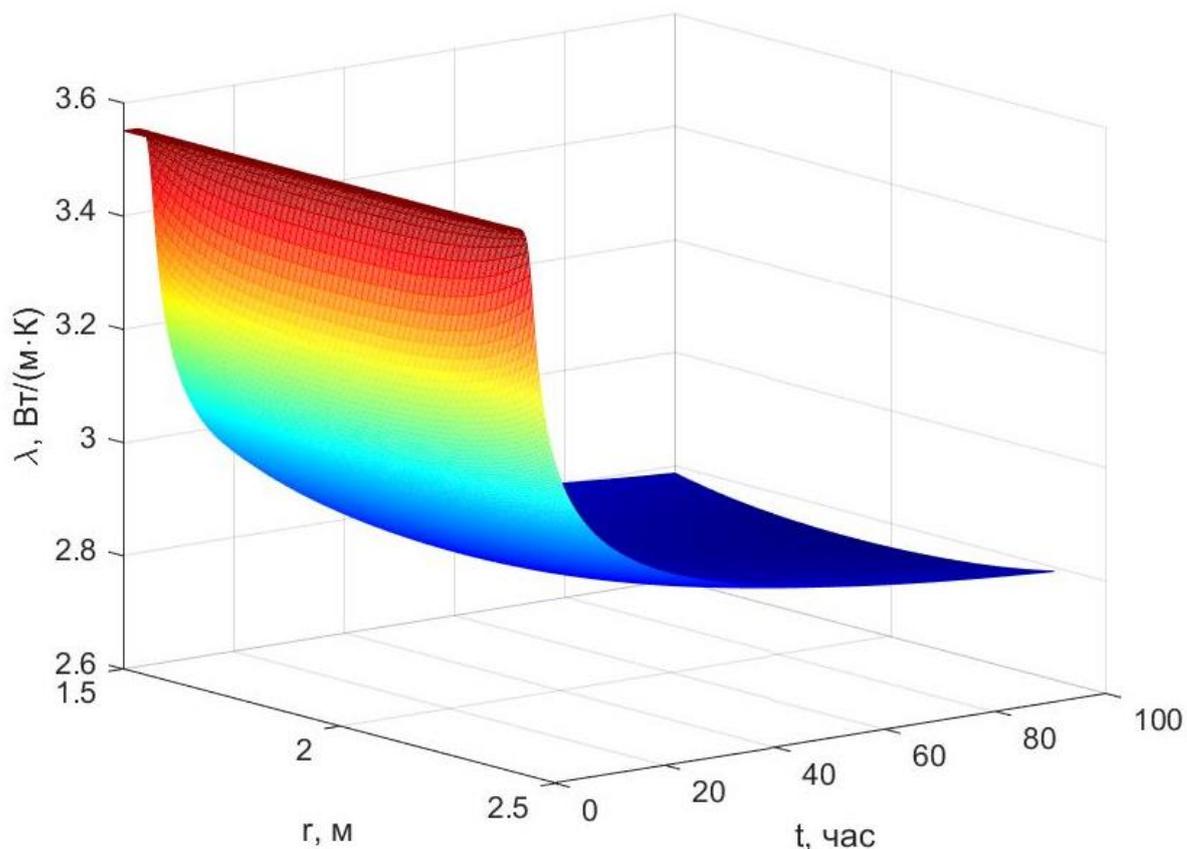


Рис. 2.6 – Изменение коэффициента теплопроводности в зависимости от r и t

На рис. 2.7 приведены графики изменения во времени максимальной температуры в цилиндре, а также температур у внутренней и внешней поверхности. Сплошным линиям соответствует решение с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от степени гидратации, а штриховым – при $\lambda(r, t) = const$. При расчете методом конечных разностей с постоянным коэффициентом теплопроводности результаты совпали с решением в ANSYS.

Из рис. 2.7 видно, что, несмотря на то, что с течением времени происходит изменение коэффициента теплопроводности примерно на 33%, влияние этого фактора на распределение температур в конструкции не столь существенно, и им можно пренебречь.

Одним из факторов, обуславливающих раннее трещинообразование массивных монолитных конструкций в процессе твердения, является перепад температур ΔT между центром и поверхностью конструкции [48]. Допускаемые

величины перепада ΔT на основе различных нормативных документов и исследований приведены в табл. 2.1.

Табл. 2.1 – Допускаемые величины максимального перепада температур ΔT между серединой и поверхностью конструкции

Источник	Контролируемый показатель	Допускаемая величина
A. Rahimi, 2011 [92]	ΔT	$< 20 \text{ }^\circ\text{C}$
ТСХДВН 305:2004 [93]	$\Delta T/\Delta h$	$< 50 \text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$
Zhu Bofang, 2014 [94]	ΔT	$19...16 \text{ }^\circ\text{C}$
CIRIA C660 [95]	ΔT	$\Delta T = 3,7\varepsilon/\alpha^*$
Р НОРСТРОЙ 2.6.17-2016 [96]	ΔT	$9...16 \text{ }^\circ\text{C}^{**}$

Примечания: * ε – предельная деформация бетона при растяжении, α – коэффициент линейного температурного расширения бетона, ** – в зависимости от коэффициента армирования конструкции и класса бетона.

Подстановка в представленную в пятой строке табл. 2.1 формулу значений $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\alpha = 10^{-5} \text{ } 1/^\circ\text{C}$ дает допускаемую величину $\Delta T = 37 \text{ }^\circ\text{C}$.

На 2.8 приведены графики изменения во времени величины ΔT при различных значениях коэффициента теплоотдачи на внутренней и внешней поверхности $h = h_a = h_b$. Из данного рисунка видно, что с увеличением коэффициента теплоотдачи на внутренней и внешней поверхности величина ΔT возрастает и может достигать предельных значений, указанных в строках 4 и 6 табл. 2.1. Поскольку данные различных исследователей и нормативных документов показывают очень большой разброс по допустимому перепаду температур, выводы о возможном риске раннего трещинообразования могут быть сделаны только после анализа напряженно-деформированного состояния конструкции.

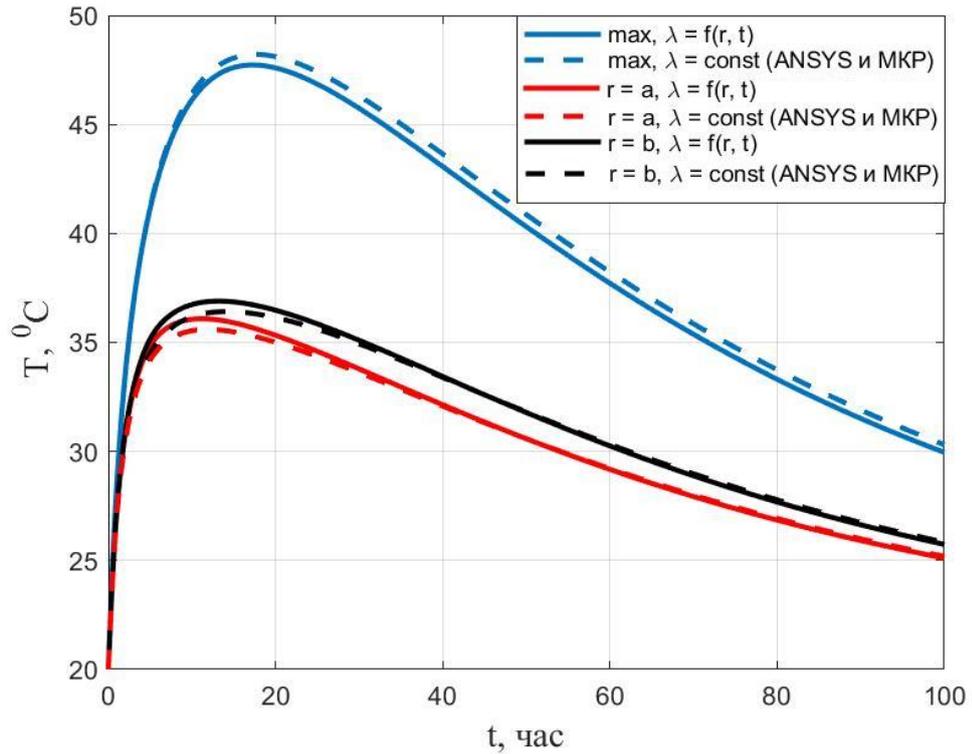


Рис. 2.7 – Изменение во времени максимальной температуры, температуры у внутренней и внешней поверхности цилиндра

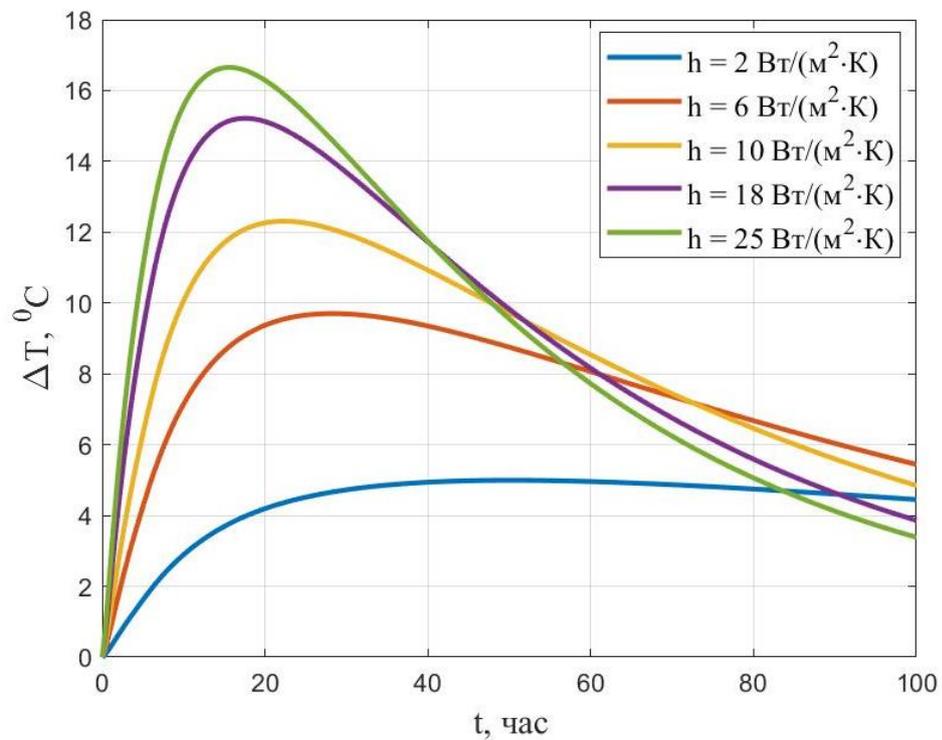


Рис. 2.8 – Изменение во времени максимального перепада температур между центром и поверхностью конструкции при различных значениях коэффициента теплоотдачи

2.3 Двумерная нестационарная задача теплопроводности в толстостенной цилиндрической оболочке в процессе возведения

Для учета граничных условий на верхнем и нижнем торце цилиндрической оболочки решение необходимо выполнить в двумерной постановке, воспользовавшись дифференциальным уравнением [97]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda(r, z, t) \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(r, z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W. \quad (2.22)$$

На поверхностях, где происходит конвективный теплообмен, граничные условия имеют вид:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_\infty) = 0, \quad (2.23)$$

где n – нормаль к поверхности, h – коэффициент теплоотдачи, T_∞ – температура среды.

На границах, весьма удаленных от области, где происходит внутреннее тепловыделение, температуру можно считать известной.

При применении метода конечных элементов, как и в случае одномерной задачи, решение сводится к системе дифференциальных уравнений (2.11). Входящие в эту систему матрицы для отдельных конечных элементов определяются по формулам (2.12). Нами будут использоваться треугольные КЭ (рис. 2.9).

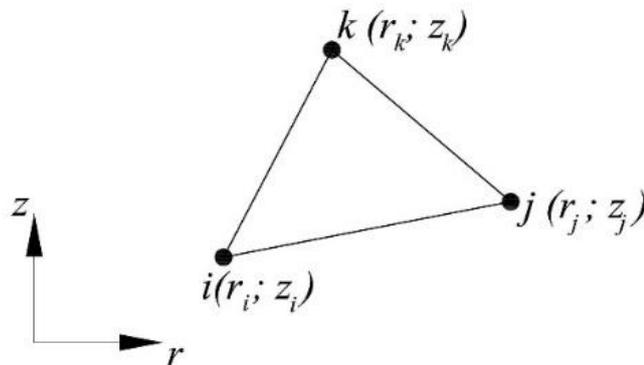


Рис. 2.9 – Конечный элемент для расчета температурного поля в двумерной постановке

Для температуры в пределах КЭ принимается линейная аппроксимация:

$$T(r, z) = [N]\{T\},$$

$$[N] = [N_i \ N_j \ N_k], \{T\} = \{T_i \ T_j \ T_k\}^T, \quad (2.24)$$

$$N_{i(j,k)} = \frac{1}{2A} (a_{i(j,k)} + b_{i(j,k)}r + c_{i(j,k)}z),$$

где A – площадь треугольного КЭ, T_i, T_j, T_k – узловые значения температур, $a_i = r_j z_k - r_k z_j, b_i = z_j - z_k, c_i = r_k - r_j$.

Формулы коэффициентов $a_j, b_j, c_j, a_k, b_k, c_k$ могут быть получены из формул для коэффициентов a_i, b_i, c_i циклической заменой индексов $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$.

Матрица градиентов температуры $[B]$ запишется в виде:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial [N]}{\partial r} \\ \frac{\partial [N]}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Интегрирование выражения (2.12) для получения матрицы демпфирования может быть выполнено при помощи L – координат:

$$\begin{aligned} [C^{(e)}] &= \rho_0 c \int_V [N]^T [N] dV = \rho_0 c \cdot 2\pi \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \{L_1 \ L_2 \ L_3\} r dA = \\ &= 2\pi \rho_0 c \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} (L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k) dA = \\ &= \frac{\pi A \rho_0 c}{30} \begin{bmatrix} 6r_i + 2(r_j + r_k) & 2(r_i + r_j) + r_k & 2(r_i + r_k) + r_j \\ 2(r_i + r_j) + r_k & 6r_j + 2(r_i + r_k) & 2(r_j + r_k) + r_i \\ 2(r_i + r_k) + r_j & 2(r_j + r_k) + r_i & 6r_k + 2(r_i + r_j) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Объемный интеграл в матрице теплопроводности запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_V \lambda [B]^T [B] dV &= \lambda [B]^T [B] \cdot 2\pi \int_A r dA = \\ &= \lambda [B]^T [B] \cdot 2\pi \int_A (L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k) dA = \lambda [B]^T [B] \cdot 2\pi \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \cdot A. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Объемный интеграл в векторе нагрузки примет вид:

$$\begin{aligned}
\int_V W[N]^T dV &= 2\pi W \int_A [N]^T r dA = 2\pi W \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} (L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k) dA = \\
&= 2\pi W \int_A \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \{L_1 \ L_2 \ L_3\} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix} dA = 2\pi W \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix} dA \quad (2.28) \\
&= \frac{\pi A W}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Поверхностные интегралы в матрице теплопроводности и векторе нагрузки вычисляются только для ребер КЭ, попавших на границу между конструкцией и окружающей средой. Вычисление рассмотрим на примере ребра ij , для которого $N_k = L_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_S h[N]^T [N] dS &= h \cdot 2\pi \int_L \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \{L_1 \ L_2 \ 0\} r dL = \\
&= 2\pi h \int_L \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \{L_1 \ L_2 \ 0\} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{Bmatrix} \{L_1 \ L_2 \ 0\} dL = \quad (2.29) \\
&= 2\pi h \cdot \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j & 0 \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где L – длина ребра.

$$\begin{aligned}
\int_S hT_\infty [N]^T dS &= 2\pi h T_\infty \int_L \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} r dL = 2\pi h T_\infty \int_L \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} (r_i L_1 + r_j L_2) dL = \quad (2.30) \\
&= 2\pi h T_\infty \cdot \frac{L}{6} \begin{Bmatrix} 2r_i + r_j \\ r_i + 2r_j \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Был выполнен расчет толстостенной цилиндрической оболочки при таких же значениях внутреннего и внешнего радиуса, как в параграфе 2.2, совместно с возведенным ранее нижерасположенным фундаментом. Схема конструкции с сеткой КЭ приведена на рис. 2.10.

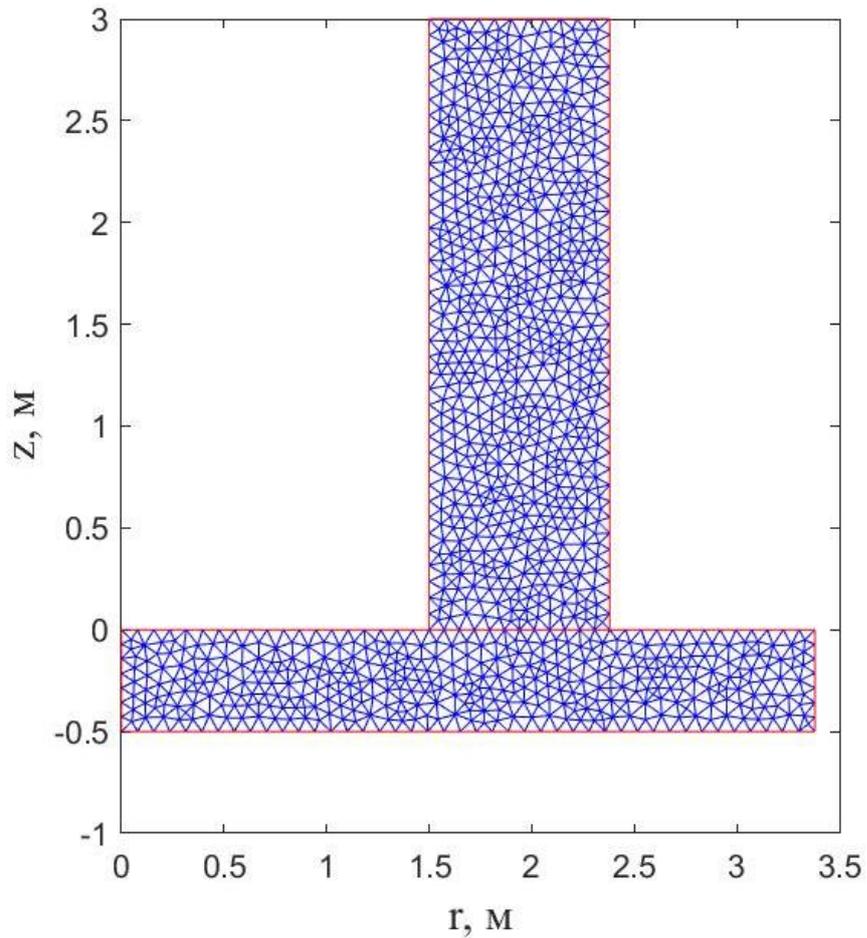


Рис. 2.10 – Схема рассчитываемой конструкции с сеткой КЭ

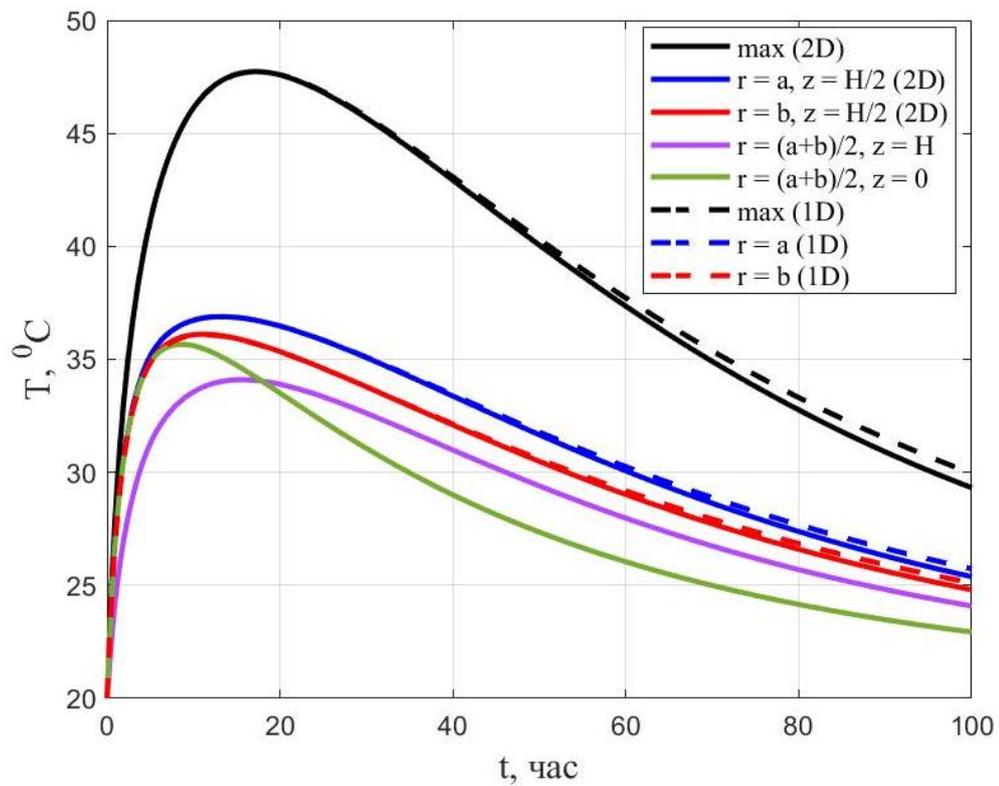


Рис. 2.11 – Изменение во времени температур в различных точках конструкции

На верхней и боковых поверхностях цилиндра, а также на верхней поверхности фундамента принимались граничные условия (2.23) с коэффициентом теплоотдачи равным $h = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ и температурой среды $20 \text{ }^\circ\text{С}$. На боковой и нижней поверхности фундамента температура принималась заданной и равной $20 \text{ }^\circ\text{С}$.

На рис. 2.11 показаны графики изменения во времени максимальной температуры, температуры у внутренней и внешней поверхности в среднем по высоте сечения ($z = H/2 = 1,5 \text{ м}$), температуры на верхнем и нижнем торце цилиндра при $r = (a + b)/2$. Штриховым линиям соответствует расчет в одномерной постановке. Заметной разницы для среднего сечения при этом не наблюдается. Распределение температуры в момент времени $t = 17,2 \text{ ч}$, когда достигается ее максимум в толще конструкции, приведено на рис. 2.12.

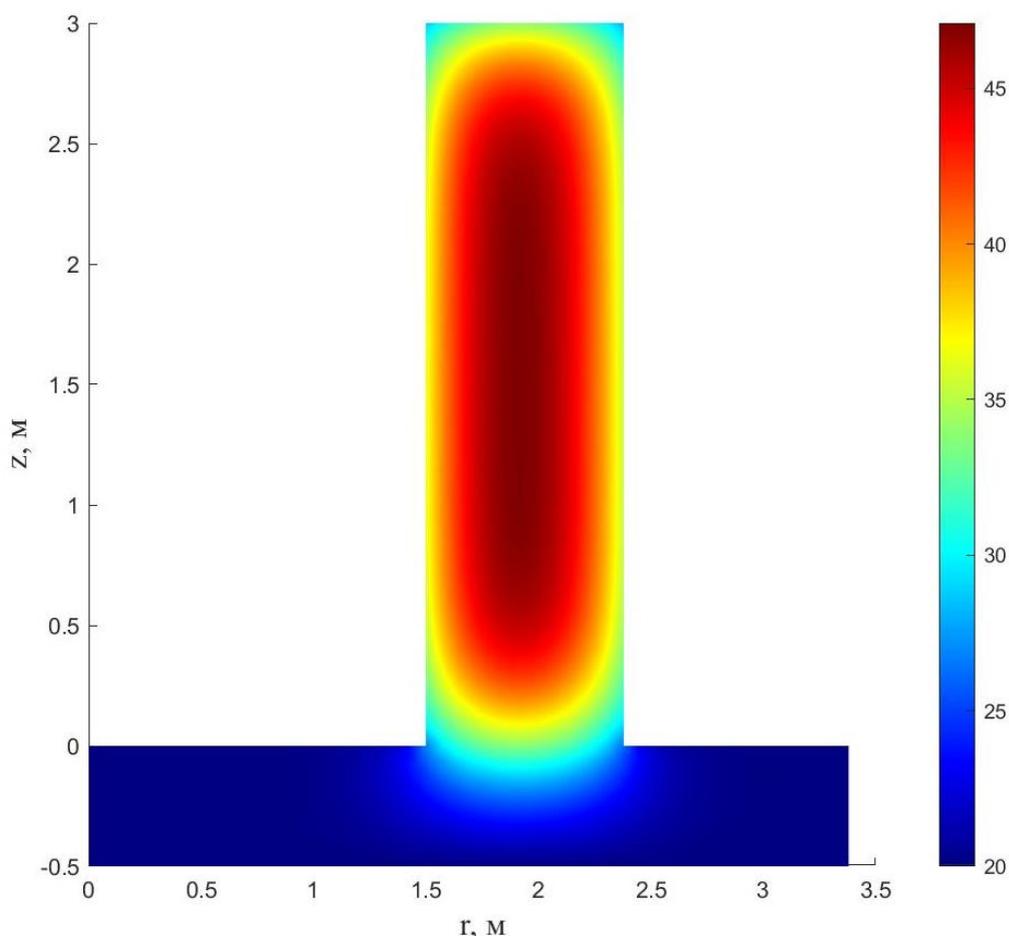


Рис. 2.12 – Распределение температуры в момент времени $t = 17,2 \text{ ч}$

2.4 Учет стадийности возведения при определении температурных полей

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что конструкция изготавливается одномоментно. Одним из способов снижения риска трещинообразования вследствие неравномерного нагрева массивных монолитных конструкций при бетонировании является разделение их на температурные блоки с организацией технологических перерывов. Рассмотрим задачу определения температурного поля в следующей постановке. Конструкция, рассчитанная в предыдущем параграфе, бетонируется тремя горизонтальными слоями высотой 1 м с перерывами t_{br} . Величину технологических перерывов будем варьировать. Функцию тепловыделения примем такую же, как в предыдущем параграфе. Коэффициент теплоотдачи на боковых поверхностях примем $h = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, а для верхней поверхности – $h = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Зависимость коэффициент теплопроводности бетона от степени гидратации учитывать не будем.

При расчете с учетом истории возведения для каждого конечного элемента задается время его «рождения». До момента рождения элемент считается выключенным из расчетной схемы. Поскольку бетонирование выполняется горизонтальными слоями, на каждом шаге по времени выполняется проверка для каждого живого элемента, жив ли вышележащий элемент. В противном случае на верхней грани живого элемента назначаются граничные условия конвективного теплообмена с окружающей средой.

При бетонировании горизонтальными слоями вместо треугольных конечных элементов удобнее использовать прямоугольные (рис. 2.13).

Функции формы принимаются в виде:

$$\begin{aligned}
 [N] &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]; \\
 N_1 &= \frac{(r - r_2)(z - z_3)}{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}; \\
 N_2 &= -\frac{(r - r_1)(z - z_3)}{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)};
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

$$N_3 = -\frac{(r - r_2)(z - z_1)}{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)};$$

$$N_4 = \frac{(r - r_1)(z - z_1)}{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}.$$

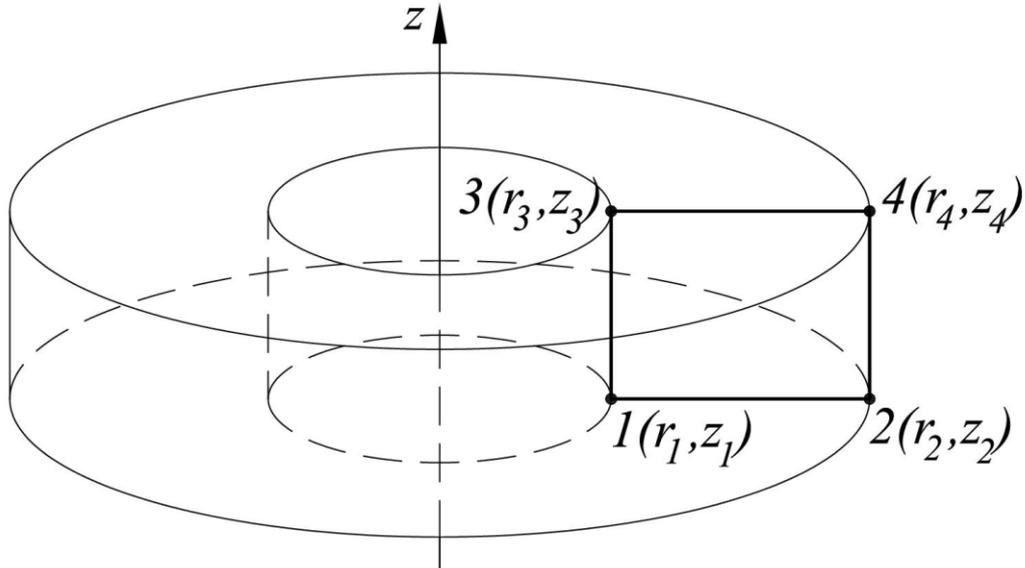


Рис. 2.13 – Конечные элементы, используемые для расчета температурного поля в осесимметричной постановке с учетом стадийности возведения

Матрица теплопроводности $[K^{(e)}]$ и матрица демпфирования $[C^{(e)}]$ для прямоугольного КЭ были определены точно путем символьного интегрирования выражений (2.12). Здесь формулы матриц $[K^{(e)}]$ и $[C^{(e)}]$ не приводятся ввиду их громоздкости. Вклад в вектор нагрузки внутренних источников тепловыделения записывается в виде:

$$\int_V W[N]^T dV = \frac{\pi W}{6} \begin{Bmatrix} (r_1 - r_2)(2r_1 + r_2)(z_1 - z_3) \\ (r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)(z_1 - z_3) \\ (r_1 - r_2)(2r_1 + r_2)(z_1 - z_3) \\ (r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)(z_1 - z_3) \end{Bmatrix}. \quad (2.32)$$

Поверхностные интегралы в матрице теплопроводности и векторе нагрузки, учитывающие условия конвективного теплообмена, для горизонтальных ребер записываются в виде:

$$\int_S h[N]^T [N] dS = \frac{\pi h}{6} \begin{bmatrix} (r_2 - r_1)(3r_1 + r_2) & r_2^2 - r_1^2 \\ r_2^2 - r_1^2 & (r_2 - r_1)(r_1 + 3r_2) \end{bmatrix}; \quad (2.33)$$

$$\int_S hT_\infty [N]^T dS = \frac{\pi h T_\infty}{3} \left\{ \begin{array}{l} -2r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 \\ (r_2 - r_1)(r_1 + 2r_2) \end{array} \right\}$$

Для вертикальных ребер они принимают вид:

$$\int_S h [N]^T [N] dS = \frac{2\pi r h}{3} \begin{bmatrix} z_3 - z_1 & 2(z_3 - z_1) \\ 2(z_3 - z_1) & z_3 - z_1 \end{bmatrix};$$

$$\int_S h T_\infty [N]^T dS = \pi h T_\infty r (z_3 - z_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$
(2.34)

где r – расстояние от оси симметрии до ребра.

На рис. 2.14 представлены полученные в результате расчета графики изменения во времени максимальной температуры, а также температуры на верхней поверхности при различной продолжительности перерыва между укладкой слоев t_{br} .

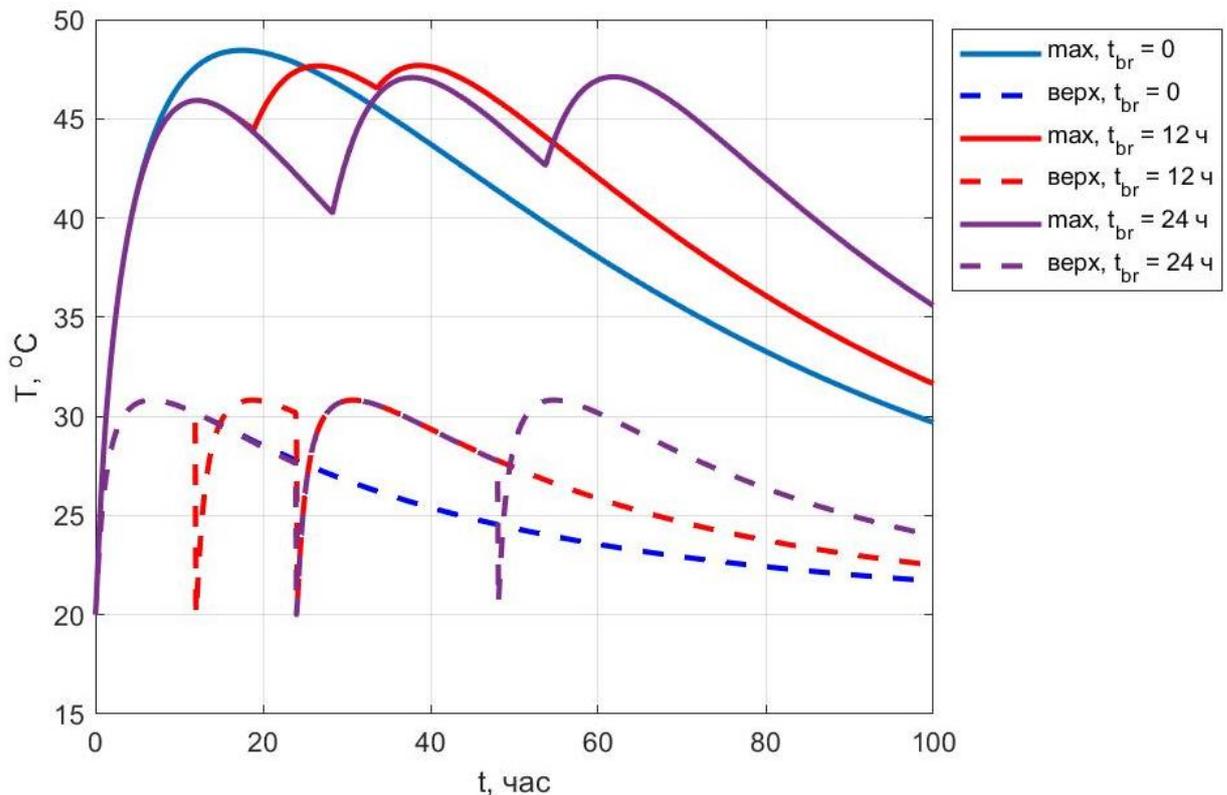


Рис. 2.14 – Изменение во времени максимальной температуры, а также температуры на верхней поверхности при различной продолжительности перерывов между укладкой слоев

Из рис. 2.14 видно, что даже довольно длительные перерывы в бетонировании продолжительностью в сутки приводят к незначительному снижению максимальной температуры, а также максимального перепада температур между центром и поверхностью конструкции.

2.5 Выводы по главе

Разработаны методики определения нестационарных температурных полей при возведении толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной и двумерной осесимметричной постановке с учетом неоднородности, вызванной зависимостью коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации. Выполнено сравнение с решением в программном комплексе ANSYS при постоянном коэффициенте теплопроводности. Установлено, что несмотря на то, что в процессе гидратации коэффициент теплопроводности бетона снижается примерно на 30%, это не оказывает существенного влияния на результирующие температурные поля, и зависимостью $\lambda(r, t)$ можно пренебречь.

Решена задача определения температурного поля в толстостенной цилиндрической оболочке, бетонируемой послойно с технологическими перерывами. Установлено, что даже довольно длительные перерывы между укладкой слоев продолжительностью в 1 сутки не приводят к заметному снижению максимальной температуры в конструкции, а также перепада температур между центром и поверхностью конструкции.

ГЛАВА 3. ОДНОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ

3.1 Конечно-разностная реализация задачи

При расчете толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной осесимметричной постановке как правило рассматривают 2 случая: плоское напряженное состояние (ПНС) и плоское деформированное состояние (ПДС). Первый случай имеет место для коротких цилиндров, а второй – для достаточно длинных. В обоих случаях при наличии вынужденных деформаций, к которым относятся температурные деформации и деформации усадки, задача расчета радиально неоднородного цилиндра может быть сведена к дифференциальному уравнению второго порядка относительно радиального напряжения σ_r [98]:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \varphi(r) \frac{d\sigma_r}{dr} + \psi(r)\sigma_r = f(r). \quad (3.1)$$

Функции $\varphi(r)$, $\psi(r)$ и $f(r)$ в случае плоской деформации определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{3}{r} - \frac{1}{E} \cdot \frac{dE}{dr} - \frac{2\nu}{1-\nu^2} \cdot \frac{d\nu}{dr}; \\ \psi(r) &= -\frac{1}{r} \left[\frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \frac{1}{E} + \frac{(1+4\nu)}{1-\nu^2} \cdot \frac{d\nu}{dr} \right]; \\ f(r) &= -\frac{E}{r(1-\nu^2)} \left(\frac{d\varepsilon_B}{dr} (1+\nu) + \frac{d\nu}{dr} \varepsilon_B \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_B = \varepsilon_{sh} + \alpha\Delta T$.

В случае плоского напряженного состояния функции $\varphi(r)$, $\psi(r)$ и $f(r)$ имеют вид:

$$\varphi(r) = \frac{3}{r} - \frac{1}{E} \cdot \frac{dE}{dr}; \quad (3.3)$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{r} \left[\frac{dv}{dr} + (1 - \nu) \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{dE}{dr} \right];$$

$$f(r) = -\frac{E}{r} \cdot \frac{d\varepsilon_B}{dr}.$$

Радиальные и окружные напряжения в плоской осесимметричной задаче связаны соотношением:

$$\sigma_\theta = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r. \quad (3.4)$$

Напряжения σ_z в случае плоского деформированного состояния определяются по формуле:

$$\sigma_z = -E\varepsilon_B + \nu(\sigma_\theta + \sigma_r). \quad (3.5)$$

Изменение коэффициента Пуассона в зависимости от r и t мы учитывать не будем по причине отсутствия каких-либо экспериментальных данных, указывающих на это. Поскольку модуль упругости бетона в рассматриваемой нами задаче является функцией времени, уравнение (3.1) следует записать в приращениях:

$$\frac{d^2(\Delta\sigma_r)}{dr^2} + \varphi(r) \frac{d(\Delta\sigma_r)}{dr} + \psi(r)\Delta\sigma_r = \Delta f(r), \quad (3.6)$$

где $\Delta f(r) = -\frac{E}{r(1-\nu^2)} \frac{d(\Delta\varepsilon_B)}{dr} (1+\nu)$ для ПДС,

$$\Delta f(r) = -\frac{E}{r} \cdot \frac{d(\Delta\varepsilon_B)}{dr} \quad \text{для ПНС.}$$

Функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ в уравнении (3.6) определяются по формулам (3.2) и (3.3) в зависимости от вида напряженного состояния. Приращения напряжений σ_θ вычисляются по формуле:

$$\Delta\sigma_\theta = r \frac{d(\Delta\sigma_r)}{dr} + \Delta\sigma_r. \quad (3.7)$$

Для плоской деформации приращения напряжения σ_z вычисляются по формуле:

$$\Delta\sigma_z = -E\Delta\varepsilon_B + \nu(\Delta\sigma_\theta + \Delta\sigma_r). \quad (3.8)$$

Граничные условия для уравнения (3.6) имеют вид:

$$\Delta\sigma_r(a) = \Delta\sigma_r(b) = 0. \quad (3.9)$$

При решении уравнения (3.6) методом конечных разностей его аппроксимация для i – го узла принимает вид:

$$\frac{\Delta\sigma_{r,i+1} - 2\Delta\sigma_{r,i} + \Delta\sigma_{r,i-1}}{\Delta r^2} + \varphi(r_i) \cdot \frac{\Delta\sigma_{r,i+1} - \Delta\sigma_{r,i-1}}{2\Delta r} + \psi(r_i)\Delta\sigma_{r,i} = \Delta f(r_i). \quad (3.10)$$

После нахождения приращений напряжений $\Delta\sigma_r$ приращения напряжений $\Delta\sigma_\theta$ для внутренних узлов сетки определяются по формуле:

$$\Delta\sigma_{\theta,i} = r_i \frac{\Delta\sigma_{r,i+1} - \Delta\sigma_{r,i-1}}{2\Delta r} + \Delta\sigma_{r,i}. \quad (3.11)$$

Для узлов при $r = a$ и $r = b$ при определении величин $\Delta\sigma_\theta$ также используется разностный шаблон второго порядка точности:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_\theta|_{r=a} &= \frac{a}{2\Delta r} (-3\Delta\sigma_{r,1} + 4\Delta\sigma_{r,2} - \Delta\sigma_{r,3}) + \Delta\sigma_{r,1}; \\ \Delta\sigma_\theta|_{r=b} &= \frac{b}{2\Delta r} (3\Delta\sigma_{r,nr+1} - 4\Delta\sigma_{r,nr} + \Delta\sigma_{r,nr-1}) + \Delta\sigma_{r,nr+1}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Дифференцирование функции $E(r)$ выполняется численно.

Задачи определения температурных полей и напряженно-деформированного состояния решаются несвязно. Расчет напряжений во временной области выполняется после определения температурного поля пошагово. После определения приращений напряжений на каждом шаге они суммируются с напряжениями с предыдущего шага.

3.2 Конечно-элементная реализация задачи

При наличии вынужденных деформаций система уравнений МКЭ имеет вид [99]:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F_B\}, \quad (3.13)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений, $\{F\}$ – вектор внешних узловых нагрузок, $\{F_B\}$ – вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки.

В задаче расчета напряжений, вызванных внутренним тепловыделением и усадкой бетона вектор $\{F\}$ равен нулю. Применительно к нашей задаче запишем систему (3.13) в приращениях:

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta F_B\}. \quad (3.14)$$

Матрица жесткости и вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки определяются по формулам:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [D] [B] dV; \\ \{\Delta F_B\} &= \int_V [B]^T [D] \{\Delta \varepsilon_B\} dV. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Нами будет использоваться одномерный конечный элемент, рассмотренный ранее в параграфе 2.1. В каждом узле данный элемент имеет одну степень свободы – радиальное перемещение u .

Матрица упругих постоянных $[D]$ для используемого КЭ имеет вид:

$$[D] = \begin{cases} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}, \text{ для ПДС} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix}, \text{ для ПНС} \end{cases} \quad (3.16)$$

Вектор $\{\Delta \varepsilon_B\}$ определяется по формуле:

$$\{\Delta \varepsilon_B\} = \begin{cases} (1+\nu)(\alpha \Delta T + \Delta \varepsilon_{sh}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{ для ПДС} \\ (\alpha \Delta T + \Delta \varepsilon_{sh}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{ для ПНС.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Матрица $[B]$ устанавливает связь между полными деформациями и узловыми перемещениями:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dr} \\ u \\ \frac{r}{r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d[N] \\ [N] \\ r \end{bmatrix} \{U\} = [B]\{U\}. \quad (3.18)$$

Функции формы $[N]$ при аппроксимации перемещений принимаются такие же, как и при аппроксимации температуры.

В работе [99] предлагается вычисление интегралов в (3.15) выполнять приближенно, считая матрицу $[B]$ не зависящей от радиуса и вычисляя ее значение в центре элемента. Указанные интегралы также могут быть проинтегрированы точно с использованием пакетов символьного интегрирования (MATLAB, Octave и др.). Матрица жесткости $[K]$ одного конечного элемента имеет размер 4×4 . Элементы верхнего треугольника этой матрицы в случае ПДС определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= \frac{2\pi E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\frac{r_j^2 \cdot \ln \frac{r_j}{r_i} (1-\nu)}{(r_j - r_i)^2} - 1 \right); \\
 K_{1,2} &= -\frac{2\pi E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{r_i \cdot r_j \cdot \ln \frac{r_j}{r_i} (1-\nu)}{(r_j - r_i)^2}; \\
 K_{2,2} &= \frac{2\pi E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(1 + \frac{r_i^2 \cdot \ln \frac{r_j}{r_i} (1-\nu)}{(r_j - r_i)^2} \right).
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

В случае ПНС элементы верхнего треугольника матрицы жесткости принимают вид:

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= \frac{2\pi E}{1-\nu^2} \left(\frac{r_j^2 \ln \frac{r_j}{r_i}}{(r_j - r_i)^2} - (1+\nu) \right); \\
 K_{1,2} &= -\frac{2\pi E}{1-\nu^2} \frac{r_i \cdot r_j \cdot \ln \frac{r_j}{r_i}}{(r_j - r_i)^2}; \\
 K_{2,2} &= \frac{2\pi E}{1-\nu^2} \left(\frac{r_i^2 \ln \frac{r_j}{r_i}}{(r_j - r_i)^2} + (1+\nu) \right).
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

При вычислении второго интеграла в (3.15) можно упрощенно считать, что вынужденные деформации в пределах КЭ постоянны. Также принимаются

постоянными в пределах КЭ и механические характеристики материала. Тогда выражение для $\{\Delta F_B\}$ примет вид:

$$\{\Delta F_B\} = 2\pi \int_{r_i}^{r_j} [B]^T \cdot r dr [D]\{\Delta \varepsilon_B\} = \pi \begin{bmatrix} -(r_i + r_j) & r_j - r_i \\ r_i + r_j & r_j - r_i \end{bmatrix} [D]\{\Delta \varepsilon_B\}. \quad (3.21)$$

После определения приращений перемещений $\{\Delta U\}$ из системы (3.14) приращения напряжений σ_r и σ_θ вычисляются по формуле:

$$\{\Delta \sigma\} = \begin{Bmatrix} \Delta \sigma_r \\ \Delta \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D](\{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \varepsilon_B\}) = [D]([B]\{\Delta U\} - \{\Delta \varepsilon_B\}). \quad (3.22)$$

Приращения напряжений σ_z в случае ПДС определяются по формуле (3.8).

3.3 Решение тестовых задач

Первым этапом для контроля достоверности результатов был выполнен расчет толстостенной цилиндрической оболочки с исходными данными, приведенными в параграфе 2.2, при постоянном во времени модуле упругости бетона $E = 3 \cdot 10^4$ МПа с последующим сравнением решения с программным комплексом ANSYS. Остальные характеристики бетона, необходимые для расчета: коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, коэффициент линейного температурного расширения $\alpha = 10^{-5}$ 1/°C. При моделировании в ANSYS на верхнем и нижнем торце цилиндра (границы А и В по рис. 3.1) устанавливались закрепления от перемещений по вертикальной оси для создания условий плоской деформации.

На рис. 3.2 приведены графики изменения во времени напряжений σ_θ у внешней поверхности, полученные путем расчета по авторской методике и в ANSYS. Расхождение результатов незначительное. Показано также решение при постоянном модуле упругости, но на основе температурного поля, определенного с учетом зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени гидратации. Учет этой зависимости приводит к небольшому снижению максимальных напряжений. При постоянном во времени модуле упругости температурные напряжения полностью обратимы.

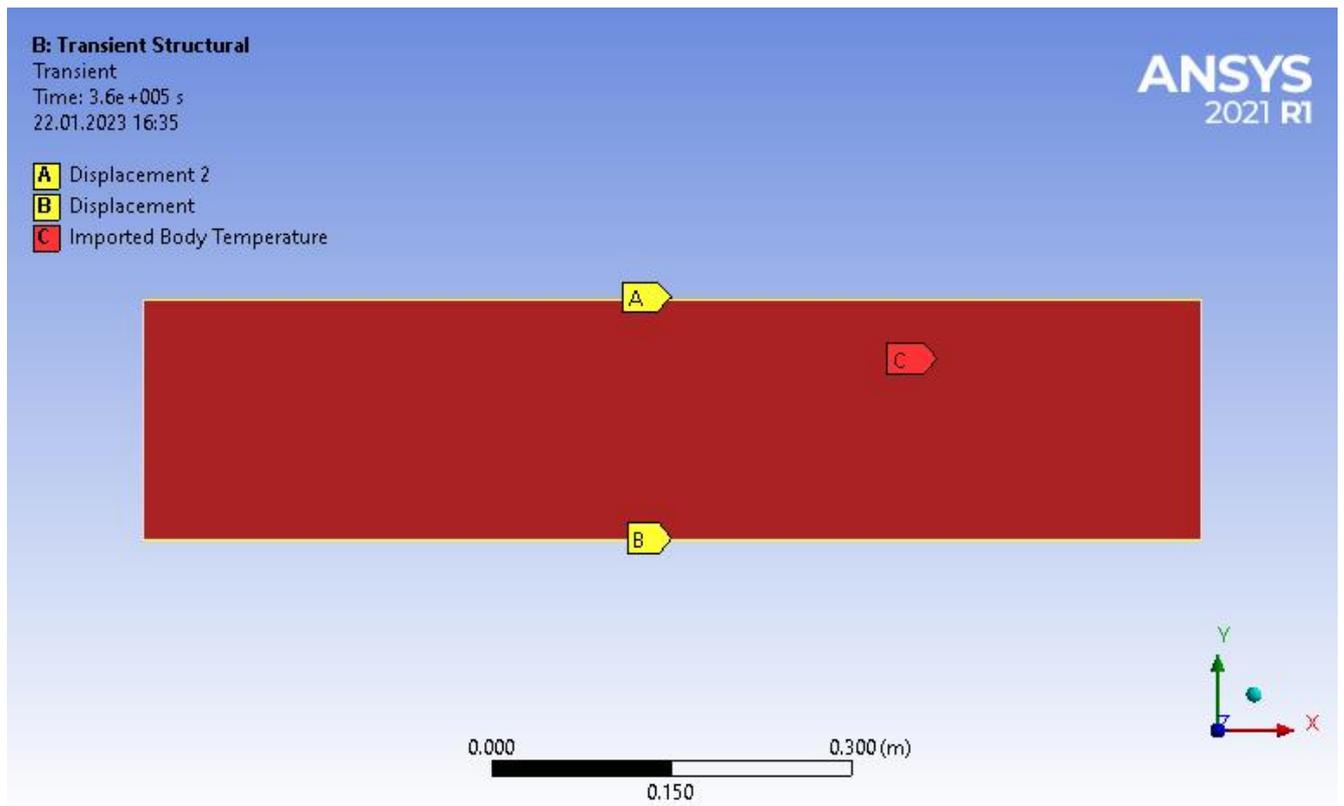
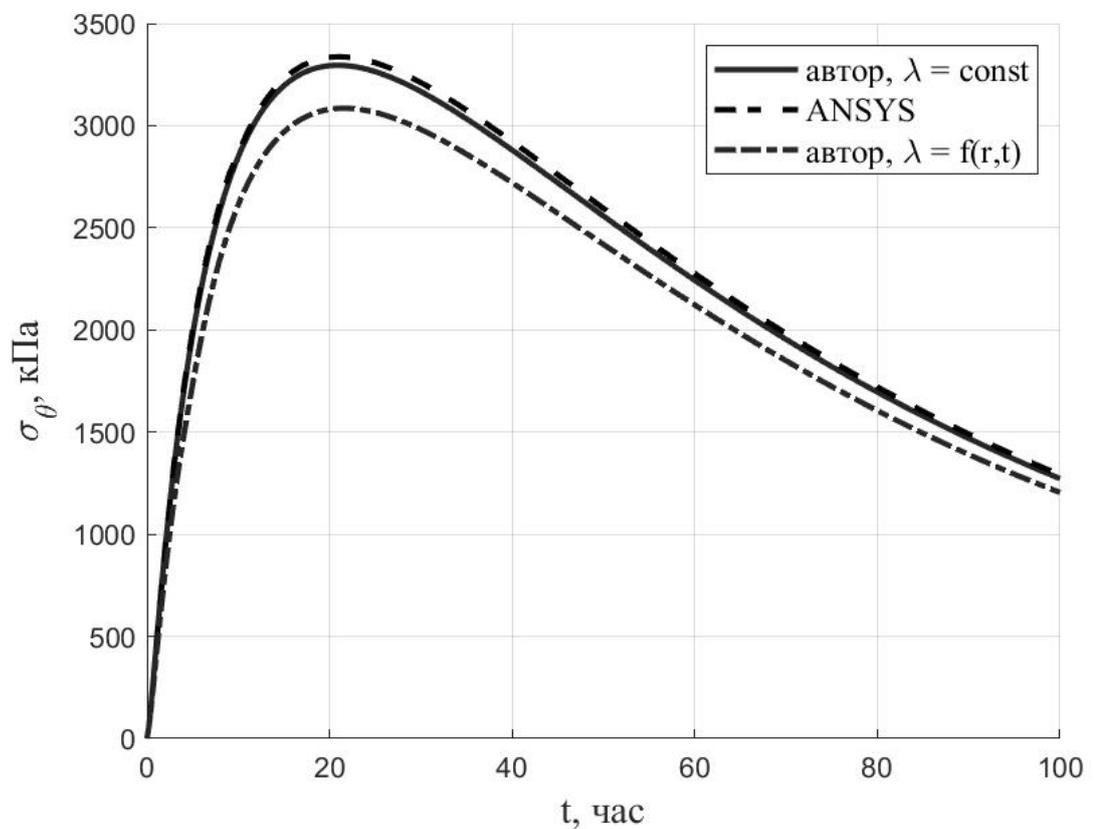


Рис. 3.1 – Граничные условия в ANSYS

Рис. 3.2 – Изменение во времени напряжений σ_θ у внешней поверхности цилиндра при постоянном модуле упругости

При расчете с учетом зависимости физико-механических характеристик от степени зрелости класс бетона принимался равным В25 (прочность при сжатии в возрасте 28 сут $R_{28} = 37$ МПа). В случае учета зависимости модуля упругости от времени по формулам (1.6)-(1.10) картина напряженно-деформированного состояния меняется кардинально. На рис. 3.3 приведены графики изменения окружных напряжений у внутренней и внешней поверхности, а также в середине толщи во времени. Штриховыми линиями показаны решения для случая плоского напряженного состояния. Из рис. 3.3 видно, что на начальном этапе у внутренней и внешней поверхности возникают небольшие растягивающие напряжения, но затем знак напряжений меняется, и в конечном итоге при $r = a$ и $r = b$ остаточные напряжения сжимающие, а в середине толщи – растягивающие.

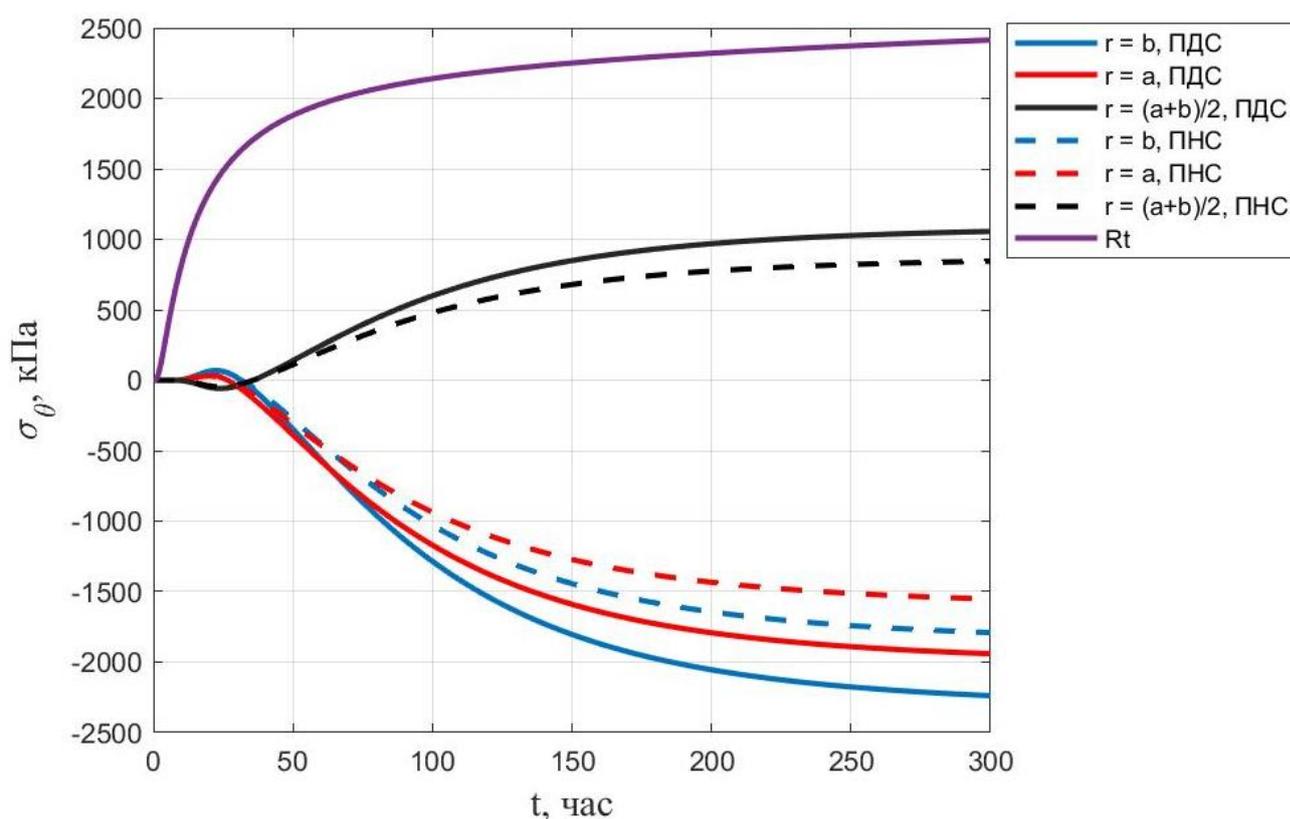


Рис. 3.3 – Изменение во времени окружных напряжений с учетом зависимости модуля упругости бетона от степени его зрелости

На рис. 3.3 показан также график изменения во времени текущей прочности бетона на растяжение R_t в середине толщи. Для рассмотренного примера окружные напряжения не превышают прочность материала на растяжение. Отметим также,

что в случае плоского напряженного состояния напряжения ниже σ_θ , чем в случае плоского деформированного состояния.

Усадка бетона на величину напряжений σ_r и σ_θ не влияет, поскольку она постоянна по объему тела, а в дифференциальном уравнении (3.6) фигурирует не сама вынужденная деформация, а ее производная по радиусу, которая для деформаций усадки обращается в нуль. В тоже время деформации усадки оказывают влияние на величину напряжений σ_z . Графики изменения во времени напряжений σ_z для случая ПДС без учета и с учетом усадки приведены на рис. 3.4.

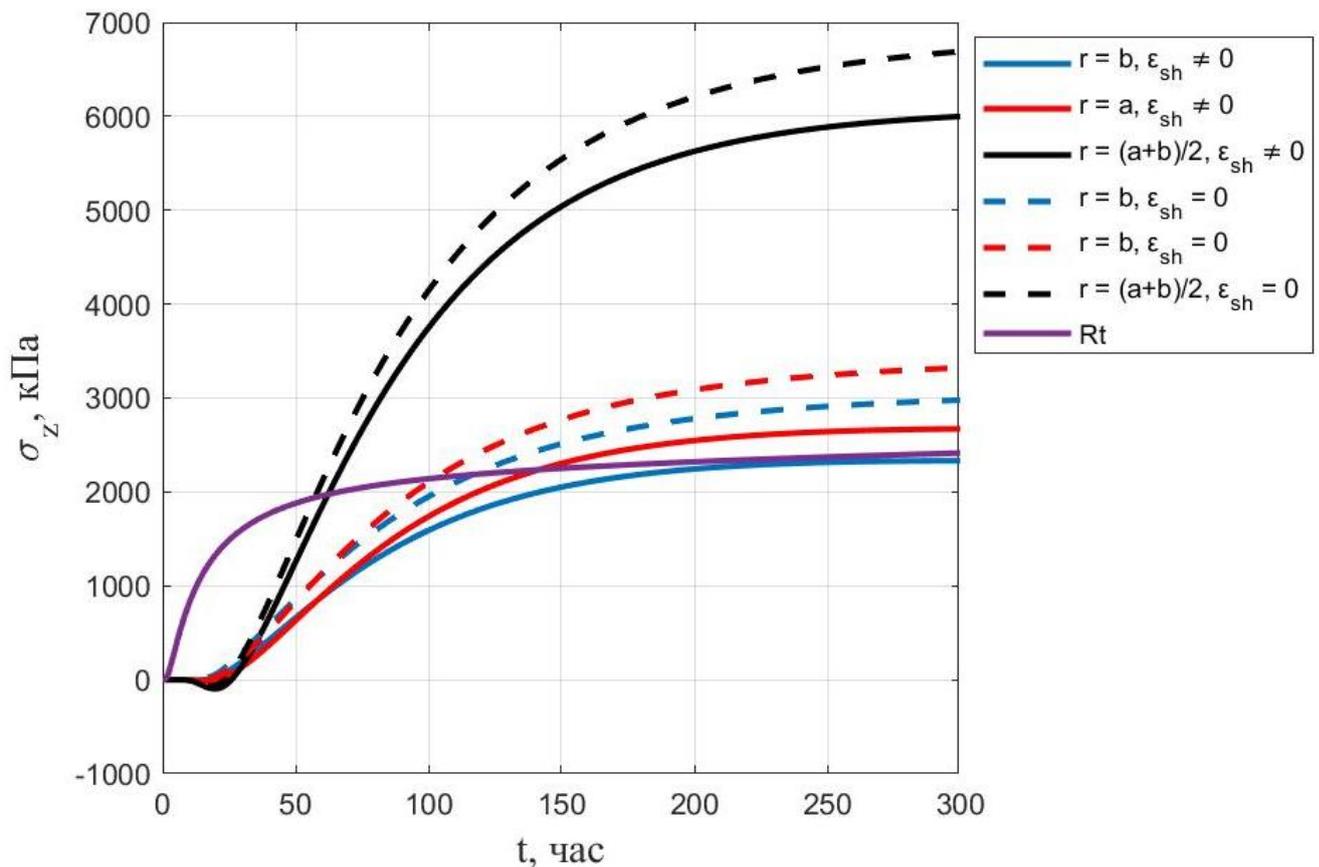


Рис. 3.4 – Изменение во времени напряжений σ_z

Из рис. 3.4 видно, что напряжения σ_z могут существенно превышать прочность бетона на растяжение. Однако представленное решение справедливо только для бесконечно длинного цилиндра, а для цилиндра конечной длины истинные значения напряжения σ_z можно определить только путем моделирования в двумерной постановке. При учете усадки напряжения σ_z несколько снижаются.

Это можно объяснить тем, что усадочные деформации частично компенсируют деформации температурного расширения.

Радиальные напряжения в рассмотренной задаче малы по сравнению с напряжениями σ_θ и σ_z . Эпюры остаточных напряжений σ_r при $t = 300$ ч для случаев ПДС и ПНС приведены на рис. 3.5.

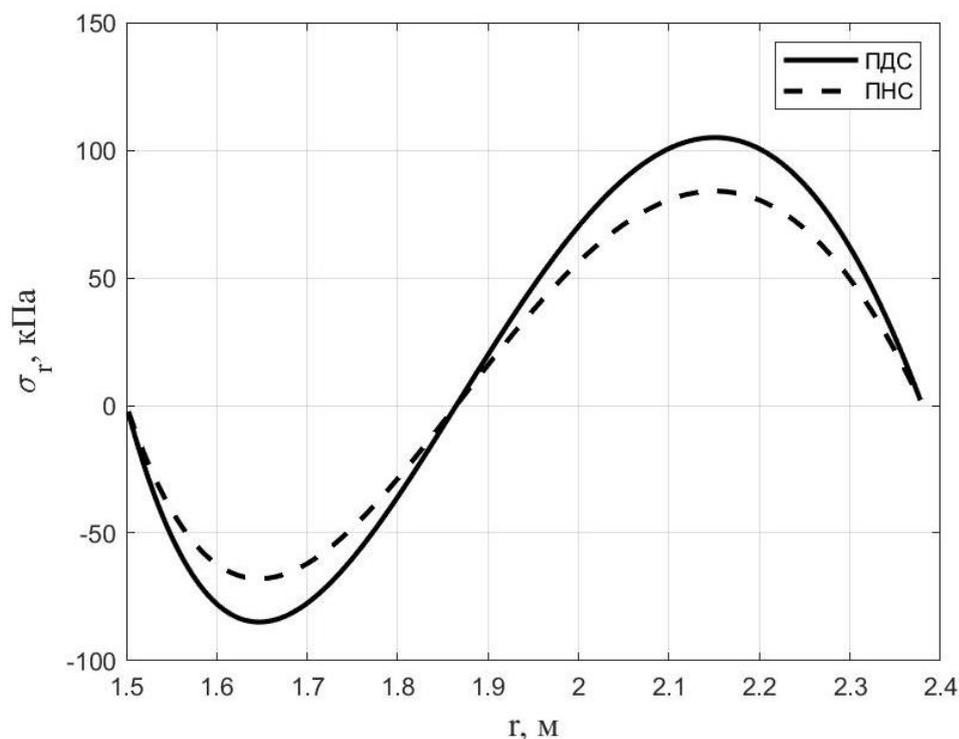


Рис. 3.5 – Эпюры остаточных напряжений σ_r

3.4 Определение температурных напряжений в трехслойной цилиндрической оболочке в процессе возведения

При устройстве сухих защит реакторов могут применяться трехслойные цилиндрические оболочки, представляющие из себя стальные баки, заполненные бетоном (рис. 3.6). В силу относительно небольшой толщины стальных слоев, они не будут оказывать существенного влияния на распределение температурных полей в бетонной части конструкции, но могут существенно повлиять на ее напряженно-деформированное состояние.

При расчете трехслойной цилиндрической оболочки будем считать, что толщина стальных слоев мала по сравнению с общей толщиной конструкции, и для них можно воспользоваться теорией тонких оболочек.



Рис. 3.6 – Трехслойная сухая защита реактора в процессе возведения [100]

Окружные напряжения во внутреннем слое стали на основе уравнения Лапласа можно записать в виде:

$$\sigma_{s\theta}^a = -\frac{p_a \cdot a}{\delta_a}, \quad (3.23)$$

где p_a – контактное давление между внутренним стальным слоем и бетоном, δ_a – толщина внутреннего стального слоя.

Формула (3.23) справедлива только при наличии контакта между бетоном и сталью, т.е. контактное давление p_a должно быть положительным. Величина p_a связана с радиальным напряжением в бетоне при $r = a$ следующим образом:

$$p_a = -\sigma_r|_{r=a}. \quad (3.24)$$

Для наружного стального слоя окружные напряжения примут вид:

$$\sigma_{s\theta}^b = \frac{p_b \cdot b}{\delta_b}, \quad (3.25)$$

где $p_b = -\sigma_r|_{r=b}$.

Представленные в формуле (3.25) обозначения аналогичны обозначениям, приведенным в (3.23).

Окружные деформации стали для случая плоского напряженного состояния запишутся в виде:

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{\sigma_{s\theta}}{E_s} + \alpha_s \Delta T. \quad (3.26)$$

В случае плоского деформированного состояния деформации $\varepsilon_{s\theta}$ запишутся в виде:

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{E_s} (\sigma_{s\theta} - \nu_s \sigma_{sz}) + \alpha_s \Delta T. \quad (3.27)$$

В то же время в случае ПДС должны отсутствовать деформации стали по z :

$$\varepsilon_{sz} = \frac{1}{E_s} (\sigma_{sz} - \nu_s \sigma_{s\theta}) + \alpha_s \Delta T = 0. \quad (3.28)$$

Выражая из (3.28) величину σ_{sz} через $\sigma_{s\theta}$ и подставляя в (3.27), получим:

$$\varepsilon_{s\theta} = \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \sigma_{s\theta} + (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T. \quad (3.29)$$

При положительном контактном давлении между бетоном и сталью должно обеспечиваться равенство их радиальных перемещений на стыке, а значит и окружных деформаций. Окружные деформации бетона в случае ПНС запишутся в виде:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r) + \alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}. \quad (3.30)$$

А в случае ПДС:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E_1} (\sigma_{\theta} - \nu_1 \sigma_r) + (1 + \nu) (\alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}), \quad (3.31)$$

где $E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$

Приравнивая окружные деформации бетона и стали при $r = a$ с учетом (3.4) получим для ПДС следующее граничное условие:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \left(a \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r (1 - \nu_1) \right) - \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \frac{\sigma_r \cdot a}{\delta_a} = \\ = (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T - (1 + \nu) (\alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Аналогично для ПНС:

$$\frac{1}{E} \left(a \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1 - \nu) \right) - \frac{1}{E_s} \frac{\sigma_r \cdot a}{\delta_a} = \alpha_s \Delta T - (\alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}) \quad (3.33)$$

При $r = b$ граничное условие в случае ПДС примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \left(b \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1 - \nu_1) \right) + \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \frac{\sigma_r \cdot b}{\delta_b} = \\ = (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T - (1 + \nu) (\alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

И в случае ПНС соответственно:

$$\frac{1}{E} \left(b \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r(1 - \nu) \right) + \frac{1}{E_s} \frac{\sigma_r \cdot b}{\delta_b} = \alpha_s \Delta T - (\alpha \Delta T + \varepsilon_{sh}). \quad (3.35)$$

При использовании для расчета дифференциального уравнения (3.6) в приращениях напряжений граничные условия (3.32)-(3.35) также следует записать в приращениях, заменив σ_r на $\Delta\sigma_r$, а ε_{sh} на $\Delta\varepsilon_{sh}$. Изменение температуры ΔT при этом должно вычисляться как разница между температурой в точке на текущем и предыдущем шаге по времени.

Расчет на каждом шаге по времени выполняется в два этапа. На первом этапе считается, что совместная работа бетона и стали обеспечивается как для внутренней, так и для внешней поверхности бетонного ядра. Определяются радиальные напряжения при $r = a$ и $r = b$, и если на какой-либо из поверхностей после суммирования приращений напряжений с напряжениями из предыдущего шага они становятся положительными, граничные условия заменяются на

$$\sigma_r|_{r=a(r=b)} = 0, \quad (3.36)$$

после чего выполняется перерасчет.

Аппроксимация производных напряжения σ_r в выражениях (3.32)-(3.35) выполняется аналогично аппроксимации производных температуры по формуле (2.6).

При решении задачи методом конечных элементов тонкие стальные оболочки могут быть замоделированы одноузловыми КЭ. Рассмотрим сначала случай плоского деформированного состояния. Потенциальная энергия деформации одноузлового КЭ запишется в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{s\theta} \varepsilon_{s\theta}^{el} + \sigma_{sz} \varepsilon_{sz}^{el}) dV. \quad (3.37)$$

Здесь индексами «*el*» обозначены упругие деформации, представляющие разность между полными и температурными деформациями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s\theta}^{el} &= \varepsilon_{s\theta} - \alpha_s \Delta T = \frac{u_i}{r_i} - \alpha_s \Delta T; \\ \varepsilon_{sz}^{el} &= \varepsilon_{sz} - \alpha_s \Delta T = -\alpha_s \Delta T, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где u_i – перемещение одноузлового КЭ, r_i – расстояние от оси симметрии до узла, где расположен КЭ.

Для получения вклада одноузлового КЭ в матрицу жесткости и вектор нагрузки выразим напряжения через деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{s\theta} &= \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} (\varepsilon_{s\theta} - (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T) = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\frac{u_i}{r_i} - (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T \right); \\ \sigma_{sz} &= \nu_s \sigma_{s\theta} - E_s \alpha_s \Delta T = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\nu_s \frac{u_i}{r_i} - \nu_s (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T - (1 - \nu_s^2) \alpha_s \Delta T \right) \\ &= \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \left(\nu_s \frac{u_i}{r_i} - (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Подставив (3.39) в (3.37), с учетом того, что $dV = 2\pi r_i \delta_i$, где δ_i – толщина стальной оболочки, получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \cdot 2\pi r_i \delta_i \left(\frac{u_i^2}{r_i^2} - 2(1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T \frac{u_i}{r_i} + 2(1 + \nu_s) (\alpha_s \Delta T)^2 \right). \quad (3.40)$$

Далее нужно применить вариационный принцип Лагранжа и минимизировать потенциальную энергию деформации по узловому перемещению:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0: \quad \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \cdot 2\pi \delta_i \cdot \frac{u_i}{r_i} - \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} (1 + \nu_s) \alpha_s \Delta T \cdot 2\pi \delta_i = 0. \quad (3.41)$$

Множитель при u_i будет представлять вклад одноузлового КЭ в общую матрицу жесткости конструкции:

$$K_i = \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \cdot \frac{2\pi \delta_i}{r_i}. \quad (3.42)$$

Свободный член в (3.41) будет представлять вклад температурных деформаций одноузлового КЭ в вектор нагрузки:

$$F_i = \frac{E_s}{1 - \nu_s} \alpha_s \Delta T \cdot 2\pi \delta_i. \quad (3.43)$$

Аналогичные выкладки могут быть проделаны и для плоского напряженного состояния. В этом случае:

$$K_i = E_s \cdot \frac{2\pi \delta_i}{r_i}; \quad (3.44)$$

$$F_i = E_s \alpha_s \Delta T \cdot 2\pi \delta_i.$$

Приведем пример расчета при $a = 2,905$ м, $b = 3,63$ м, $\delta_a = \delta_b = 20$ мм. Указанные размеры соответствуют реальной конструкции сухой защиты реактора ВВЭР [101]. Температуру окружающей среды и коэффициенты теплоотдачи примем такими же, как в параграфе 2.2 ($T_\infty = 20$ °С, $h = 10$ Вт/(м² · К)). Класс бетона примем В45 с $R_{28} = 57$ МПа. Соответствующие параметры функции тепловыделения в случае быстротвердеющего бетона (2.20): $Q_{28} = 190$ МДж/м³, $k = 0,14$, $x = 0,5$. Коэффициент температурного расширения стали $\alpha_s = 1,25 \cdot 10^{-5}$ 1/°С, $E_s = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_s = 0,3$.

На рис. 3.7 приведены графики изменения во времени максимальной температуры, а также температуры у внутренней и внешней поверхности. Рис. 3.8 показывает изменение во времени радиальных напряжений при $r = a$ и $r = b$ для случая плоского деформированного состояния. Из данного рисунка видно, что на внешней поверхности контакт существует на небольшом временном промежутке, когда наблюдается наиболее интенсивный рост температуры, и далее бетонное ядро и внешняя оболочка перестают работать совместно. У внутренней поверхности радиальные напряжения по абсолютному значению с течением времени возрастают. Объяснить это можно тем, что вследствие деформаций усадки бетонное ядро стремится обжать внутреннюю стальную оболочку.

На рис. 3.9 представлены графики изменения во времени окружных напряжений у внутренней и внешней поверхности, а также в середине толщи. Штриховыми линиями показано решение при отсутствии стальных оболочек. Характер кривых в целом такой же, как и на рис. 3.3.

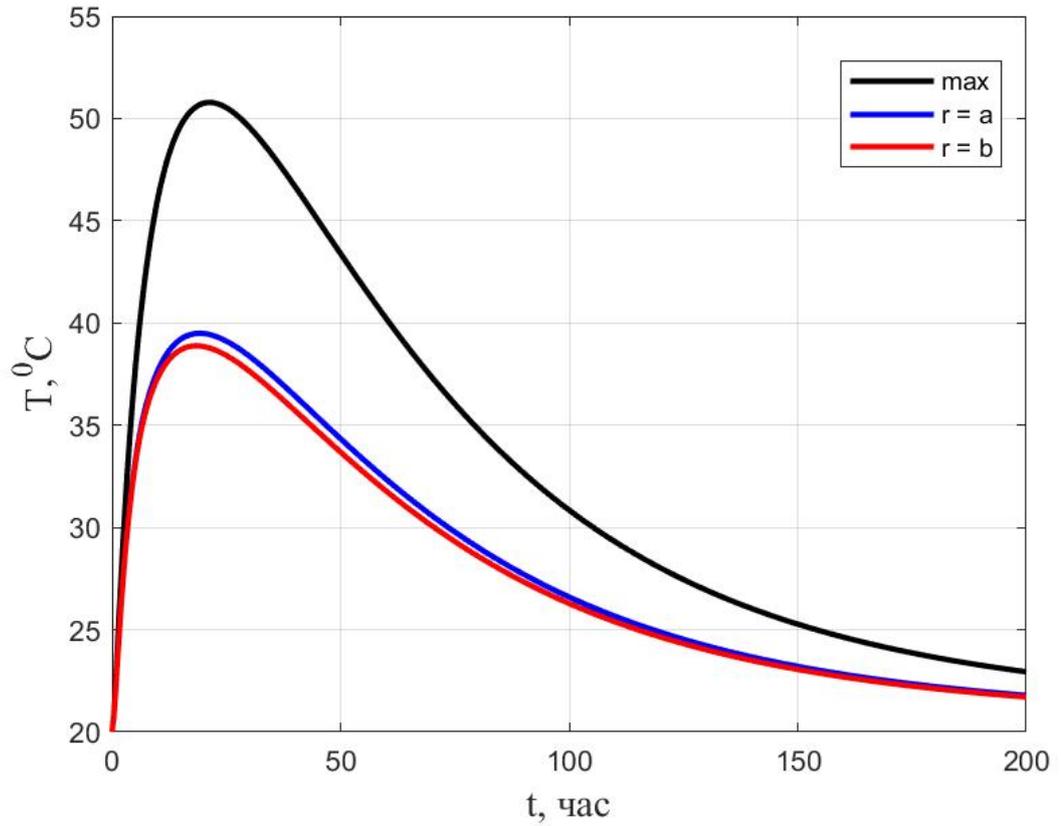


Рис. 3.7 – Изменение во времени температур в цилиндре

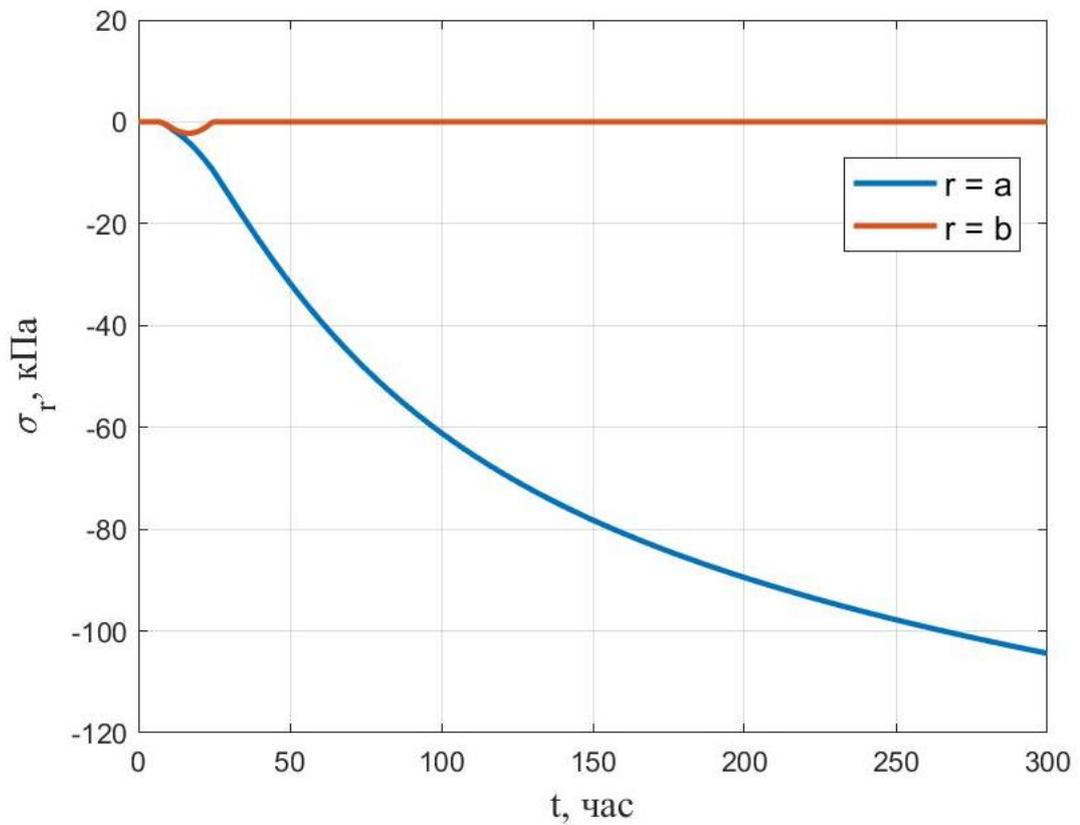


Рис. 3.8 – Изменение во времени радиальных напряжений у внутренней и внешней поверхности в случае ПДС

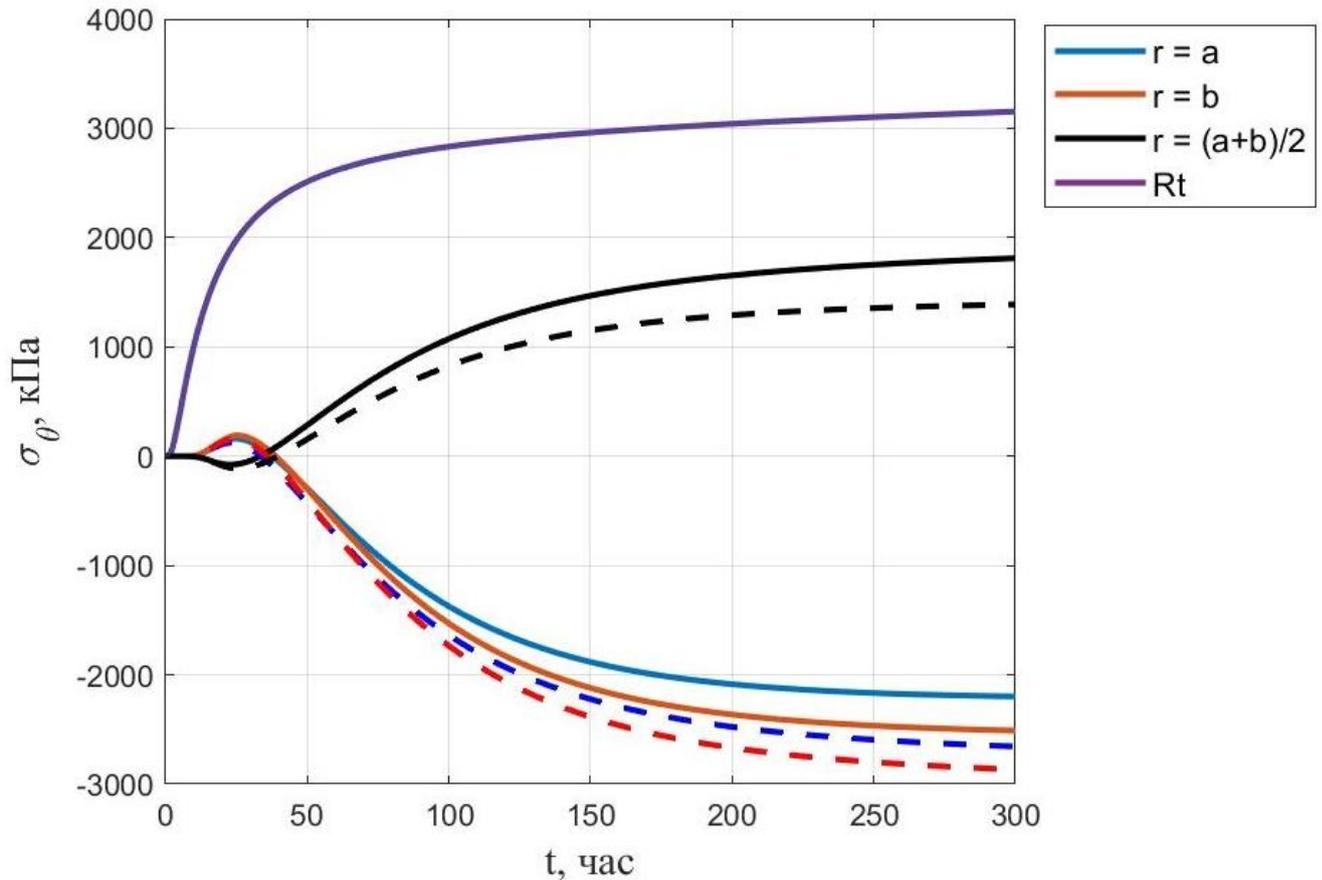


Рис. 3.9 – Изменение во времени окружных напряжений в случае ПДС (штриховые линии – решение без учета стальных оболочек)

Наличие внутреннего и наружного стального слоя приводит к уменьшению по абсолютной величине остаточных напряжений σ_θ у внутренней поверхности, однако возрастают окружные напряжения в середине толщи. На напряжения σ_z в бетоне в случае ПДС наличие стальных оболочек влияния не оказывает. Графики их изменения во времени приведены на рис. 3.10. Здесь, как и в задаче, рассмотренной в параграфе 3.3, напряжения по z с определенного момента времени превышают прочность бетона на растяжение.

В случае ПНС остаточные напряжения σ_θ , как и для однослойной конструкции, оказываются немного ниже, чем при ПДС. Эпюры остаточных напряжений σ_θ в бетоне для трехслойной оболочки при $t = 300$ ч в случае ПДС и ПНС приведены на рис. 3.11. Для сравнения также приведены эпюры остаточных напряжений σ_r на рис. 3.12.

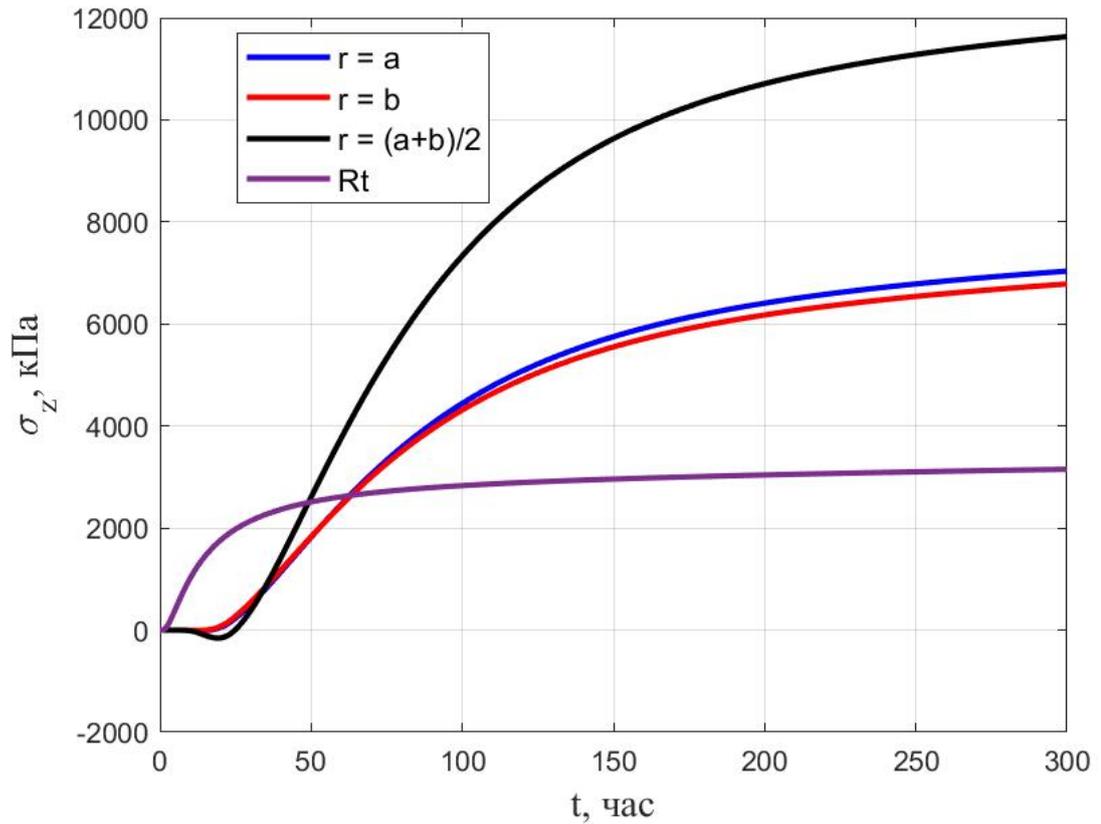


Рис. 3.10 – Изменение во времени напряжений σ_z в случае ПДС

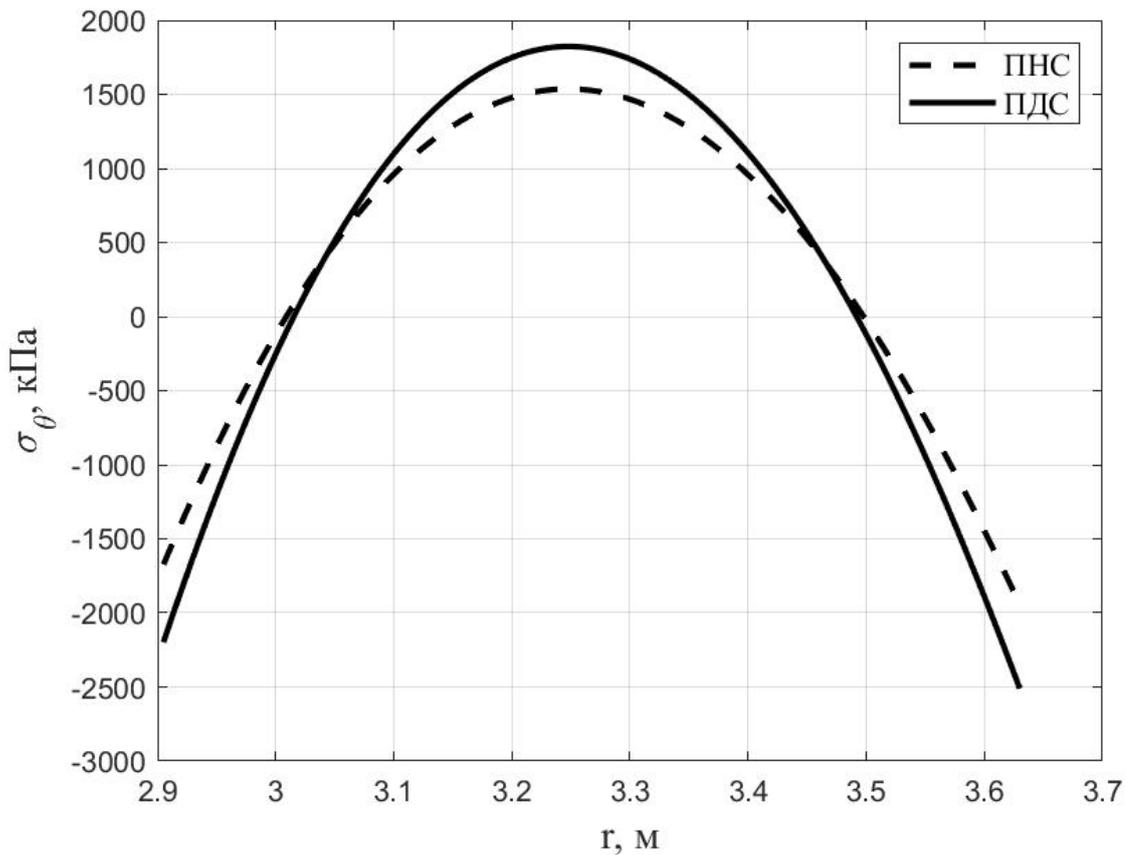


Рис. 3.11 – Эпюры остаточных напряжений σ_θ в бетоне при $t = 300$ ч для трехслойной оболочки в случае ПДС и ПНС

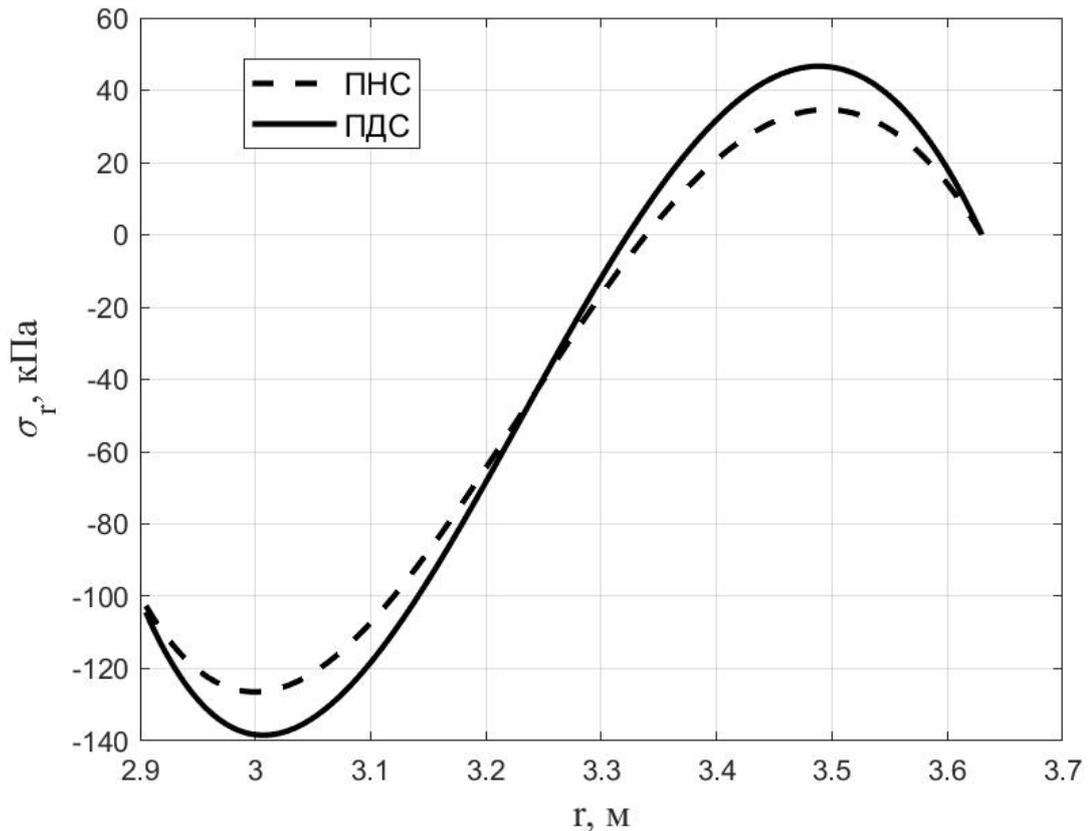


Рис. 3.12 – Эпюры остаточных напряжений σ_r в бетоне при $t = 300$ ч для трехслойной оболочки в случае ПДС и ПНС

Отметим, что характер эпюры остаточных напряжений σ_θ на рис. 3.11 зеркален представленному на рис 1.1 характеру эпюры напряжений в стадии разогрева конструкции.

3.5 Выводы по главе

Разработана методика определения напряженно-деформированного состояния в однослойных и трехслойных толстостенных цилиндрических оболочках при возведении на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов в одномерной осесимметричной постановке (плоское напряженное состояние и плоское деформированное состояние) с учетом неоднородности, вызванной зависимостью механических характеристик бетона от степени его зрелости.

Для подтверждения достоверности результатов выполнено сравнение с решением в программном комплексе ANSYS при постоянном во времени и по

радиусу модуле упругости бетона. Установлено, что при учете зависимости модуля упругости бетона от времени картина напряженно-деформированного состояния меняется кардинально, и в конструкции после полного остывания имеют место остаточные напряжения.

ГЛАВА 4. ДВУМЕРНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО МАССИВНЫХ МОНОЛИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ВОЗВЕДЕНИЯ

4.1 Методика расчета

При решении осесимметричных задач в двумерной постановке нами будут использоваться треугольные конечные элементы, которые ранее применялись для расчета температурного поля (рис. 2.9). Вектор узловых перемещений для данного КЭ при расчете напряженно-деформированного состояния включает для каждого узла линейные перемещения по r и по z :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_k \\ w_k \end{Bmatrix}. \quad (4.1)$$

Вектор напряжений $\{\sigma\}$ и вектор полных деформаций $\{\varepsilon\}$ в случае осесимметричной задачи включают 4 составляющие:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (4.2)$$

Связь между приращениями напряжений и приращениями деформаций с учетом температурных воздействий и усадки бетона записывается в виде:

$$\{\Delta\sigma\} = [D](\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\varepsilon_B\}), \quad (4.3)$$

где $[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix},$

$$\{\Delta\varepsilon_B\} = (\alpha\Delta T + \Delta\varepsilon_{sh}) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для перемещений u и w принимается стандартная аппроксимация:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ u_j \\ w_j \\ u_k \\ w_k \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

где L_1, L_2, L_3 – L -координаты.

Полные деформации связаны с перемещениями соотношением:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} = [B]\{U\}, \quad (4.5)$$

$$\text{где } [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ 2A\frac{L_1}{r} & 0 & 2A\frac{L_2}{r} & 0 & 2A\frac{L_3}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}.$$

Как и в случае одномерной задачи, решение при наличии вынужденных деформаций сводится к системе уравнений (3.14). Матрица жесткости элемента и вклад температурных деформаций, а также деформаций усадки в вектор нагрузки определяются соотношениями (3.15).

Некоторые элементы матрицы $[B]$ включают член $1/r$, поэтому аналитическое интегрирование выражений (3.15) по площади треугольника связано с большими трудностями. Вместо аналитического вычисления матрицы $[K]$ и вектора $\{\Delta F_B\}$ может быть применено численное интегрирование, либо матрицу жесткости и вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки можно

определить приближенно, вычислив матрицу $[B]$ в центре тяжести конечного элемента:

$$\begin{aligned} [\bar{K}^{(e)}] &= 2\pi[\bar{B}]^T[D][\bar{B}]\bar{r}A; \\ \{\Delta F_B^{(e)}\} &= 2\pi[\bar{B}]^T[D]\{\Delta\varepsilon_B\}\bar{r}A, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\text{где } \bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}, [\bar{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ 2A & 0 & 2A & 0 & 2A & 0 \\ \frac{3\bar{r}}{3\bar{r}} & 0 & \frac{3\bar{r}}{3\bar{r}} & 0 & \frac{3\bar{r}}{3\bar{r}} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}.$$

Нами в расчетах будут использованы формулы (4.6).

4.2 Расчет толстостенной цилиндрической оболочки в двумерной постановке

Первым этапом для контроля достоверности результатов был выполнен расчет напряженно-деформированного состояния конструкции, для которой было определено температурное поле в параграфе 2.3, при постоянном во времени модуле упругости бетона $E = 3 \cdot 10^4$ МПа и отсутствии усадки с последующим сравнением результатов с программным комплексом ANSYS. При расчете фундаментная плита, на которой расположена оболочка, принималась закрепленной снизу от перемещений по z (рис. 4.1). В радиальном направлении перемещения фундаментной плиты не ограничивались. Цилиндрическая оболочка считалась жестко соединенной с фундаментной плитой. В ANSYS моделирование выполнялось при помощи четырехугольных квадратичных КЭ PLANE183 с размером стороны 5 см. При расчете по авторской методике в связи с более низкими аппроксимационными свойствами треугольных КЭ окончательный размер стороны элемента был принят равным 3 см.

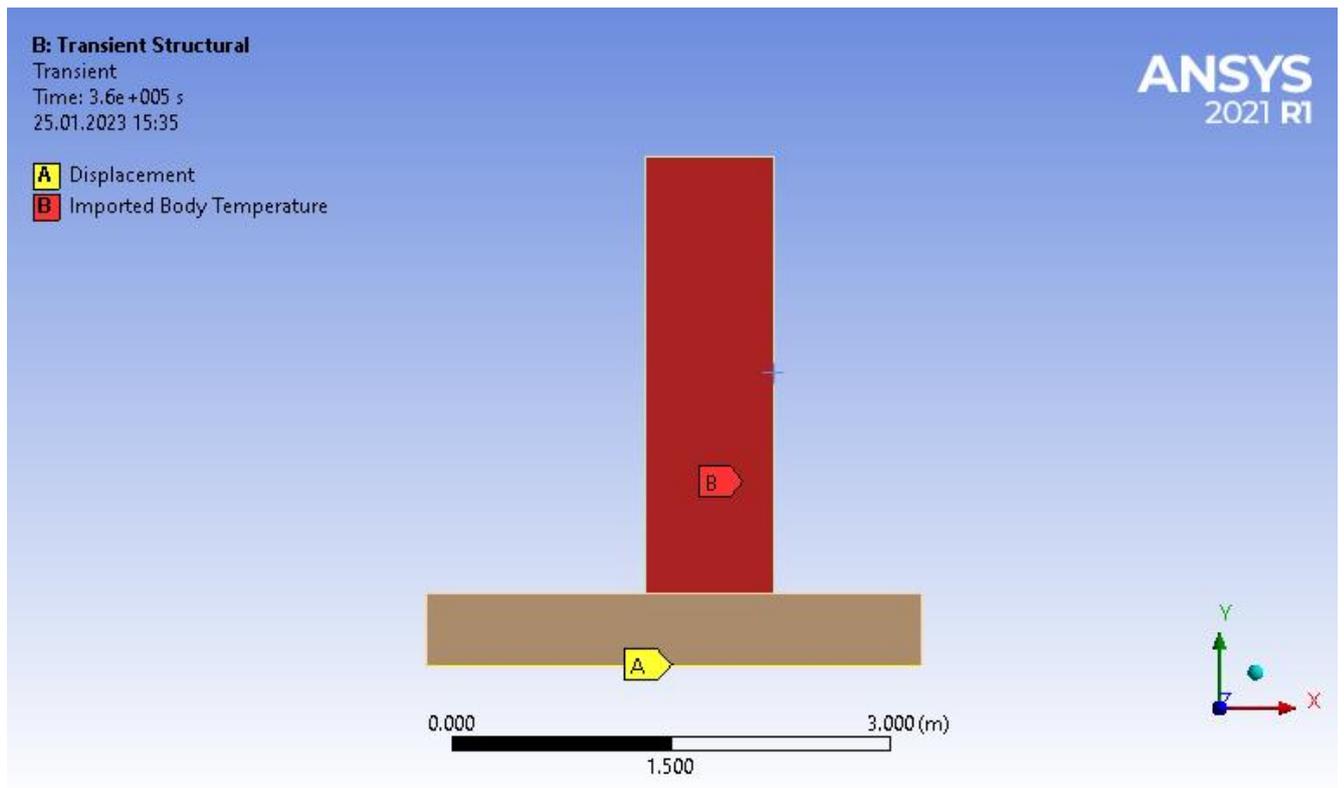


Рис. 4.1 – Граничные условия в ANSYS

На рис. 4.2 приведен график изменения во времени максимальных окружных напряжений σ_θ а также напряжений σ_θ при $r = b = 2,38$ м и $z = H/2 = 1,5$ м. Сплошным линиям соответствует решение по авторской методике, а штриховым – в ANSYS. По максимальным напряжениям разница составляет 4,96%, а в среднем сечении результаты отличаются незначительно. Отклонение по максимальным значениям можно объяснить тем, что напряжения σ_θ достигают максимума при $r = a$ на верхнем торце (рис. 4.3), где могут иметь место краевые эффекты. Также расхождение может быть связано с различием типов используемых КЭ.

Характер кривой $\sigma_\theta(t)$ при $r = b$ и $z = H/2$ повторяет характер кривых, представленных на рис. 3.2, но при расчете в двумерной постановке напряжения σ_θ оказываются несколько ниже, чем в случае ПДС.

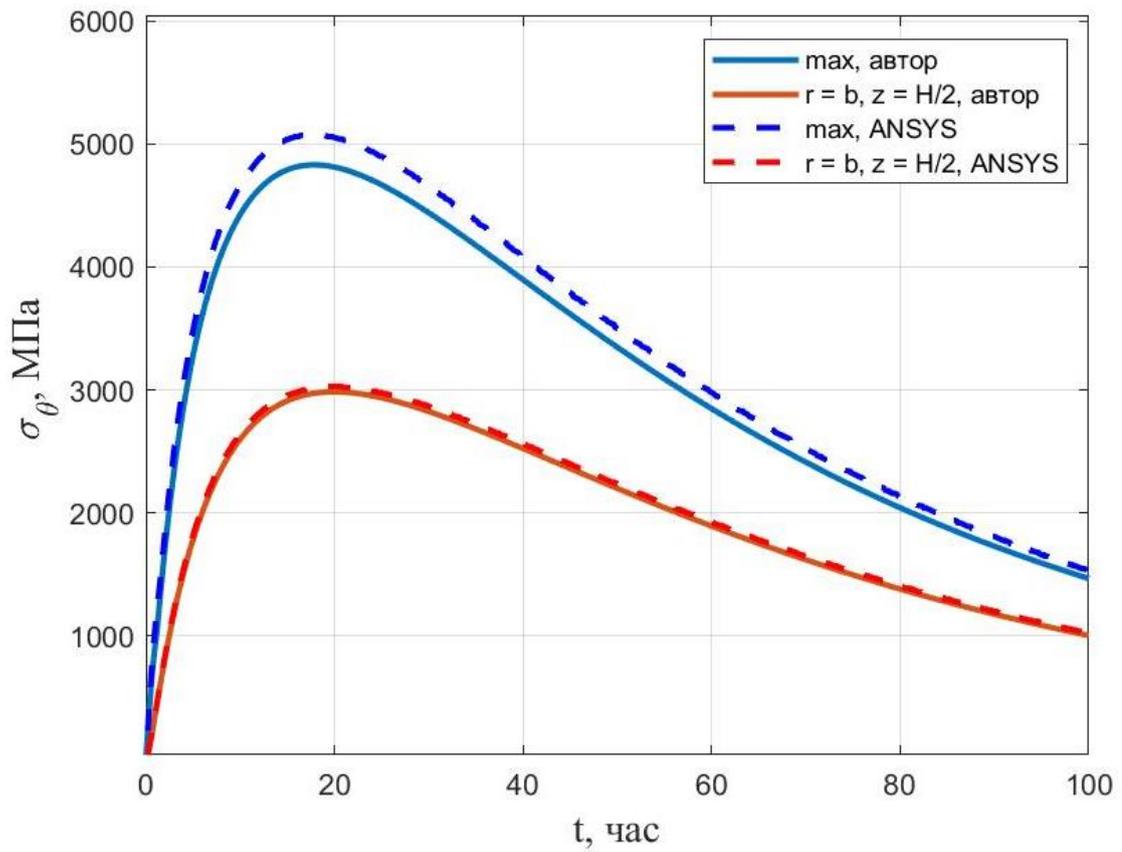


Рис. 4.2 – Изменение во времени напряжений σ_θ

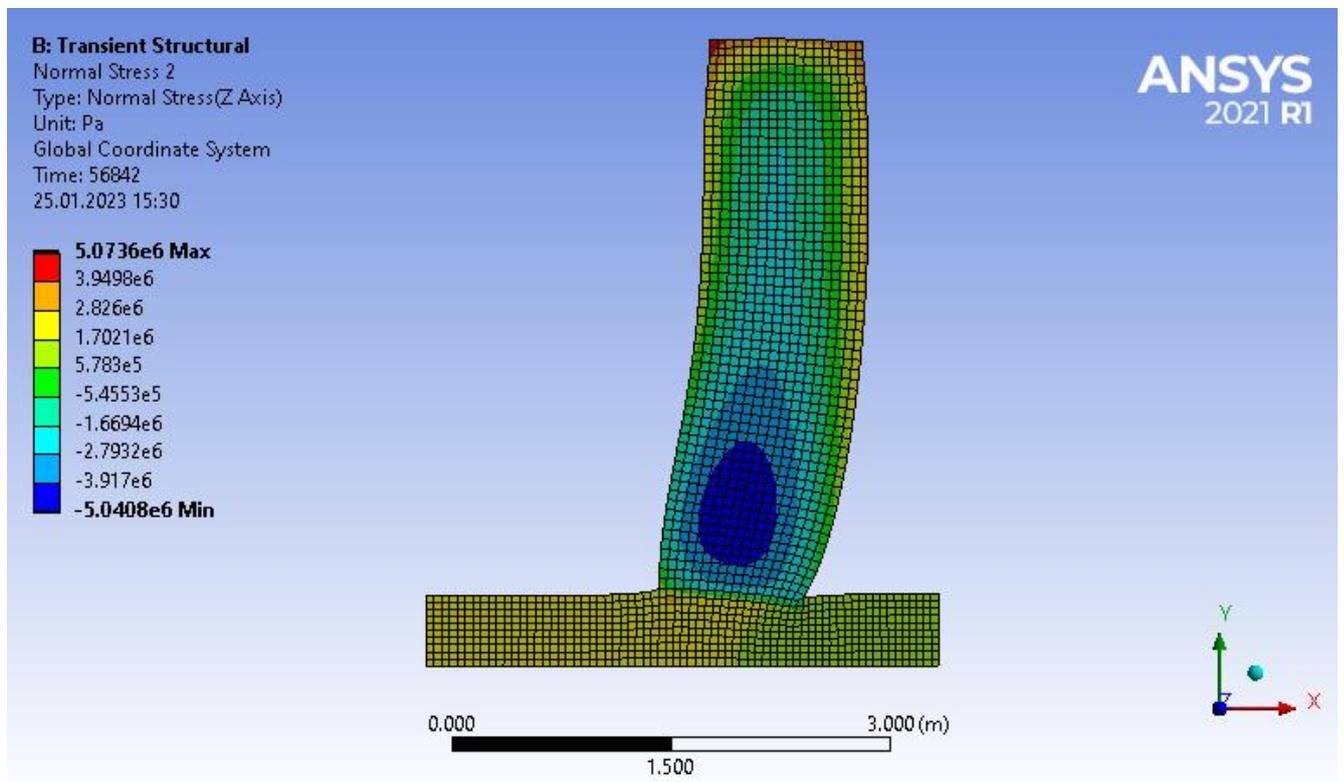


Рис. 4.3 – Изополя напряжений σ_θ (Па) в ANSYS

При расчете с учетом зависимости физико-механических характеристик от времени бетон был принят классом В25, как для оболочки, так и для фундамента. Фундамент считался выполненным из старого бетона, модуль упругости которого принимался постоянным и равным $3 \cdot 10^4$ МПа, а деформации усадки считались равными нулю. При учете изменения модуля упругости бетона во времени для возводимой толстостенной оболочки наблюдалась более быстрая сходимость по максимальным напряжениям при сгущении сетки КЭ, и окончательный размер стороны элемента был принят равным 8 см.

На рис. 4.4 представлены графики изменения во времени максимальных окружных напряжений в цилиндрической оболочке. Сплошной линии соответствует глобальный максимум, штриховой – максимум в сечении $z = 0$, штрихпунктирной – в сечении $z = H/2$. Из рис. 4.4 видно, что характер кривой при $z = H/2$ близок к решению в одномерной постановке для случая ПДС (рис. 3.3, черная линия). Однако данное сечение является не самым опасным.

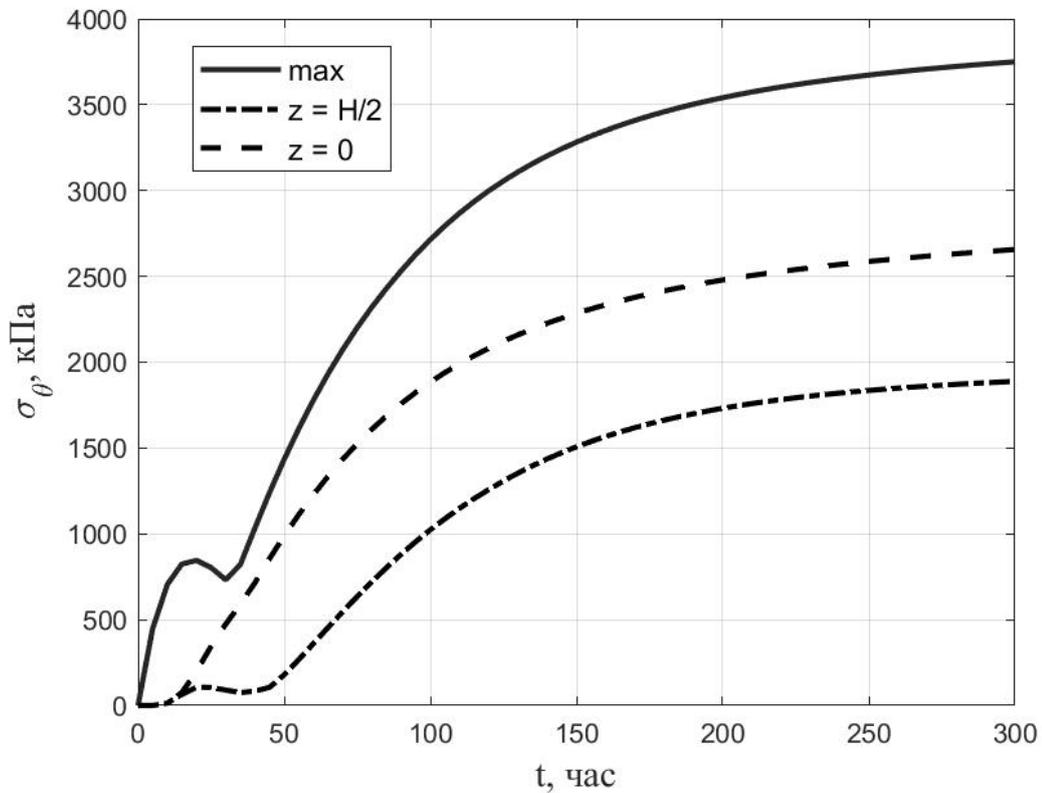


Рис. 4.4 – Изменение во времени максимальных окружных напряжений в цилиндрической оболочке

Распределение остаточных напряжений σ_θ в зависимости от r и z при $t = 300$ ч приведено на рис. 4.5. Среднее значение прочности бетона при растяжении в этом возрасте составляет 1,49 МПа. Таким образом при рассмотренных условиях возможно образование технологических трещин в конструкции, которые в дальнейшем могут сказаться на ее эксплуатационных характеристиках, либо вообще поставить под вопрос возможность ее использования.

Аналогичные графики для напряжений σ_r и σ_z приведены на рис. 4.6 - рис. 4.9. Из рис. 4.7 и рис. 4.9 видно, что максимальные растягивающие напряжения σ_r и σ_z возникают на стыке оболочки и фундамента при $r = b$. В этом месте возможен отрыв оболочки от фундамента. В среднем сечении при расчете в двумерной постановке напряжения σ_z оказываются существенно ниже, чем в случае ПДС.

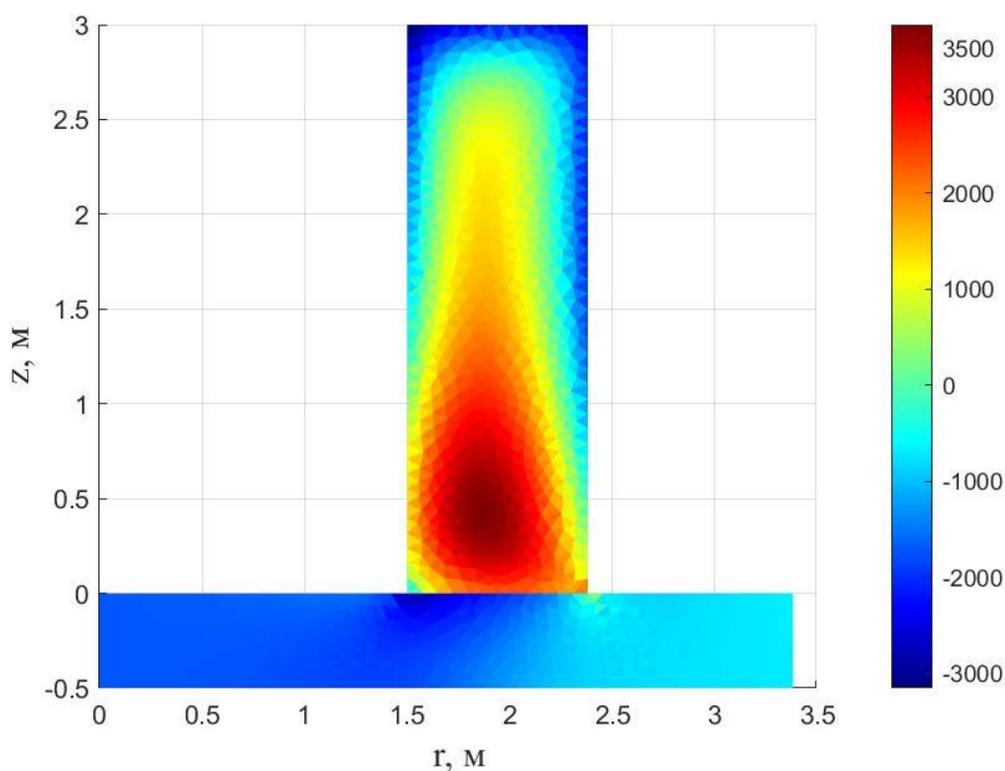


Рис. 4.5 – Распределение напряжений σ_θ (кПа) в зависимости от r и z при $t = 300$ ч

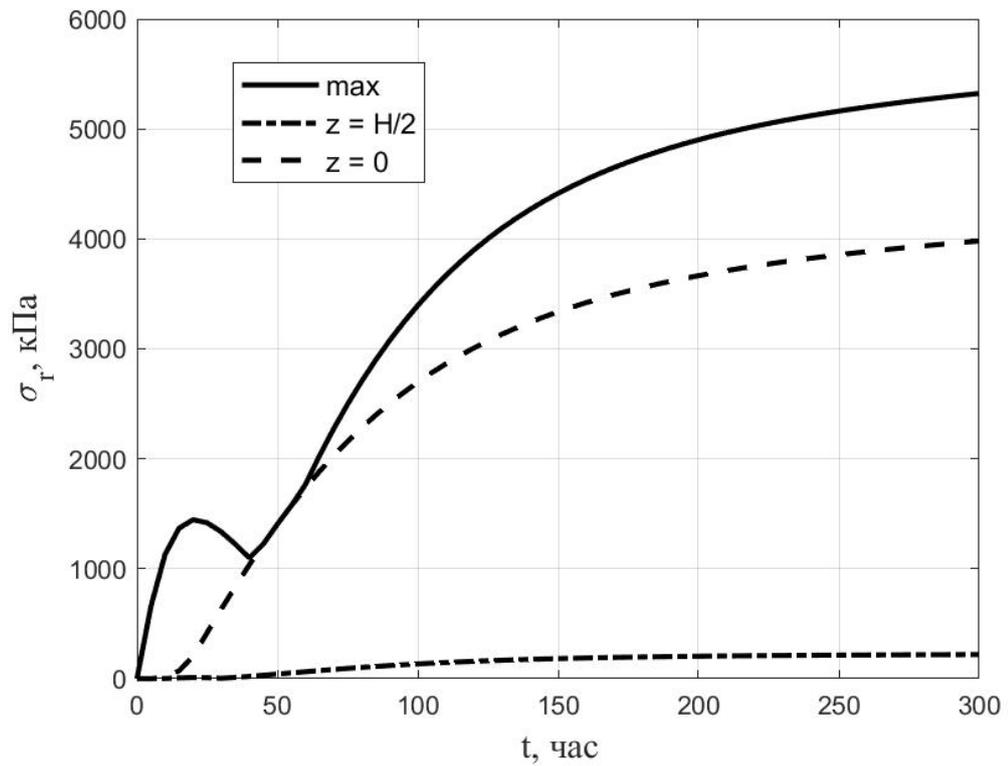


Рис. 4.6 – Изменение во времени максимальных радиальных напряжений в цилиндрической оболочке

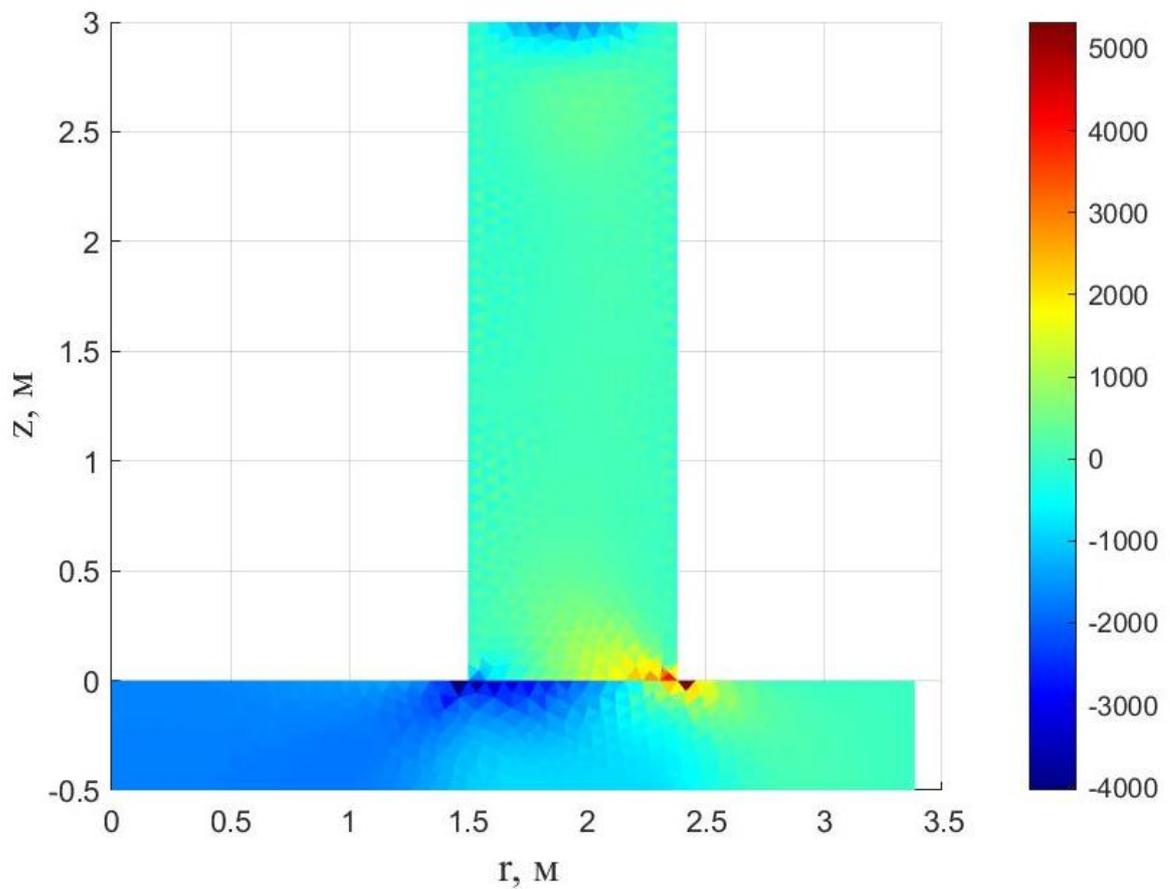


Рис. 4.7 – Распределение напряжений σ_r (кПа) в зависимости от r и z при $t = 300$ ч

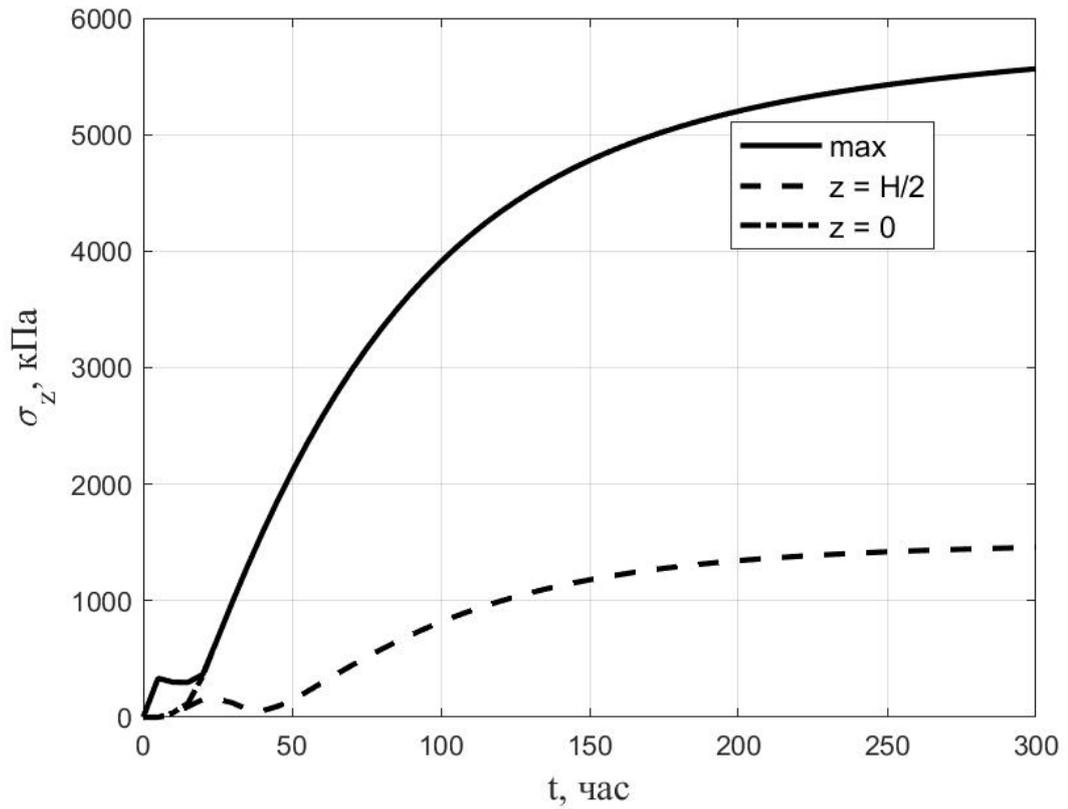


Рис. 4.8 – Изменение во времени максимальных напряжений σ_z в цилиндрической оболочке

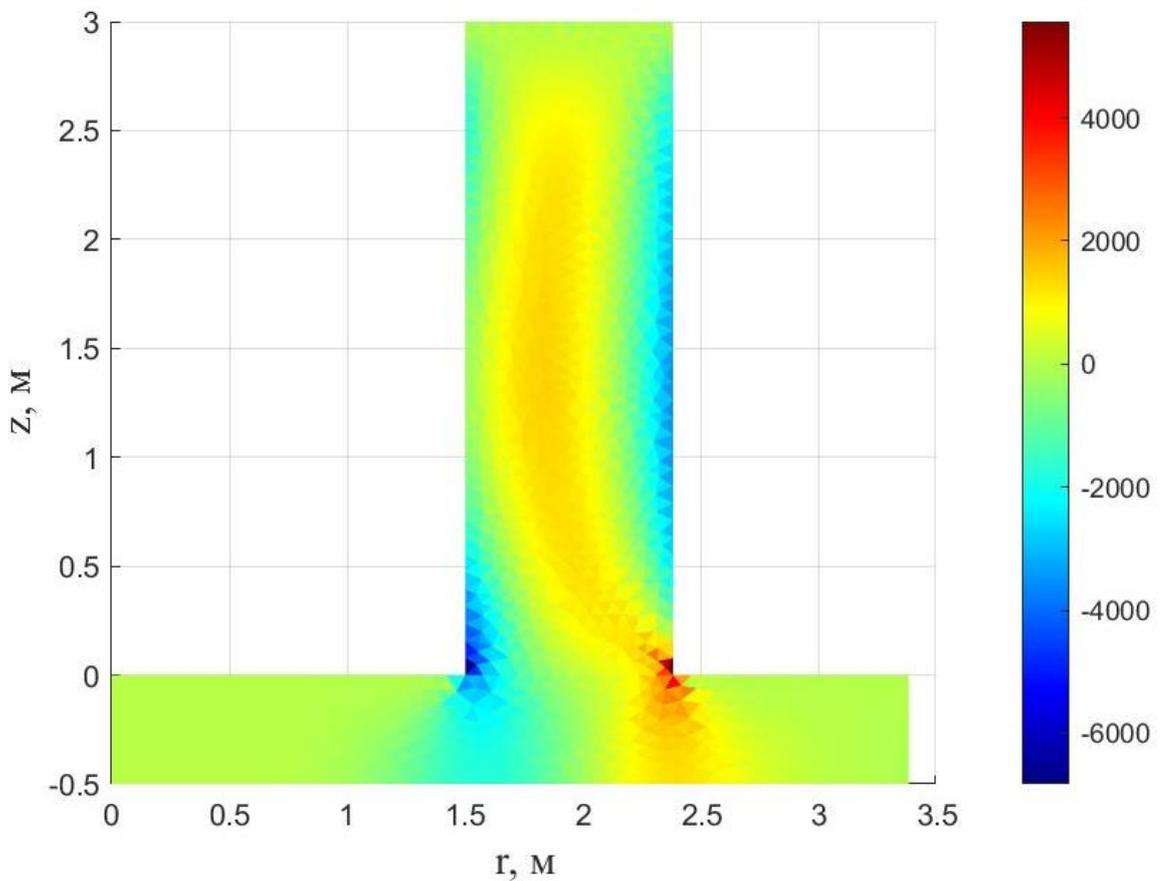


Рис. 4.9 – Распределение напряжений σ_z (кПа) в зависимости от r и z при $t = 300$ ч

Также для сравнения был выполнен расчет для медленнотвердеющего бетона. Функция тепловыделения задавалась уравнением (2.20) при $k = 0,26$, $x = 0,7$, $Q_{28} = 130 \text{ МДж/м}^3$. График удельной мощности тепловыделения $W(t)$ приведен на рис. 4.10.

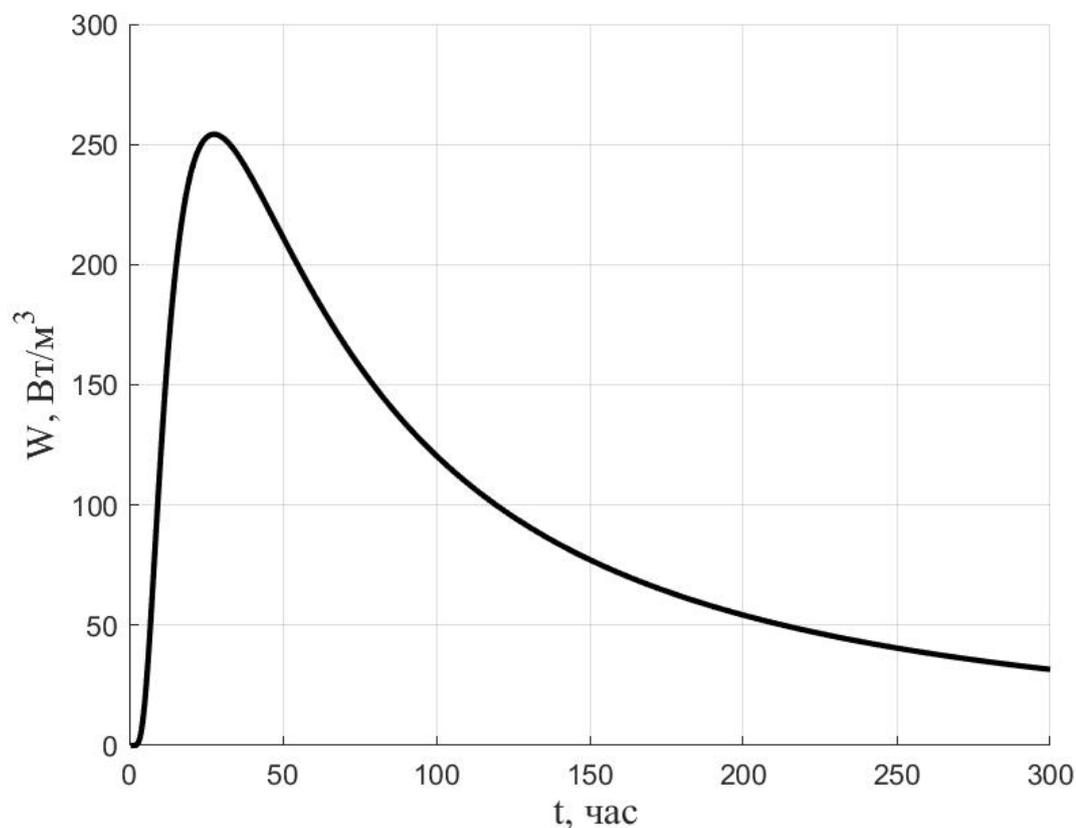


Рис. 4.10 – График мощности тепловыделения медленнотвердеющего бетона

На рис. 4.11 представлены полученные в результате расчета графики изменения во времени температур в различных точках. Из данного рисунка видно, что в случае медленнотвердеющего бетона максимальный перепад между центром и поверхностью конструкции заметно ниже, чем в случае быстротвердеющего.

Снижение перепада температур «центр-поверхность» приводит к заметному снижению максимальных напряжений. На рис. 4.12 приведен график изменения во времени максимального значения окружных напряжений при использовании медленнотвердеющего бетона. Штриховой линией показано значение текущей прочности на растяжение. Из данного графика видно, что максимальные напряжения σ_{θ} не превышают величину R_t . Таким образом, одним из способов

снижения риска трещинообразования в процессе возведения может выступать замедление тепловыделения бетона.

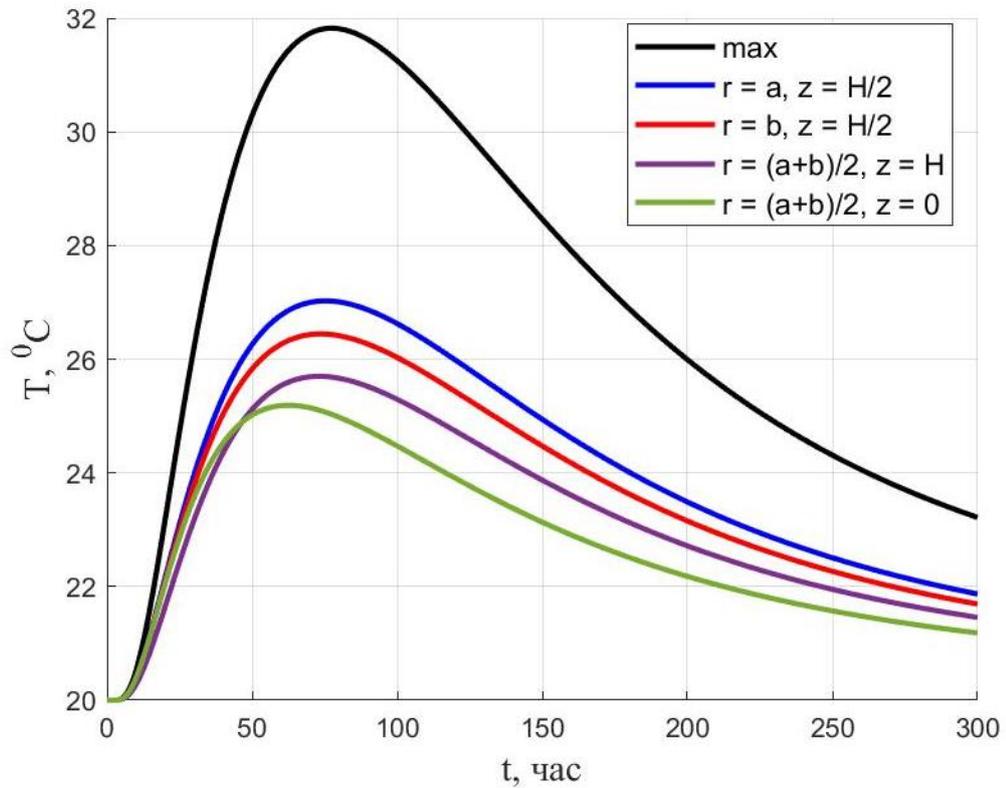


Рис. 4.11 – Изменение во времени температур в различных точках цилиндра

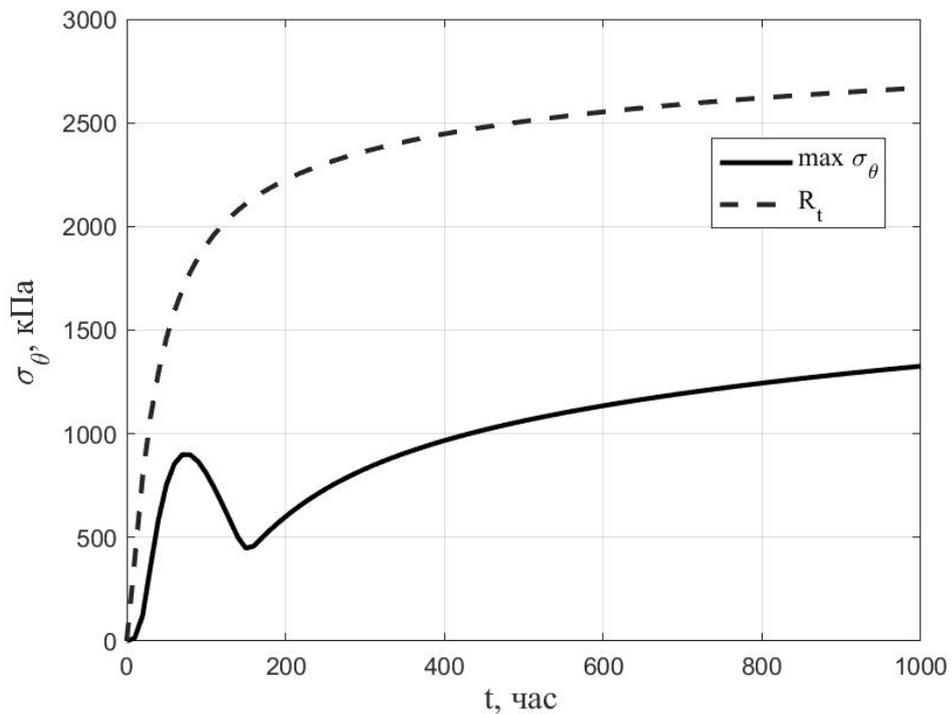


Рис. 4.12 – Изменение во времени кольцевых напряжений в случае использования медленноотвердеющего бетона

Максимальные напряжения σ_z при использовании медленноотвердеющего бетона также заметно снижаются, что показывает рис. 4.13, однако в момент времени 60 ч могут достигать текущей прочности бетона на растяжение. Распределение напряжений $\sigma_z(r, z)$ в данный момент времени приведено на рис. 4.14. Из данного графика видно, что максимум напряжений, как и в случае конструкции из быстроотвердеющего бетона, наблюдается на стыке оболочки с фундаментом.

На рис. 4.15 приведен график изменения во времени наибольшего значения радиального напряжения. Максимальные значения напряжений σ_r за время 1000 ч не превышают текущую прочность бетона на растяжение. Распределение напряжений σ_r в зависимости от r и z при $t = 1000$ ч показано на рис. 4.16. Максимум напряжений σ_r , как и для напряжений σ_z , наблюдается на стыке между цилиндром и фундаментом.

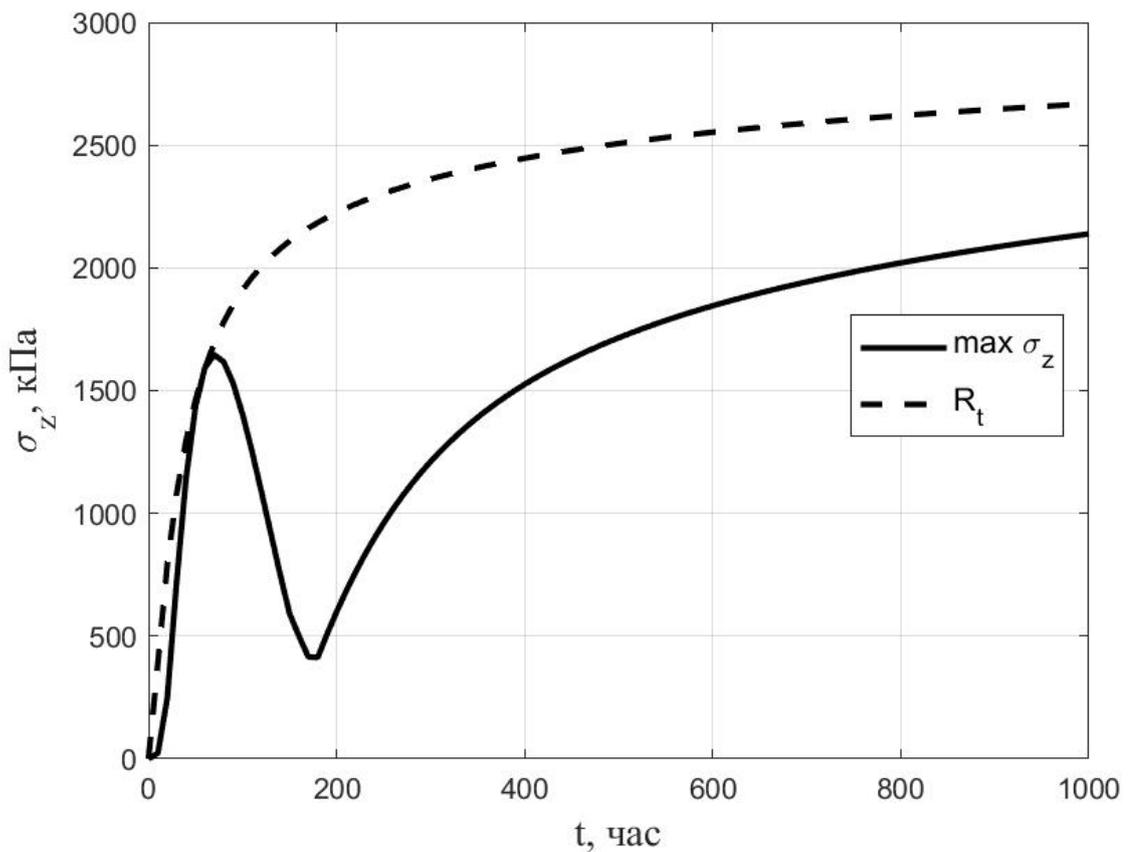


Рис. 4.13 – Изменение во времени максимальных напряжений σ_z

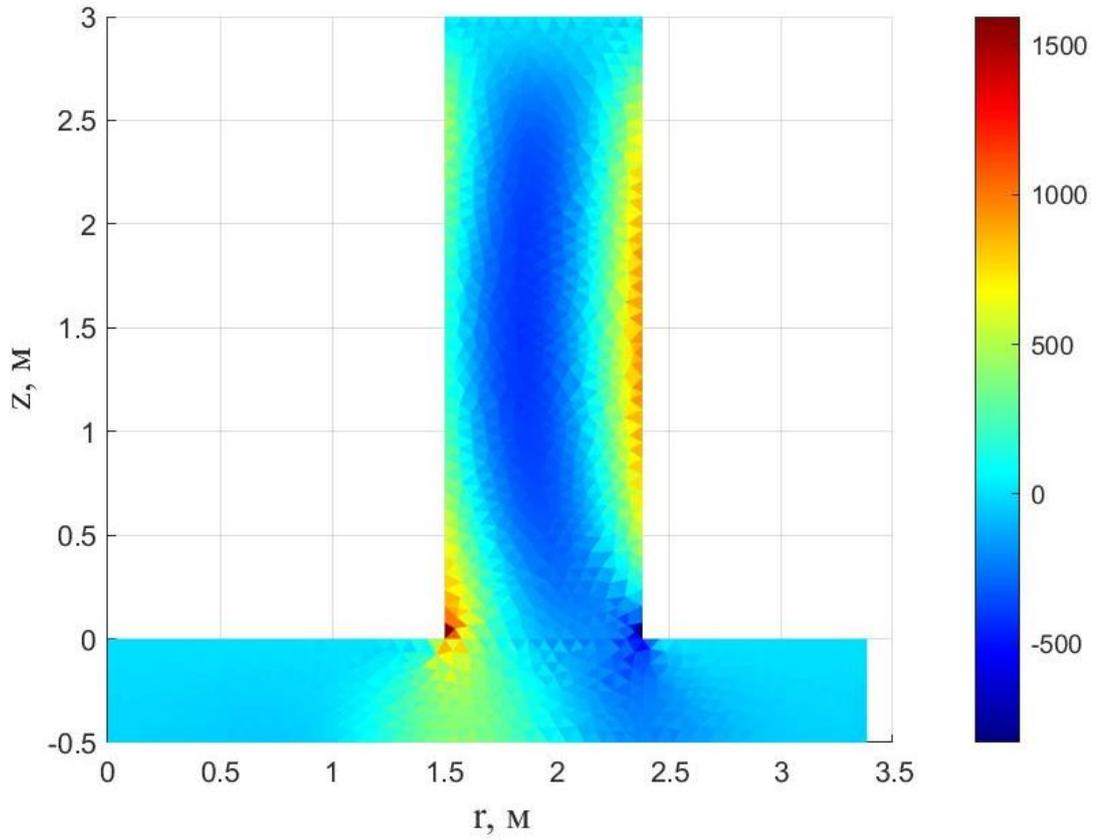


Рис. 4.14 – Распределение напряжений σ_z (кПа) в зависимости от r и z при $t = 60$ ч

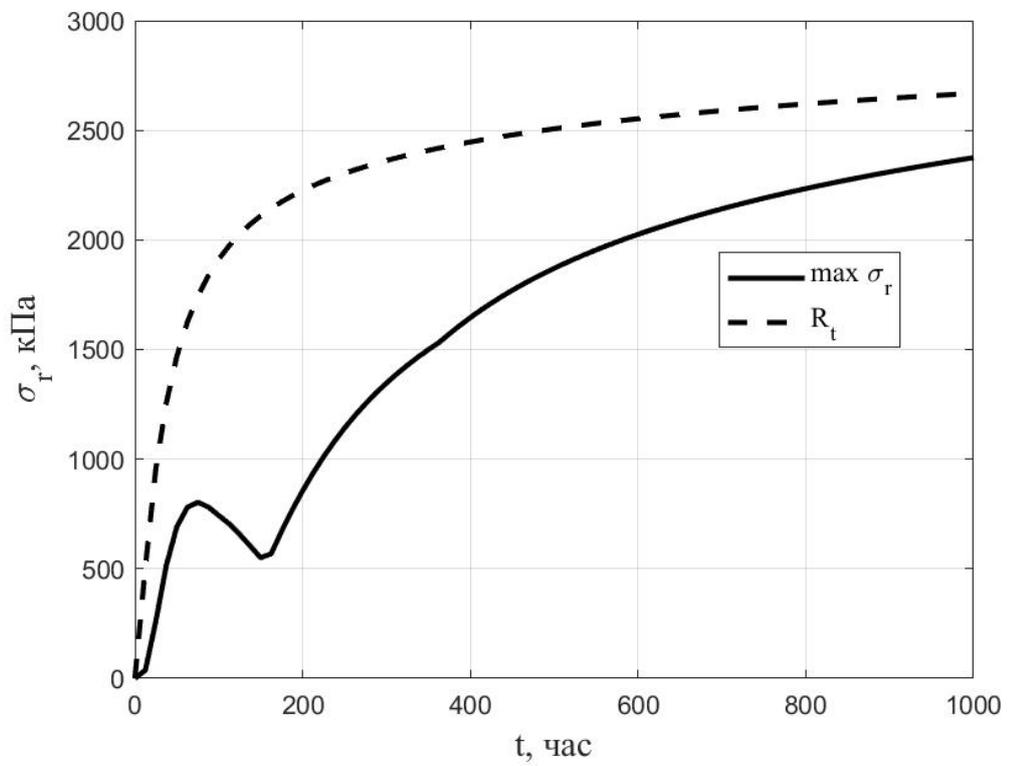


Рис. 4.15 – Изменение во времени максимального значения радиального напряжения

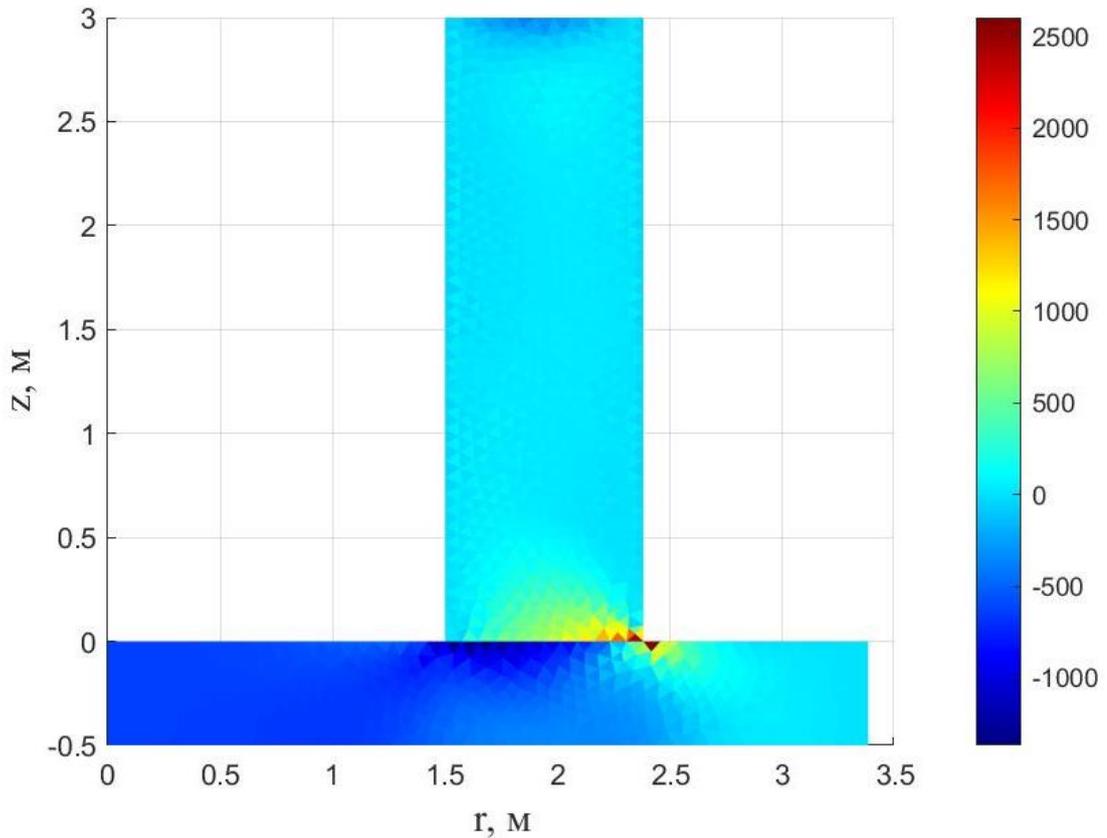


Рис. 4.16 – Распределение напряжений σ_r (кПа) в зависимости от r и z при $t = 1000$ ч

Помимо случая жесткого соединения оболочки с фундаментом был рассмотрен случай, когда точки нижнего торца цилиндра могут свободно смещаться относительно фундамента в радиальном направлении, но исключено их перемещение по z . При этом теплообмен между оболочкой и фундаментом возможен. В таком случае все составляющие тензора напряжений заметно снижаются и не превышают прочности бетона на растяжение. Графики изменения во времени максимальных величин напряжений σ_r , σ_θ , σ_z приведены на рис. 4.17.

На рис. 4.18 показано распределение напряжений σ_θ при $t = 80$ ч, когда они достигают максимума. Рис. 4.19 и рис. 4.20 – то же для напряжений σ_z при $t = 90$ ч и σ_r при $t = 70$ ч.

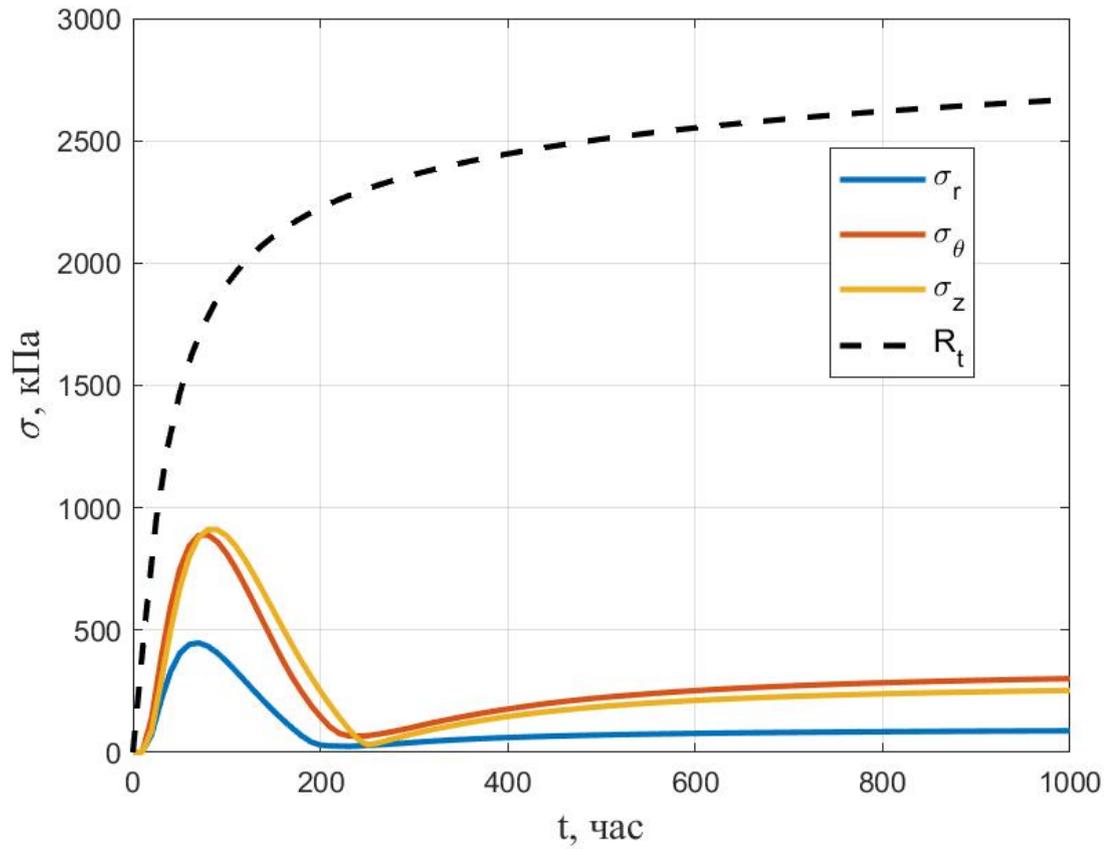


Рис. 4.17 – Изменение во времени максимальных величин напряжений σ_r , σ_θ , σ_z при возможности свободного смещения точек нижнего торца цилиндра по r

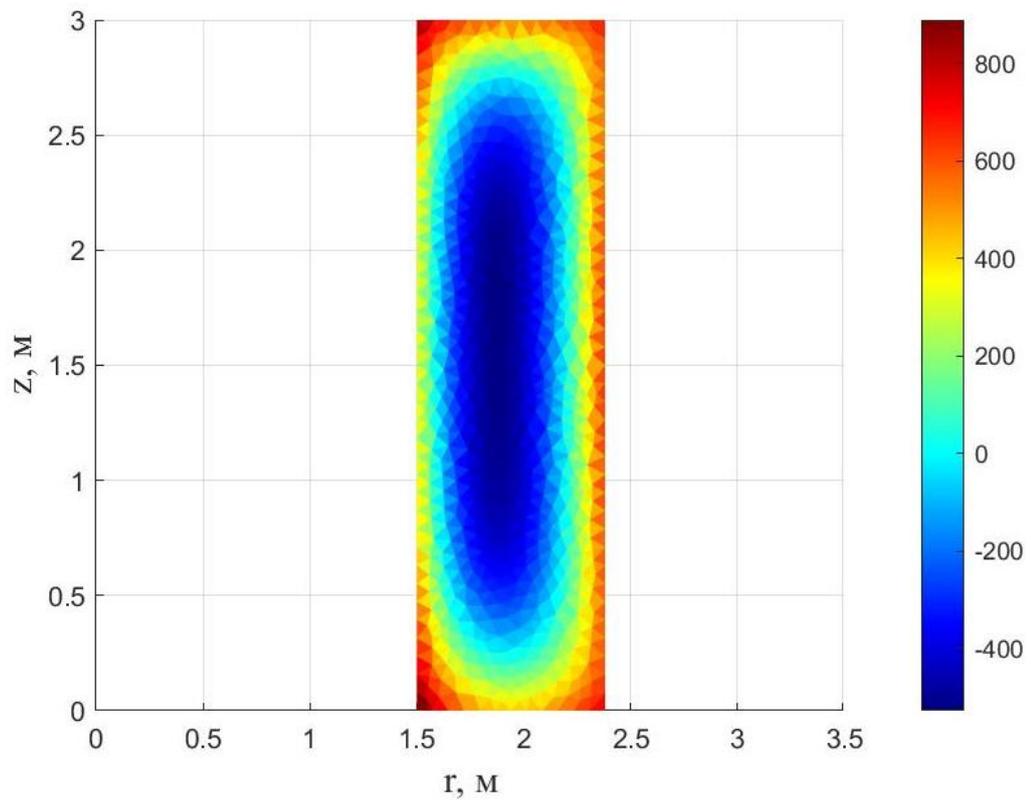


Рис. 4.18 – Распределение напряжений σ_θ (кПа) при $t = 80$ ч

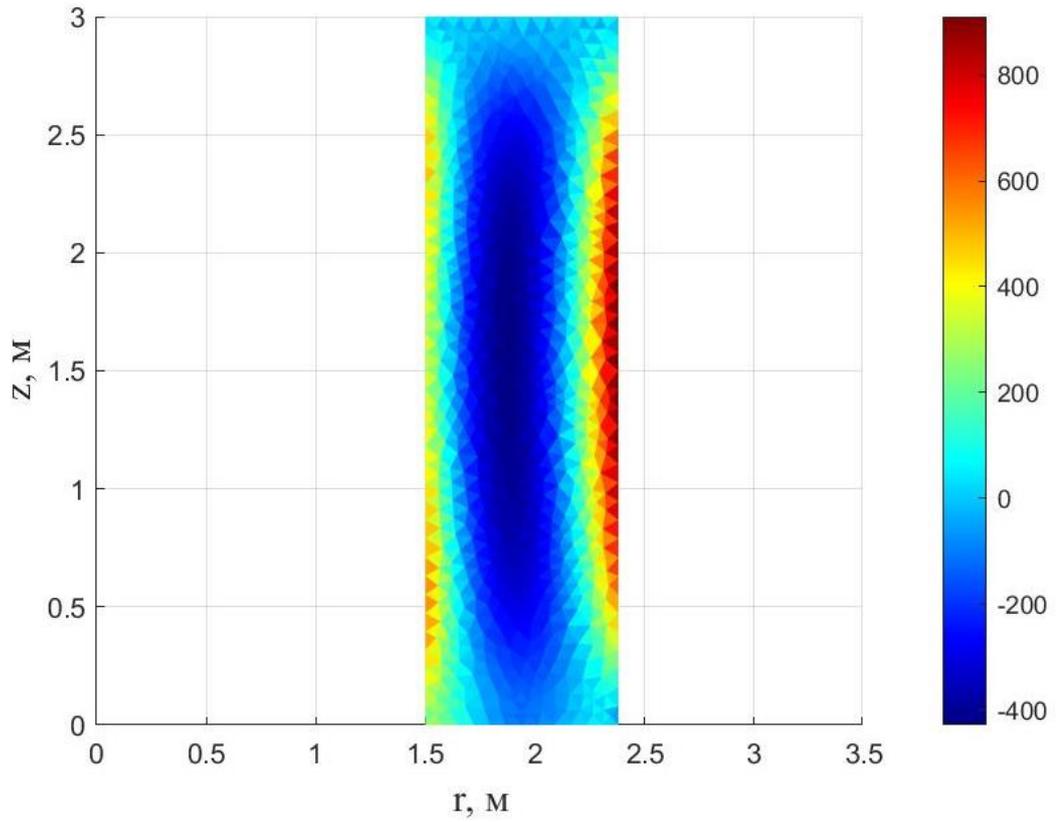


Рис. 4.19 – Распределение напряжений σ_z (кПа) при $t = 90$ ч

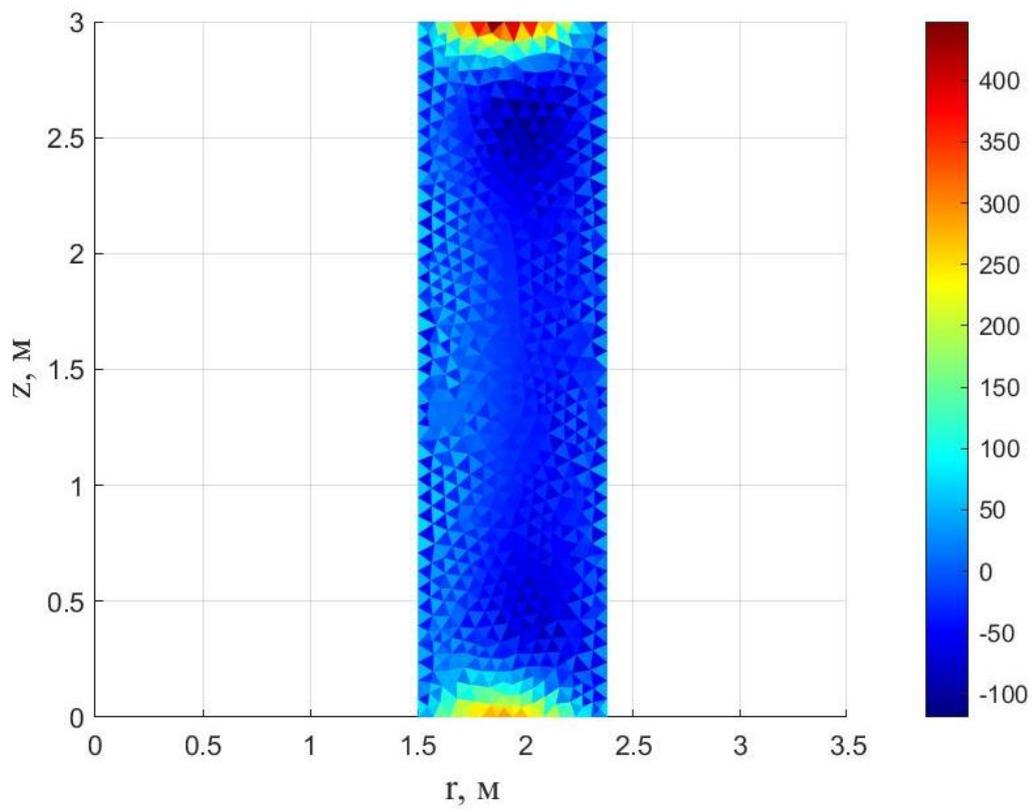


Рис. 4.20 – Распределение напряжений σ_r (кПа) при $t = 70$ ч

4.3 Анализ влияния стадийности возведения на напряженно-деформированное состояние

Для анализа влияния стадийности изготовления конструкции на ее напряженно-деформированное состояние был выполнен расчет толстостенной оболочки, температурное поле в которой ранее было определено в параграфе 2.4. Матрица жесткости прямоугольного осесимметричного КЭ, а также вклад вынужденных деформаций в вектор нагрузки были вычислены точно путем символического интегрирования выражений (3.15) в среде MATLAB. Матрица $[K^{(e)}]$ прямоугольного осесимметричного КЭ здесь не приводится ввиду ее громоздкости, а вектор $\{\Delta F_B\}$ имеет вид:

$$\{\Delta F_B\} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(r_1 + r_2)(z_1 - z_3)}{4} & \frac{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}{4} & 0 & \frac{(r_1 - r_2)(2r_1 + r_2)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{(r_1 - r_2)(2r_1 + r_2)}{6} & \frac{(r_1 + r_2)(z_1 - z_3)}{4} \\ \frac{(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)}{4} & \frac{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}{4} & 0 & \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)}{6} & \frac{(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)}{4} \\ \frac{(r_1 + r_2)(z_1 - z_3)}{4} & \frac{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}{4} & 0 & \frac{(r_2 - r_1)(2r_1 + r_2)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{(r_2 - r_1)(2r_1 + r_2)}{6} & \frac{(r_1 + r_2)(z_1 - z_3)}{4} \\ \frac{(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)}{4} & \frac{(r_1 - r_2)(z_1 - z_3)}{4} & 0 & \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + 2r_2)}{6} \\ 0 & 0 & \frac{(r_2 - r_1)(r_1 + 2r_2)}{6} & \frac{(r_1 + r_2)(z_3 - z_1)}{4} \end{bmatrix} \cdot [D] \cdot \{\Delta \varepsilon_B\}, \quad (4.7)$$

На рис. 4.21 представлены графики изменения во времени максимальных значений напряжений σ_θ при различной продолжительности перерывов между укладкой слоев. Из представленных графиков видно, что влияние технологических перерывов на величину максимальных напряжений незначительно.

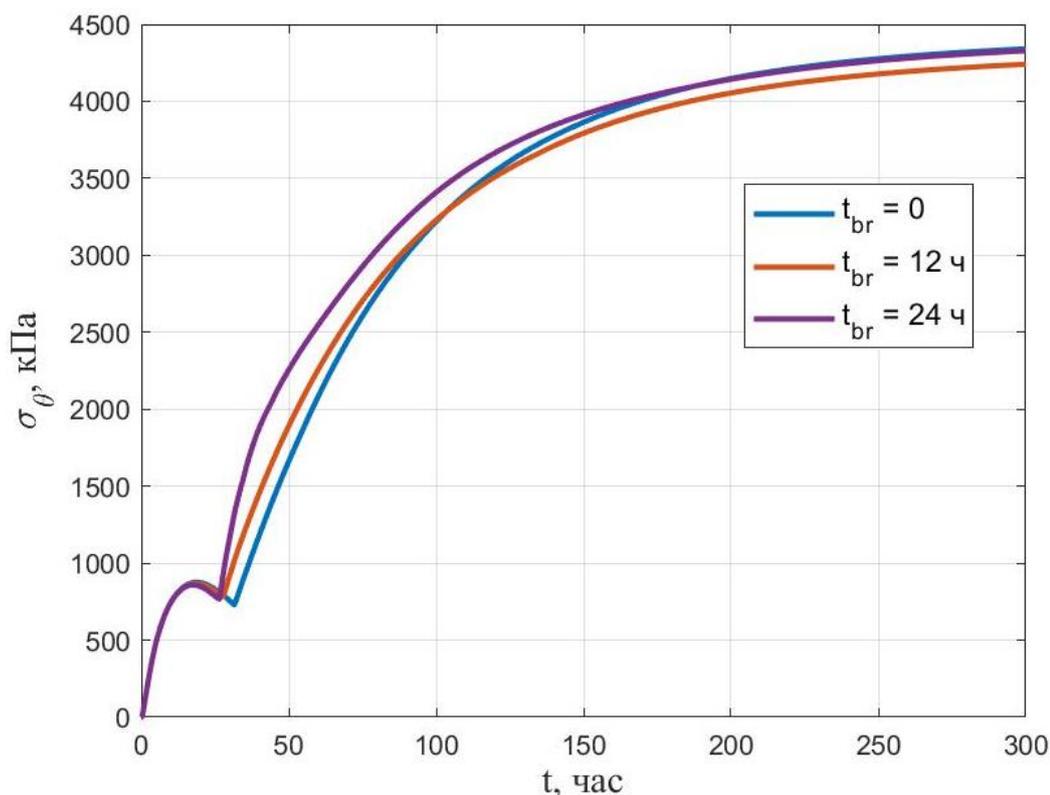


Рис. 4.21 – Изменение максимальной величины напряжений σ_{θ} при различной продолжительности перерывов в укладке слоев

4.4 Расчет температурных полей и напряжений при возведении массивного монолитного фундамента ветрогенератора

Также при помощи разработанной методики был выполнен расчет температурных полей и напряженно-деформированного состояния при возведении массивной монолитной фундаментной плиты под ветроэнергетическую установку. Рассматриваемая конструкция является круглой в плане, радиусом 9 м, и имеет переменную высоту, которая меняется от 1,5 м на краю до 3 м в середине.

Данная задача выбивается из начальных ограничений области исследований, однако, поскольку имеет место осевая симметрия, она может быть решена с использованием описанных ранее подходов.

Расчет температурного поля выполнялся совместно с грунтовым массивом, который принимался цилиндрической формы радиусом 15 м (рис. 4.22).

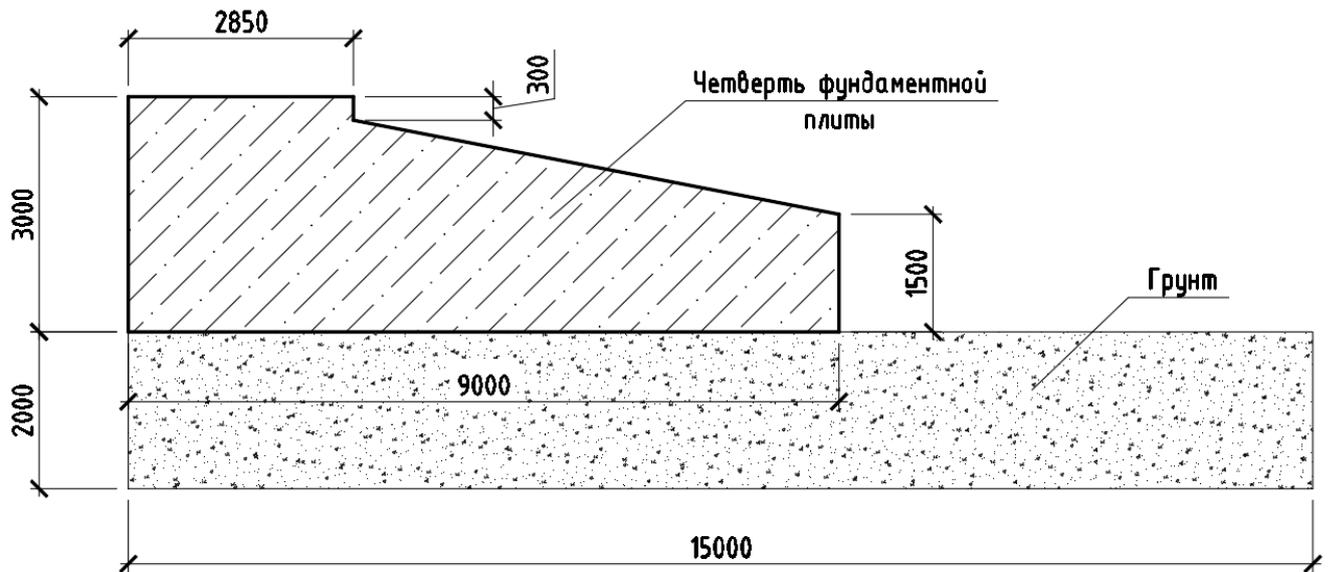


Рис. 4.22 – Габариты рассчитываемого фундамента

На верхней поверхности фундамента и верхней поверхности грунта принимались условия конвективного теплообмена с коэффициентом теплоотдачи $h = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ (свободная поверхность, открытая для теплообмена), на боковых и наклонной поверхности фундамента коэффициент теплоотдачи принимался равным $10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ (поверхность, закрытая опалубкой), на нижней и боковой поверхности грунта температура принималась заданной и равной $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Температура воздуха также принималась равной $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Теплофизические характеристики грунта: $\lambda = 1,5 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 1600 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 1875 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Модуль упругости грунта $E_{\text{г}} = 300 \text{ кПа}$. Коэффициент линейного температурного расширения грунта принимался равным коэффициенту линейного температурного расширения бетона. Нижние узлы массива грунта принимались закрепленными по z , а линия $r = 0$ – закрепленной от радиальных смещений. Сетка конечных элементов для рассчитываемой конструкции с принятой системой координат показана на рис. 4.23.

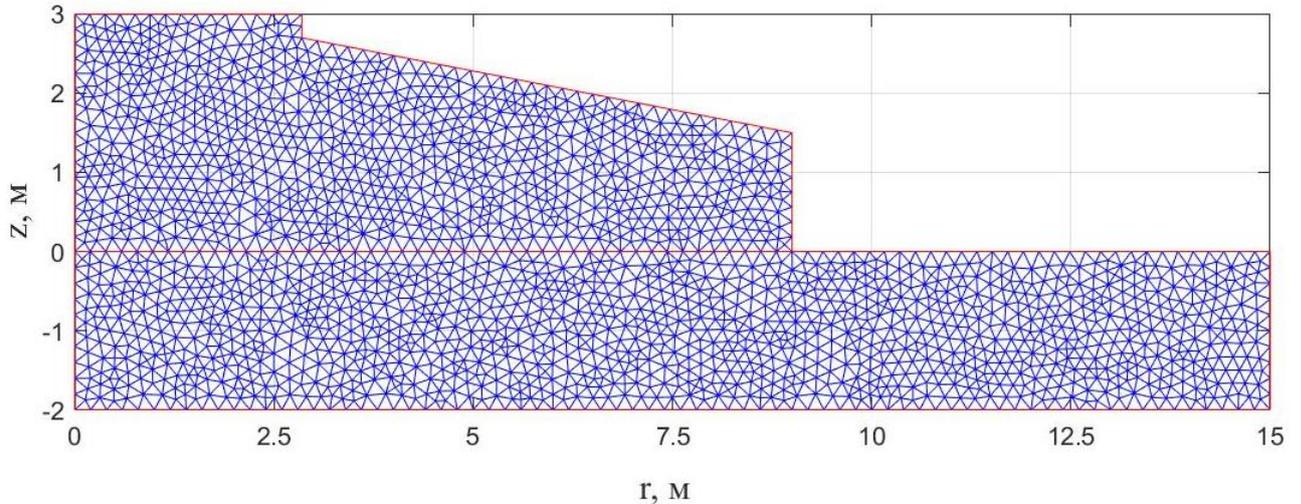


Рис. 4.23 – Сетка КЭ для рассчитываемой конструкции с принятой системой координат

Помимо анализа НДС в двумерной постановке выполнялся расчет по упрощенной методике, приведенной в работах [68, 69, 102].

Методика, представленная в [68, 69, 102], вообще говоря разработана для фундаментных плит постоянной толщины. При определении температурного поля в случае достаточно больших размеров фундамента в плане пренебрегают граничными условиями на боковых поверхностях и расчет распределения температуры по толщине ведут в одномерной постановке с использованием уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(z, t) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - W. \quad (4.8)$$

Определение температурных напряжений в бетоне строится на гипотезе о том, что линейные деформации ε_x и ε_y (в нашем случае ε_θ и ε_r) по толщине фундамента постоянны и равны между собой. Эта гипотеза означает, что каждое вертикальное сечение фундамента остается плоским и вертикальным после деформации. Из равенства деформаций ε_θ и ε_r следует равенство напряжений σ_r и σ_θ . Напряжения σ_z , а также касательные напряжения принимаются равными нулю.

Расчет напряженно-деформированного состояния выполняется после определения температурного поля пошагово в следующей последовательности:

1. Вычисляется приращение полной деформации $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_r = \Delta\varepsilon_\theta$ по формуле:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\int_0^h E(z)\Delta\varepsilon_B(z) dz}{\int_0^h E(z) dz}. \quad (4.9)$$

2. Вычисляется приращение напряжения $\Delta\sigma = \Delta\sigma_r = \Delta\sigma_\theta$:

$$\Delta\sigma = \frac{E}{1-\nu} (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_B). \quad (4.10)$$

3. Выполняется суммирование приращений напряжений с напряжениями из предыдущего шага.

Множитель $(1 - \nu)$ в формуле (4.10) учитывает работу конструкции в условиях двухосного напряженного состояния.

Расчет выполнялся для быстротвердеющего бетона В25 с такими же исходными данными по тепловыделению, как в параграфе 2.2. На рис. 4.24 приведен полученный в результате расчета график изменения во времени максимальной температуры в фундаменте, а также температур у его верхней и нижней поверхности при $r = 0$.

Табл. 4.1 – Сравнение температур в различные моменты времени, полученных в двумерной постановке и по упрощенной методике

Время, час		20	40	60	80	100
T, °С, максимум	2D	53,1581	58,1267	60,0631	60,5883	60,3716
	1D	53,1543	58,0936	60,0137	60,5343	60,3254
T, °С, верхняя поверхность	2D	30,0800	28,3854	27,3183	26,5784	26,0232
	1D	30,1229	28,4142	27,3385	26,5942	26,0377
T, °С, нижняя поверхность	2D	38,6768	41,3738	42,7570	43,6508	44,2879
	1D	38,6010	41,3417	42,7392	43,6390	44,2788

Существенной разницы по температурам при расчете в одномерной и двумерной постановке не было выявлено. Сравнение температур в различные моменты времени, полученных в двумерной постановке и по упрощенной методике, приведено в табл. 4.1.

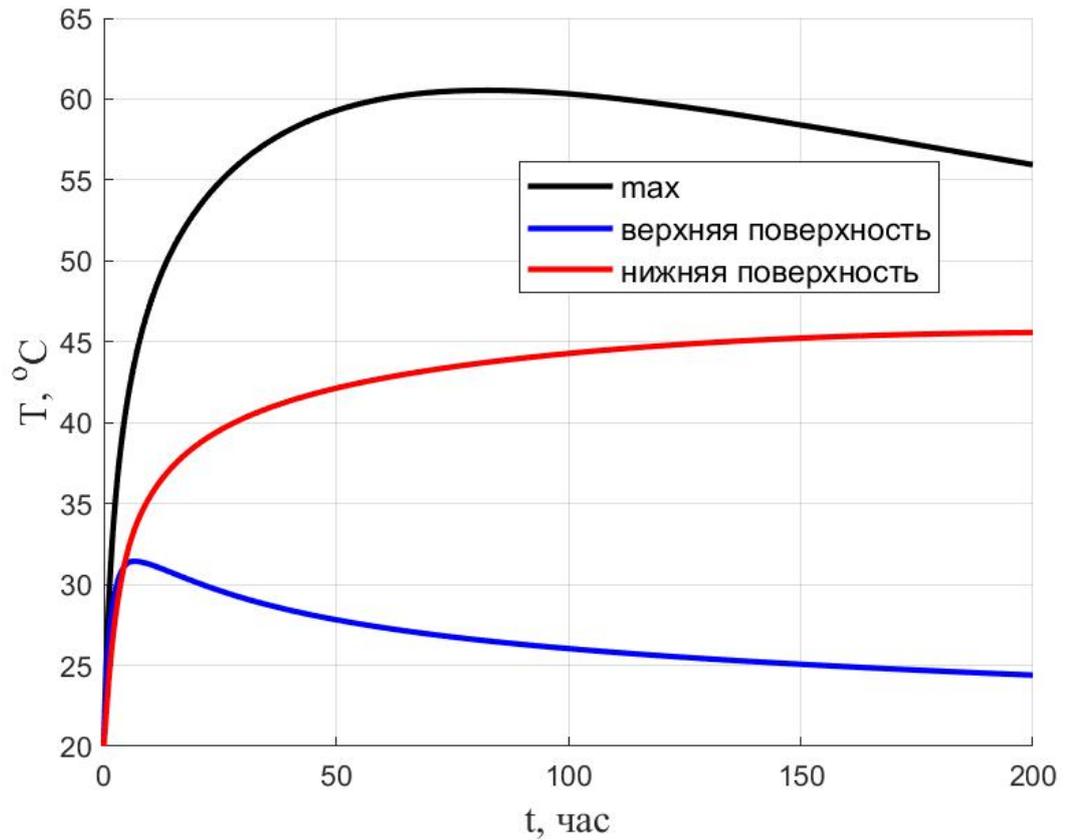


Рис. 4.24 – Изменение во времени температур в фундаменте

Распределение температуры в момент времени $t = 80$ ч, когда она в толще конструкции достигает максимума, приведено на рис. 4.25.

На рис. 4.26 представлен график изменения во времени максимальных окружных напряжений (черная сплошная линия). Штриховой линии соответствуют максимальные значения напряжений σ_{θ} , полученные по упрощенной методике. Из данного графика видно, что результаты расчета по упрощенной методике и в двумерной постановке достаточно близки, однако указанное совпадение скорее случайно.

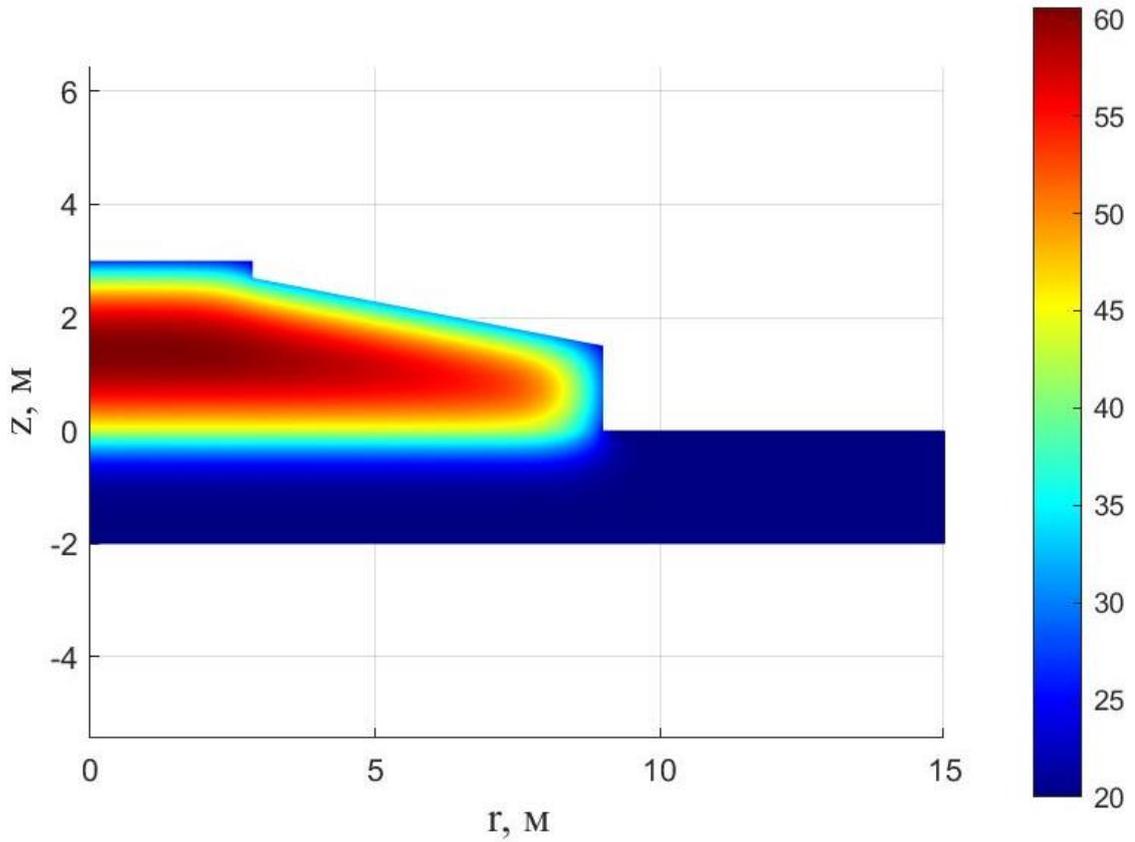


Рис. 4.25 – Распределение температуры в фундаменте ($^{\circ}\text{C}$) в зависимости от r и z при $t = 80$ ч

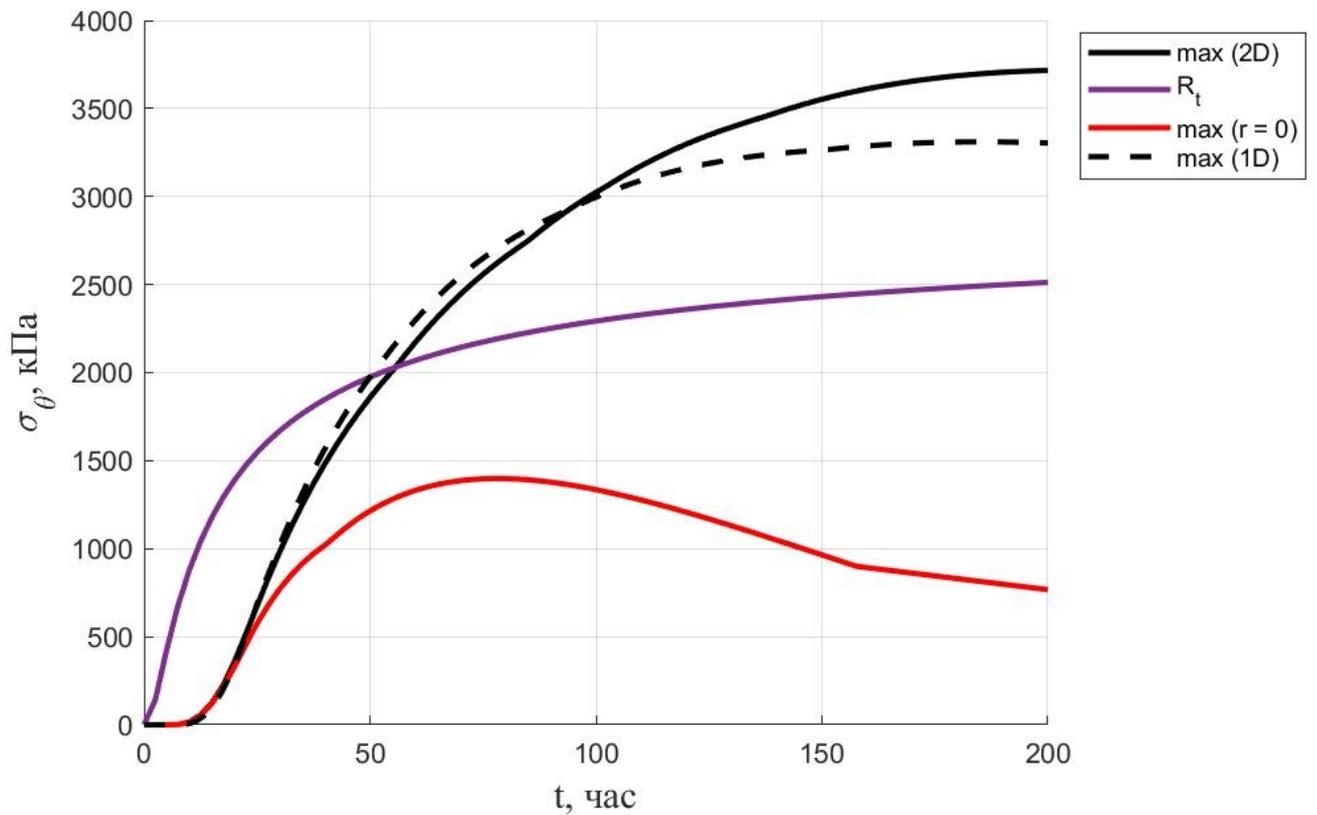


Рис. 4.26 – Изменение во времени окружных напряжений

Упрощенная методика должна предсказывать напряжения в центре фундамента, однако максимум в рассмотренной задаче наблюдается не в центре. При $r = 0$ напряжения оказываются значительно ниже (красная линия на рис. 4.26), чем при расчете по упрощенной методике. Распределение напряжений σ_θ в зависимости от r и z при $t = 200$ ч приведено на рис. 4.27.

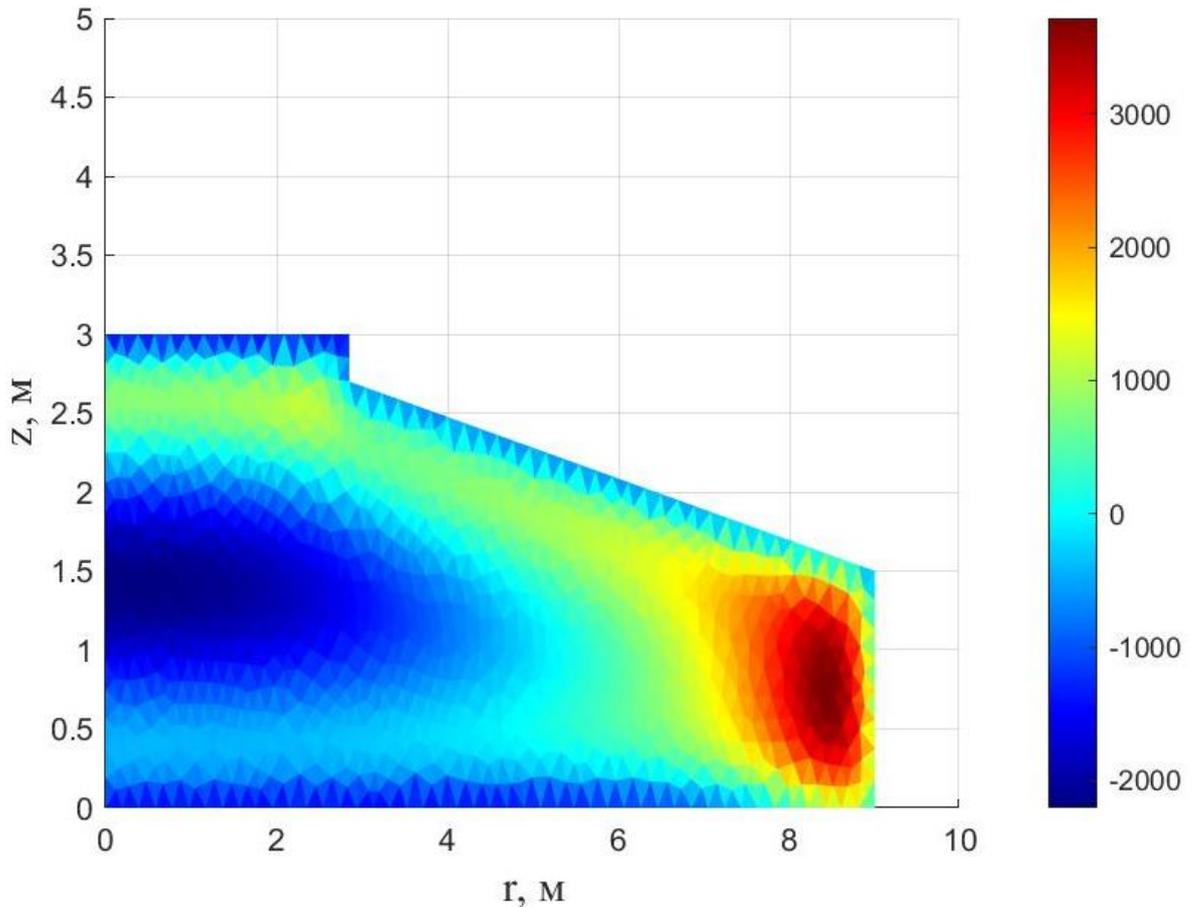


Рис. 4.27 – Распределение напряжений σ_θ (кПа) в зависимости от r и z при $t = 200$ ч

На рис. 4.28 представлены графики изменения во времени максимальных величин напряжений σ_r и σ_z . Данный рисунок показывает, что напряжения σ_r заметно отличаются от напряжений σ_θ , что не соответствует гипотезе, положенной в основу упрощенной методики. Напряжения σ_z достаточно малы по сравнению с σ_r и σ_θ , но отличны от нуля. На рис. 4.29 представлено распределение напряжений σ_r как функции от r и z в момент времени $t = 55$ ч, когда они достигают максимума. Мозаика напряжений $\sigma_z(r, z)$ при $t = 200$ ч приведена на рис. 4.30.

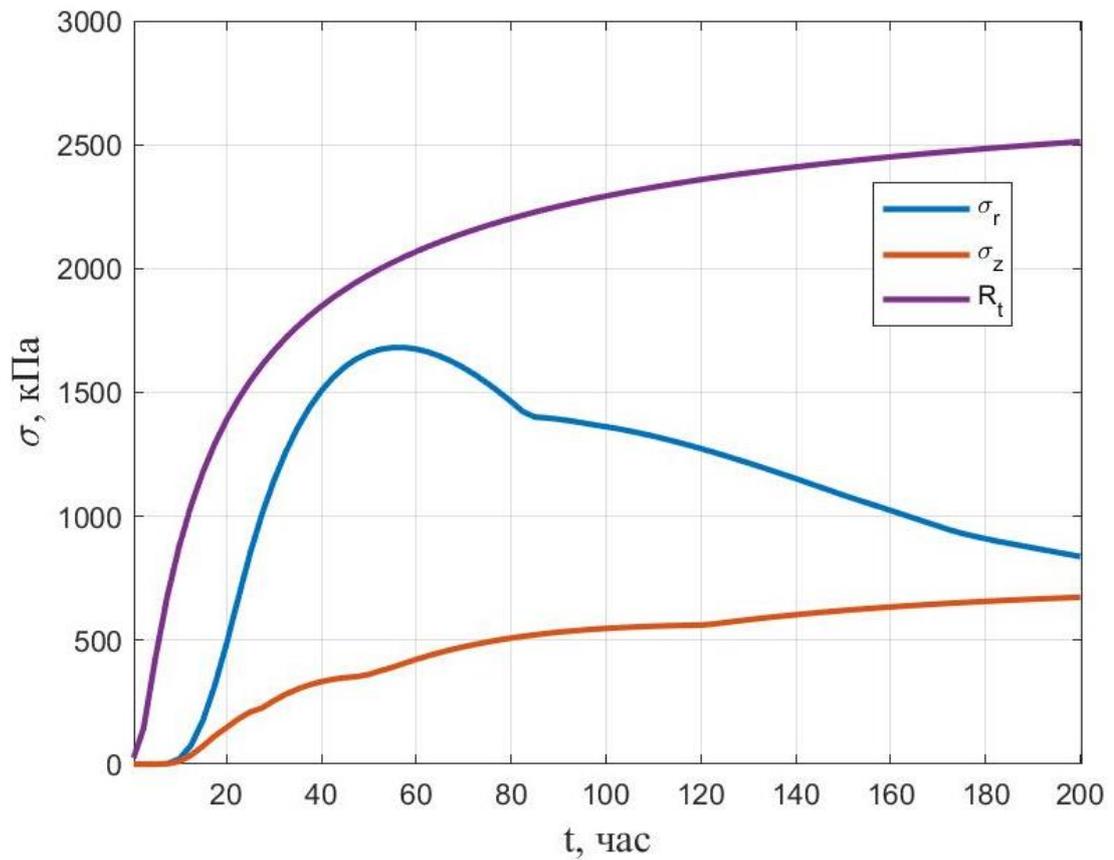


Рис. 4.28 – Изменение во времени максимальных величин напряжений σ_r и σ_z

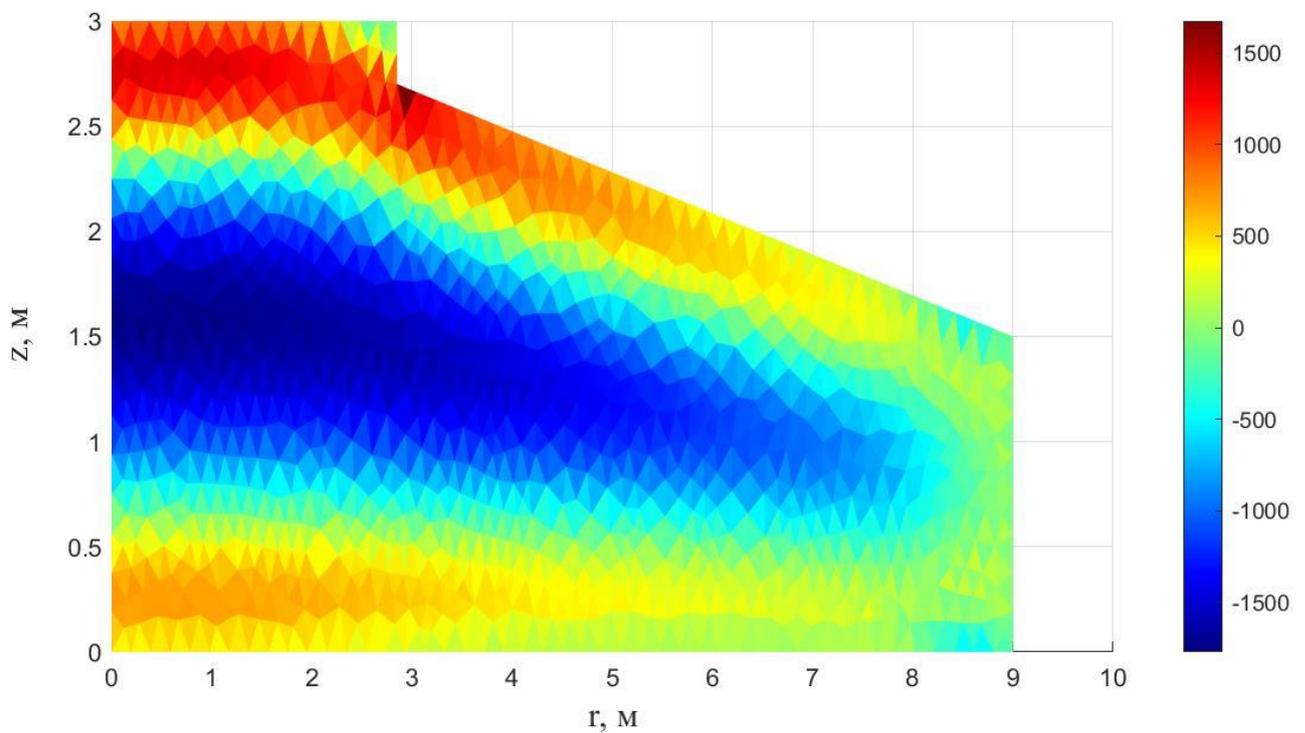


Рис. 4.29 – Распределение напряжений σ_r (кПа) как функции от r и z при $t = 55$ ч

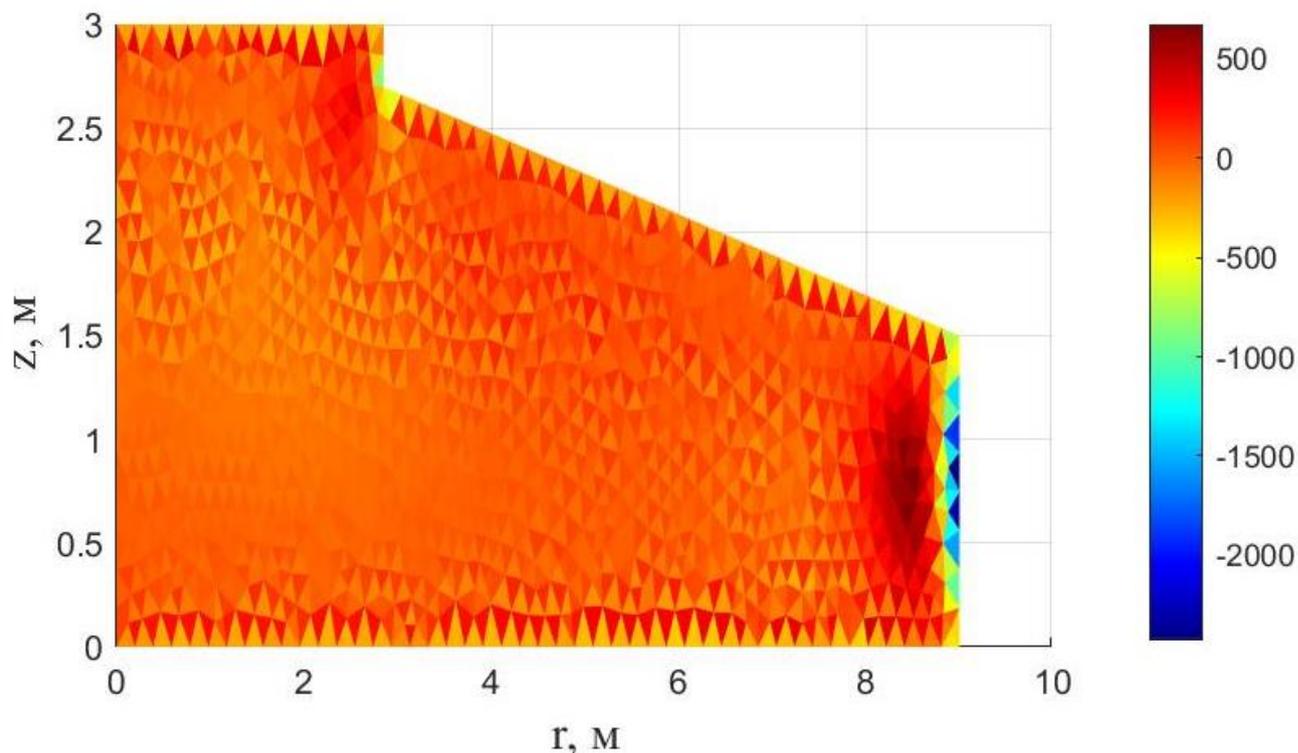


Рис. 4.30 – Мозаика напряжений σ_z (кПа) при $t = 200$ ч

Также был выполнен расчет с измененными граничными условиями, когда основание считалось абсолютно жестким, и узлы по подошве фундамента закреплялись от перемещений по z . На рис. 4.31 представлены графики изменения во времени окружных напряжений для этого случая. Из данных графиков видно, что в случае абсолютно жесткого основания результат в центре фундамента приближается к решению на основе упрощенной методики.

Рис. 4.26 и рис. 4.31 показывают, что для рассмотренной конструкции существует риск раннего трещинообразования в возрасте примерно 50 ч. Для исключения риска образования трещин в процессе возведения фундамента коэффициент теплоотдачи на поверхностях, контактирующих с окружающей средой, был снижен до $1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, и между подошвой фундамента и грунтом был установлен слой утеплителя из экструдированного пенополистирола ПЕНОПЛЭКС толщиной 2 см с теплофизическими характеристиками $\lambda = 0,034 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\rho = 30 \text{ кг}/\text{м}^3$, $c = 1650 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. Для сравнения также выполнялся расчет при использовании данных по тепловыделению для медленноотвердеющего бетона.

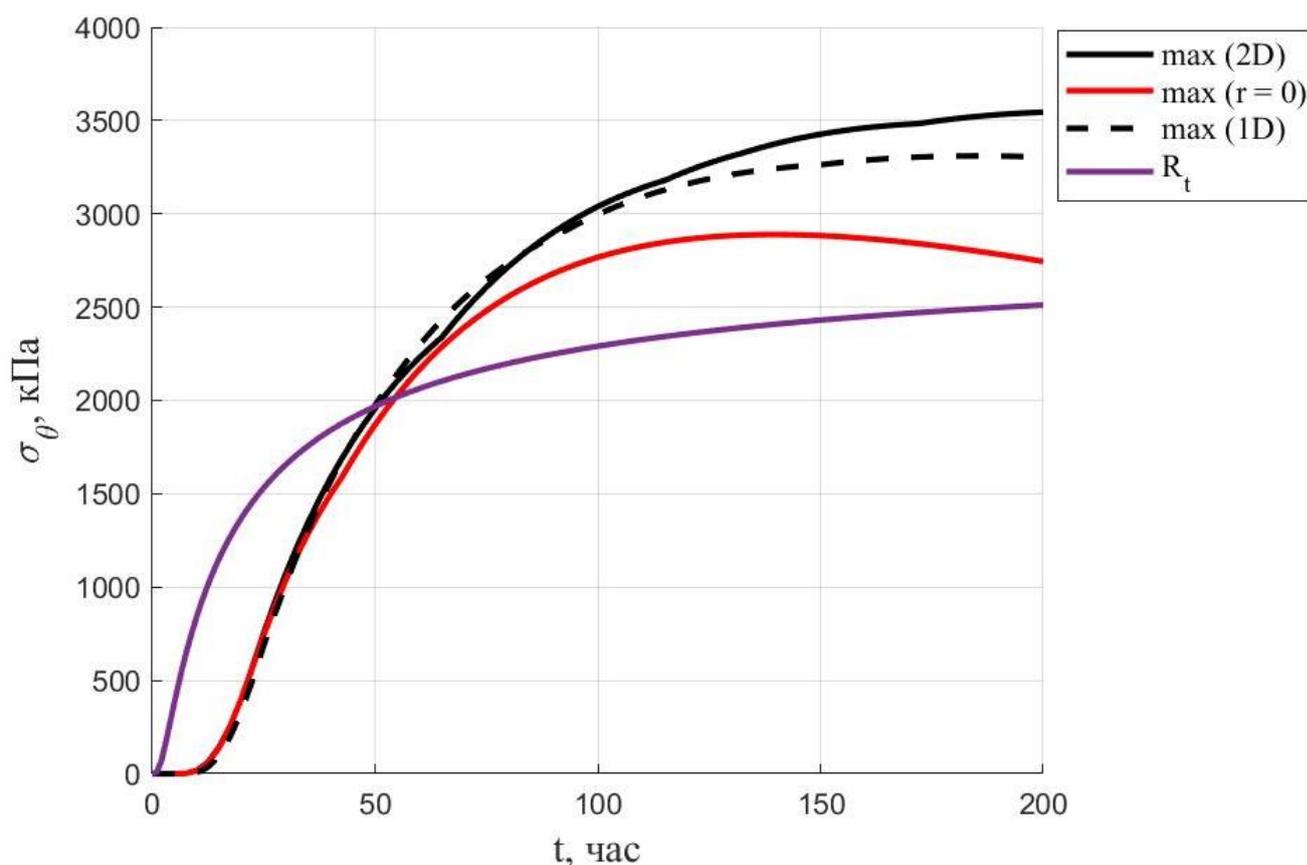


Рис. 4.31 – Изменение окружных напряжений во времени в случае абсолютно жесткого основания

На рис. 4.32 представлены графики изменения во времени максимальных напряжений σ_{θ} в случае ограничения теплоотдачи на поверхностях фундамента, обменивающихся с окружающей средой, и установки теплоизоляции под его подошвой при использовании быстротвердеющего и медленнотвердеющего бетона. Также на данном рисунке представлены графики изменения во времени текущей прочности бетона на растяжение.

Из рис. 4.32 видно, что в случае использования быстротвердеющего бетона максимальные напряжения σ_{θ} не превышают текущую прочность на растяжение, чего не наблюдается при применении медленнотвердеющего бетона. Таким образом, замедление кинетики тепловыделения бетона не всегда позволяет снизить риск раннего трещинообразования. Большое значение также имеют условия окружающей среды, а также условия теплообмена на поверхностях конструкции.

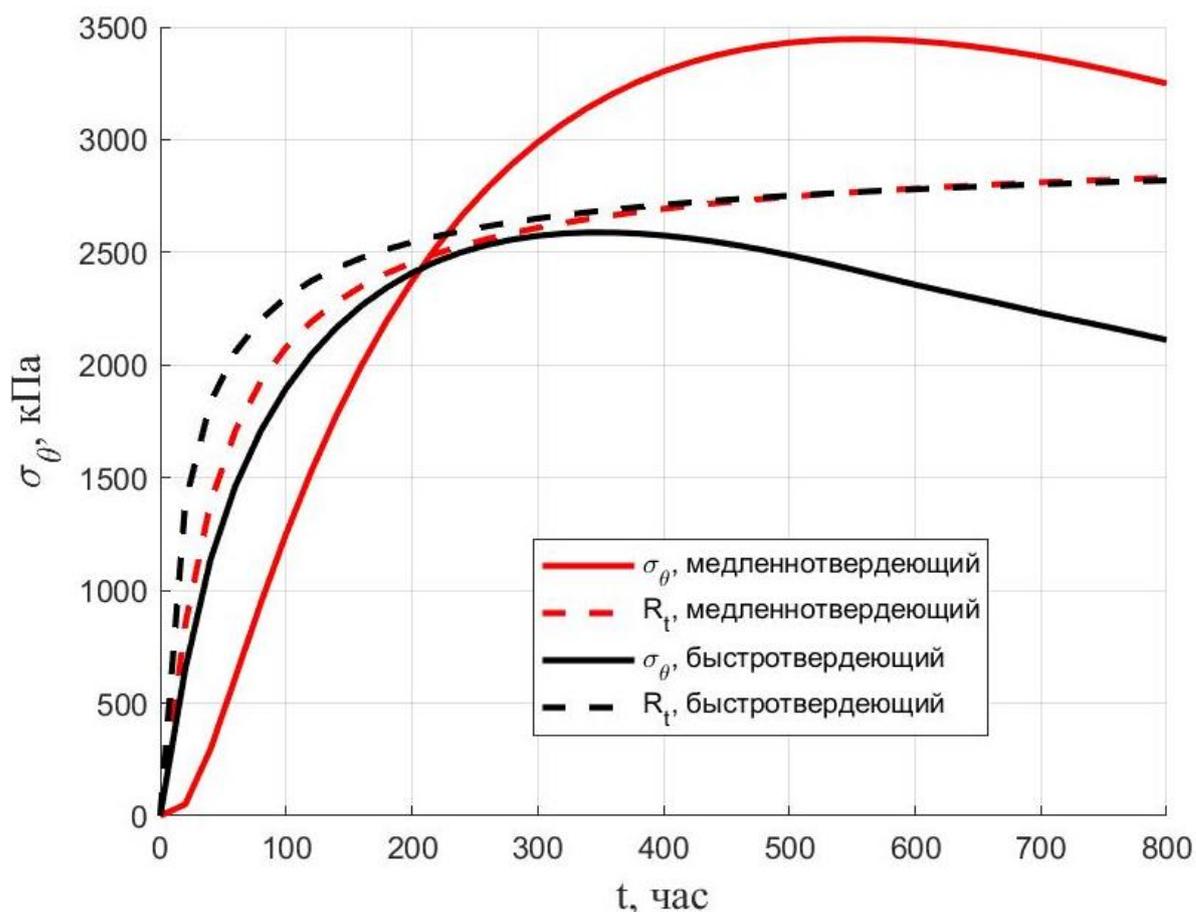


Рис. 4.32 – Изменение во времени максимальных окружных напряжений при ограничении теплообмена между фундаментом и окружающей средой

4.5 Выводы по главе

Разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния при возведении осесимметричных конструкций из монолитного железобетона в двумерной постановке на основе метода конечных элементов. Достоверность результатов подтверждена путем моделирования в программном комплексе ANSYS. Решены практические задачи определения НДС в толстостенной цилиндрической оболочке, а также в массивном монолитном фундаменте ветрогенератора. Для фундамента ветрогенератора выполнено сравнение с расчетом по упрощенной методике, представленной в работах А.С. Чепурненко, Г.В. Несветаева и Ю.И. Коряновой. Указана область эффективной работы упрощенной методики. Предложены рекомендации по снижению риска раннего трещинообразования в рассмотренных конструкциях.

Для толстостенной цилиндрической оболочки расчет также выполнен в случае ее послойного возведения. Установлено, что даже значительные перерывы при бетонировании не приводят к сколько-нибудь заметному изменению максимальных напряжений в конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы и результаты:

1. Выбраны основные соотношения модели расчета напряженно-деформированного состояния массивных монолитных конструкций при их возведении, определяющие изменение во времени механических характеристик бетона как функций от его степени зрелости, а также выполнена валидация этих соотношений путем сравнения с экспериментальными данными. Установлено, что эффектами ползучести бетона на стадии возведения можно пренебречь (прочность при их неучете составляет не более 5%).

2. Разработана методика определения нестационарных температурных полей при возведении толстостенных цилиндрических оболочек с учетом зависимости коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации, а также стадийности возведения конструкции. Установлено, что влияние переменного коэффициента теплопроводности на результирующие температурные поля не превышает 3%, и им можно пренебречь.

3. Разработаны алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния при возведении толстостенных цилиндрических оболочек в одномерной осесимметричной постановке. Решена задача определения напряженно-деформированного состояния в процессе возведения трехслойной толстостенной оболочки с наружными слоями из стали и ядром из бетона. Установлены закономерности распределения напряжений между слоями в трехслойной конструкции.

4. Разработаны алгоритмы расчета напряжений, возникающих в процессе твердения в массивных монолитных конструкциях в двумерной осесимметричной постановке. Исследовано влияние технологических перерывов между укладкой слоев на результирующее поле напряжений для конструкции в виде толстостенной цилиндрической оболочки. Учет технологических перерывов к изменению максимальных напряжений не более чем на 5%. Решена практическая задача определения температурных напряжений при возведении массивного монолитного фундамента ветрогенератора. Предложены рекомендации по снижению риска раннего трещинообразования путем регулирования условий теплообмена на поверхностях конструкции.

Перспективы дальнейшей разработки темы: В настоящей работе рассмотрены только конструкции, имеющие осевую симметрию. Дальнейшие исследования могут быть направлены на решение задачи определения температурных полей и напряжений при возведении массивных монолитных конструкций в трехмерной постановке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Meddelelse nr. 1, Den Norske Ingeniørforening (1930). Undersøkelse av skader på våre betongdammer.
2. А.с. SU 45112 А1 СССР: Гидравлические модели для решения задач по вопросам нагревания и охлаждения твердых тел и распространения в системах теплового состояния / В. С. Лукьянов // Заявка №156241 от 28.10.1934.
3. Rawhouser, C. Cracking and temperature control of mass concrete / C. Rawhouser //Journal Proceedings. – 1945. – Т. 41. – №. 2. – С. 305-348.
4. Stevens, J. E. Hoover Dam: An American Adventure / J. E. Stevens. – University of Oklahoma Press, 1990. – 327 p.
5. Blanks, R. F. Cracking in mass Concrete / R. F. Blanks, H. S. Meissner, C. Rawhouser //Journal Proceedings. – 1938. – Т. 34. – №. 3. – С. 477-496.
6. Abrams, D.A. Cracking and temperature control of mass concrete / D. A. Abrams // Proc. of the American concrete institute. – 1945. – Vol. 2945. – Pp. 1-24.
7. Basis for and practical approaches to stress calculations and crack risk estimation in hardening concrete structures. State of the art. COIN Project report 31 - 2011. – SINTEF Building and Infrastructure. – 135 p.
8. Diaz, F. Early-Age Thermal Cracking in Concrete, A FE-Modelling Approach/ F. Diaz, R. Johansson. – Göteborg, Sweden, 2016. – 161 p.
9. Carlson, R. W. A simple method for the computation of temperatures in concrete structures / R. W. Carlson //Journal Proceedings. – 1937. – Т. 34. – №. 11. – С. 89-104.
10. Reinius, E. Ytspänningar och ytarmering i massiva betongkonstruktioner / E. Reinius //Betong. – 1942. – Т. 27. – №. 3. – С. 119-132.
11. Davis, R.E. Plastic flow and volume changes of concrete / R.E. Davis, H.E. Davis, E.H. Brown // Proceedings, American Society for Testing and Materials, Part II. – Philadelphia, 1937. – Pp. 317-331.
12. Asplund, S.O. Some criterias for hermful crack formation in reinforced concrete // Swedish cement and concrete research institute. – 1945. – Vol.30, H.1. – Pp.21-27.

13. Sjödin, O.V. Measurements of shrinkage and expansion in built concrete structures / O.V. Sjödin // *Betong.* – 1936. – Vol.2. – No.2. – Pp. 76-89.
14. Springenschmid, R. Versuche und Erfahrungen mit Längs- und Quertugen / R. Springenschmid // *Zement und Beton.* – 1969. – Pp. 9-18.
15. Springenschmid, R. Untersuchungen über die Ursache von Querrissen im jungen Beton / R. Springenschmid // *Beton und Stahlbetonbau.* – 1973. – T. 68. – №. 9. – C. 221-226.
16. Springenschmid, R. Thermal stresses in mass concrete: A new method and the influence of different cements / R. Springenschmid // *Quinzieme Congres des Grands Barrages, Lausanne, 1985.* – Vol. 57. – Pp. 57-72.
17. Springenschmid, R. et al. Development of the cracking frame and the temperature-stress testing machine // *Thermal Cracking in Concrete at Early Ages: Proceedings of the International RILEM Symposium.* – 1994. – T. 25. – C. 137.
18. Orr, D. M. F. An apparatus for measuring the shrinkage characteristics of plastic mortars / D. M. F. Orr, G. F. Haigh // *Magazine of Concrete Research.* – 1971. – T. 23. – №. 74. – C. 43-48.
19. Paillère, A. M. Appareil d'étude de la fissuration du béton / A. M. Paillère, J. J. Serrano // *Bull liaison lab ponts chauss.* – 1976. – №. 83. – Pp. 29-38.
20. Александровский, С.В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на изменения температуры и влажности с учетом ползучести бетона / С. В. Александровский. - М.: Науч.-исслед., проект.- конструктор. и технол. ин-т бетона и железобетона (НИИЖБ), 2004. - 712 с.
21. Cannon, R.W. Effect of Restraint, volume change, and reinforcement on cracking of massive concrete // *ACI Journal.* – 1973. – № 7. – Pp. 445-470.
22. Bernander, S. Cooling of hardening concrete by means of embedded cooling systems / S. Bernander // *Nordisk betong.* – 1973. – Vol. 2. – Pp.21-30.
23. Buö, F.O. Crack formation of concrete walls due to evolution of heat of hydration / F. O. Buö // *Nordisk betong.* – 1973. – Vol. 2. – Pp. 12-20.

24. Bernander, S. Eigenstresses in young concrete due to temperature developments under hydration / S. Bernander // *Nordisk betong*. – 1981. – Vol. 2. – Pp. 25-31.
25. Несветаев, Г. В. К вопросу нормирования усадки цементных бетонов / Г.В. Несветаев, Т. А. Щербинина // *Вестник евразийской науки*. – 2015. – Т. 7. – №. 5 (30). – С. 145.
26. Houk, I.E. Studies of autogenous volume change in concrete for Dworshak Dam / I.E. Houk, O.E.Borge // *ACI Journal*. – 1969. – Pp. 560-568.
27. Tang, S. A review of autogenous shrinkage models of concrete / S. Tang, D. Huang, Z. He // *Journal of Building Engineering*. – 2021. – Т. 44. – С. 103412.
28. Chu, I. et al. Estimation of temperature effects on autogenous shrinkage of concrete by a new prediction model // *Construction and Building Materials*. – 2012. – Т. 35. – С. 171-182.
29. Bentz, D. P. Mitigation strategies for autogenous shrinkage cracking / D. P. Bentz, O. M. Jensen // *Cement and Concrete Composites*. – 2004. – Т. 26. – №. 6. – С. 677-685.
30. Bentur, A. Prevention of autogenous shrinkage in high-strength concrete by internal curing using wet lightweight aggregates / A. Bentur, S. Igarashi, K. Kovler // *Cement and concrete research*. – 2001. – Т. 31. – №. 11. – С. 1587-1591.
31. Несветаев, Г. В. К вопросу о развитии норм по проектированию и производству железобетонных конструкций / Г. В. Несветаев // *Бетон и железобетон*. – 2020. – №. 1. – С. 4-9.
32. Nesvetaev, G. On effect of superplasticizers and mineral additives on shrinkage of hardened cement paste and concrete / G. Nesvetaev, Y. Koryanova, T. Zhilnikova // *Matec Web of Conferences*. – EDP Sciences, 2018. – Т. 196. – С. 04018.
33. Kuriakose, B. Early-age temperature distribution in a massive concrete foundation / B. Kuriakose, B. N. Rao, G. R. Dodagoudar // *Procedia Technology*. – 2016. – Т. 25. – С. 107-114.

34. Nguyen, C. T. Reducing temperature difference in mass concrete by surface insulation / C. T. Nguyen, X. B. Luu //Magazine of Civil Engineering. – 2019. – №. 4 (88). – C. 70-79.
35. Xu, J. et al. Finite element simulation of prevention thermal cracking in mass concrete //International Journal of Computing Science and Mathematics. – 2019. – T. 10. – №. 4. – C. 327-339.
36. Tasri, A. Effect of material of post-cooling pipes on temperature and thermal stress in mass concrete / A. Tasri, A. Susilawati //Structures. – Elsevier, 2019. – T. 20. – C. 204-212.
37. Nguyen, T. C. Prevention of crack formation in massive concrete at an early age by cooling pipe system / T. C. Nguyen, T. P. Huynh, V. L. Tang //Asian Journal of Civil Engineering. – 2019. – T. 20. – №. 8. – C. 1101-1107.
38. Klemczak, B. et al. Analysis of cracking risk in early age mass concrete with different aggregate types //Procedia engineering. – 2017. – T. 193. – C. 234-241.
39. Van Lam, T. et al. Composition calculation and cracking estimation of concrete at early ages //Magazine of Civil Engineering. – 2018. – №. 6 (82). – C. 136-148.
40. Xie, Z. et al. Simulation of the temperature field for massive concrete structures using an interval finite element method //Engineering Computations. – 2020. – T. 37. – №. 7. – C. 2467-2486.
41. Havlásek, P. et al. Thermo-mechanical simulations of early-age concrete cracking with durability predictions //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2017. – T. 236. – №. 1. – C. 012052.
42. Abeka, H. Thermal effect of mass concrete structures in the tropics: Experimental, modelling and parametric studies / H. Abeka, S. Agyeman, M. Adom-Asamoah //Cogent Engineering. – 2017. – T. 4. – №. 1. – C. 1278297.
43. Długosz, A. et al. Identification of thermal properties of hardening concrete by means of evolutionary algorithms //Computer Assisted Methods in Engineering and Science. – 2017. – T. 24. – №. 2. – C. 101-111.
44. Fairbairn, E. M. R. et al. Optimization of mass concrete construction using genetic algorithms //Computers & structures. – 2004. – T. 82. – №. 2-3. – C. 281-299.

45. Kuryłowicz-Cudowska, A. Determination of thermophysical parameters involved in the numerical model to predict the temperature field of cast-in-place concrete bridge deck //Materials. – 2019. – Т. 12. – №. 19. – С. 3089.
46. Zhang, M. et al. Study on temperature field massive concrete in early age based on temperature influence factor //Advances in Civil Engineering. – 2020. – Т. 2020. – С. 1-7.
47. Chepurnenko, A.S. Modeling non-stationary temperature fields when constructing mass cast-in-situ reinforced-concrete foundation slabs / A. S. Chepurnenko, G. V. Nesvetaev, Yu. I. Koryanova // Architecture and Engineering. – 2022. – Vol. 7. - № 2. .
48. Несветаев, Г. В. и др. О влиянии некоторых технологических факторов на качество бетона монолитных железобетонных конструкций //Инженерный вестник Дона. – 2021. – №. 11 (83). – С. 367-383.
49. Nguyen, T. C. et al. Thermal behavior of mass concrete structures with different material properties //Journal of Science and Technique-Section on Special Construction Engineering. – 2022. – Т. 5. – №. 02.
50. Kuryłowicz-Cudowska A., Wilde K. FEM and experimental investigations of concrete temperature field in the massive stemwall of the bridge abutment //Construction and Building Materials. – 2022. – Т. 347. – С. 128565.
51. Xie, Y. A novel numerical method for predicting the hydration heat of concrete based on thermodynamic model and finite element analysis /Y. Xie, C. Qian //Materials & Design. – 2023. – Т. 226. – С. 111675.
52. Zeng, Y. et al. Study on the Effects of Innovative Curing Combinations on the Early Temperature Field of Concrete Box Girders //Buildings. – 2022. – Т. 12. – №. 11. – С. 1808. .
53. Mardmomen, S. Prediction of the early age thermal behavior of mass concrete containing SCMs using ANSYS /S. Mardmomen, H. L. Chen //Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2023. – С. 1-19. .

54. АНИСКИН, Н. Analysis of the degree of influence of internal and external factors on the temperature regime of a low-cement concrete dam //International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Т. 18. – №. 4. – С. 138-150.
55. Aniskin, N. A. Optimization of the Temperature and Thermo-Stressed State of a Concrete Dam Constructed from Particularly Lean Roller-Compacted Concrete /N. A. Aniskin, A. M. Shaytanov//Buildings. – 2023. – Т. 13. – №. 4. – С. 914.
56. Bushmanova, A. V. et al. The thermo-stressed state in massive concrete structures //Magazine of Civil Engineering. – 2017. – №. 3 (71). – С. 51-60.
57. Smolana, A. et al. Thermo-mechanical analysis of mass concrete foundation slabs at early age—essential aspects and experiences from the FE modelling //Materials. – 2022. – Т. 15. – №. 5. – С.1815.
58. Mirković, U. Long-Term Thermal Stress Analysis and Optimization of Contraction Joint Distance of Concrete Gravity Dams / U. Mirković, V. Kuzmanović, G. Todorović //Applied Sciences. – 2022. – Т. 12. – №. 16. – С. 8163.
59. Xie, Y. et al. Temperature field evolution of mass concrete: From hydration dynamics, finite element models to real concrete structure //Journal of Building Engineering. – 2023. – Т. 65. – С. 105699.
60. Du, W. et al. Effects of ambient temperature, formwork type, and demolding time on the thermal deformation of sidewall concrete in underground engineering: Experiment, simulation, and engineering practice //Construction and Building Materials.– 2022.–Т.353.
61. Wang, D. Cracking analysis of massive concrete with large-diameter pipes during construction /D. Wang, X. Song, H. Nie //Construction and Building Materials. – 2022. – Т. 338. – С. 127636.
62. Han, S. et al. Numerical simulation investigation on hydration heat temperature and early cracking risk of concrete box girder in cold regions //Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition). – 2023. – Т. 10. – №. 4. – С. 697-720.
63. Lyu, Y. Research on hydration-caused thermal cracking risk of steel-concrete composite bridge pylons //Journal of Constructional Steel Research. – 2023. – Т. 211. – С. 108165.

64. Xin, J. et al. Exploring the effect of low-heat cement on early-age thermal cracking resistance of rollercompacted concrete //Journal of Materials Research and Technology. – 2022. – Т. 21. – С. 4439-4451.

65. Mehta, P. K. Concrete: microstructure, properties, and materials / P. K. Mehta, P. J. M. Monteiro. – McGraw-Hill Education, 2014. – 239 p.

66. Liu, L. et al. Simplified Analysis of Thermal Cracks in Low-Heat Portland Cement Concrete //Advances in Civil Engineering. – 2022. – Т. 2022. – DOI: 10.1155/2022/7630568.

67. Aniskin, N. A. Predictive Model of Temperature Regimes of a Concrete Gravity Dam during Construction: Reducing Cracking Risks /N. A. Aniskin, T. C. Nguyen //Buildings. – 2023. – Т. 13. – №. 8. – С. 1954. .

68. Несветаев, Г. В. и др. Оценка некоторых методик для расчета температурных напряжений при бетонировании массивных железобетонных фундаментных плит //Инженерный вестник Дона. – 2022. – №. 7 (91). – С. 476-492.

69. Чепурненко, А.С. и др. Simplified model for determining the stress-strain state in massive monolithic foundation slabs during construction //International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – Т. 18. – №. 3. – С. 126-136.

70. Chepurnenko, A. Simplified Method for Determining Thermal Stresses during the Construction of Massive Monolithic Foundation Slabs / A. Chepurnenko, V. Turina //CivilEng. – 2023. – Т. 4. – №. 3. – С. 740-752.

71. Zhao, Y. et al. Effect of thermal parameters on hydration heat temperature and thermal stress of mass concrete //Advances in Materials Science and Engineering. – 2021. – Т. 2021. – С. 1-16.

72. Do, T. A. et al. Assessment of temperature evolution and early-age thermal cracking risk in segmental highstrength concrete box girder diaphragms //KSCE Journal of Civil Engineering. – 2022. – Т. 26. – №. 1. – С. 166-182.

73. Zhang, K. et al. Predicting the cracking behavior of early-age concrete in CRTS III track //Construction and Building Materials. – 2022. – Т. 353. – С. 129105.

74. Chiniforush, A. A. et al. Numerical simulation of risk mitigation strategies for early-age thermal cracking and DEF in concrete //Construction and Building Materials. – 2022. – Т. 322. – С. 126478.

75. Sheng, X. et al. Experimental and finite element investigations on hydration heat and early cracks in massive concrete piers //Case Studies in Construction Materials. – 2023. – Т. 18. – С. e01926.

76. Aniskin, N. Influence factors on the temperature field in a mass concrete / N. Aniskin, T. C. Nguyen //E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019. – Т. 97. – С. 05021.

77. Арутюнян, Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести / Н.Х. Арутюнян. – М.: Гостехтеориздат, 1952. – 323 с.

78. Арутюнян, Н. Х. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести/ Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин. – М.: Стройиздат, 1988. – 257 с.

79. Арутюнян, Н. Х. Контактные задачи теории ползучести/ Н. Х. Арутюнян, А. В. Манжиров. – НАН РА, 1999. – 318 с.

80. Есаян, С. Г. Реологическое моделирование вязкоупругих, упругопластических и вязкоупруго-пластических сред / С.Г. Есаян. – Ереван: Чартарагет. 2009. – 368 с.

81. Несветаев, Г. В. Бетоны: учебное пособие. – Изд. 2-е, доп. и перераб / Г. В. Несветаев. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 381 с. .

82. Chuc, N. T. The effect of formworks on the temperature regime in the mass concrete / N. T. Chuc, A. Nikolay //Magazine of civil Engineering. – 2020. – №. 7 (99). – С. 9911.

83. Тамразян, А. Г. Механика ползучести бетона: монография/ А. Г. Тамразян, С. Г. Есаян. – Москва: МГСУ, 2012. – 490 с.

84. Несветаев, Г. В. О влиянии условий выдерживания при возведении массивных монолитных железобетонных конструкций на прочность бетона / Г. В. Несветаев, Ю. И. Корянова, Д. П. Сухин //Инженерный вестник Дона. – 2021. – №. 10 (82). – С. 251-267.

85. Nesvetaev, G.V. Specific heat dissipation of concrete and the risk of early cracking of massive reinforced concrete foundation slabs / G.V. Nesvetaev, Yu. I. Koryanova, V. V. Shut // *Construction Materials and Products*. - 2024. - Т. 7(4). - С. 3.

86. Карпенко, Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. - М.: Стройиздат, 1996. - 412 с.

87. Маилян, Д. Р. Регулирование жесткости и прочности железобетонных балок варьированием модуля упругости бетона / Д. Р. Маилян, Г. В. Несветаев // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. – 2018. – Т. 20. – №. 4. – С. 86-93.

88. Несветаев, Г. В. Влияние некоторых минеральных добавок на деформации усадки строительных растворов / Г. В. Несветаев, Г. Н. Хаджишалапов, И. А. Животкова // *Инженерный вестник Дона*. – 2024. – №. 7 (115). – С. 42.

89. Турчак, Л. И. Основы численных методов / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М.: Физматлит, 2003. – 304 с.

90. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 329 с.

91. Несветаев, Г. В. Прогноз кинетики прочности бетона при твердении в условиях, отличных от нормальных / Г.В. Несветаев, Ю.И. Корянова // *Современные тенденции в строительстве, градостроительстве и планировке территорий*. – 2023. – Т. 2. – №. 4. – С. 59-68.

92. Rahimi, A. Thermal and structural analysis of roller compacted concrete (RCC) dams by finite element code / A. Rahimi, J. Noorzai // *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*. – 2011. – Т. 5. – №. 12. – С. 2761-2767.

93. Tiêu chuẩn xây dựng TCXDVN 305:2004 Quy phạm thi công và nghiệm thu bê tông khối lớn. Mass concrete – code of practice of construction and acceptance. – Hà Nội. - 2004.

94. Bofang, Z. Thermal stresses and temperature control of mass concrete / Z. Bofang. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. – 500 p. .

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023680535

**Расчет температурных полей и напряжений при
возведении массивных монолитных осесимметричных
конструкций**

Правообладатель: *федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Белгородский
государственный технологический университет им. В.Г.
Шухова» (RU)*

Авторы: *Сабитов Линар Салихзанович (RU), Зоалкфл Даниэль
Аммарович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU), Языев
Батыр Меретович (RU), Гатиев Магомед Шамильевич (RU),
Зиганишин Алмаз Дамирович (RU), Зинькова Виктория
Анатольевна (RU)*

Заявка № **2023669552**

Дата поступления **25 сентября 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **02 октября 2023 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Ю.С. Зубов



Руководитель строительного отдела ГК АКСтрой
 Индивидуальный предприниматель Акопян В.Ф.
 346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;
 тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakop@mail.ru.
 моб. тел.: 8-908-506-97-99
 ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

В диссертационный совет
 24.2.310.04
 Казанского государственного
 энергетического университета
 "

Утверждаю
 Руководитель строительного отдела
 ГК АКСтрой
 ИП Акопян В.Ф.



Технический акт внедрения
 результатов диссертационной работы на соискание ученой степени
 кандидата технических наук Зоалкфл Даниаля Аммаровича

Место внедрения Ростовская обл., г. Аксай

Предмет внедрения

Пакет прикладных программ для расчета
 на температурные воздействия
 толстостенных железобетонных
 резервуаров учетом старения и усадки
 бетона.

Результаты внедрения

Результаты диссертационной работы
 Зоалкфл Даниаля Аммаровича,
 подтвержденные на численных моделях (на
 основе метода конечных элементов, метода
 конечных разностей), используются при
 расчете на н.д.с. железобетонных
 резервуаров и трехслойных цилиндров,
 применяемых в конструкциях для
 сооружения объектов

Представитель заказчика:
 директор строительного отдела
 ГК АКСтрой

ИП Акопян В.Ф.



Исполнитель:

Соискатель ученой степени, сотрудник
 Комплексный научно-исследовательский
 институт им. Х.И. Ибрагимова РАН
 Зоалкфл Д.А.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ПРОГРАММА РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ TEMPERATURE.M

Аннотация. Программа предназначена для определения температурных полей и напряжений, вызванных теплом гидратации цемента при бетонировании массивных монолитных конструкций осесимметричной формы (фундаменты под ветрогенераторы, толстостенные цилиндрические и сферические оболочки и др.). Решение выполняется методом конечных элементов. Используются треугольные осесимметричные конечные элементы. При расчете температурного поля учитывается зависимость коэффициента теплопроводности бетона от степени его гидратации. Интегрирование системы дифференциальных уравнений МКЭ во временной области выполняется при помощи метода Эйлера. При расчете напряженно-деформируемого состояния учитывается изменение физико-механических характеристик бетона во времени, а также его контракционная усадка. Результатом работы программы являются графики изменения во времени температур в различных точках конструкции, а также максимальных напряжений.

Подпрограмма расчета температурного поля temperature.m

```

clc
clear variables
%константы, определяющие степень гидратации
ksib=0.96;
n_=6;
A0m=1e-5;
mn0=0.35e8/3600;
time0=0;
time1=200*3600; %конечное время, с
nT=800;%количество шагов по времени
dt=(time1-time0)/nT;%шаг по времени
Temp0=20;%начальная температура бетонной смеси
Tmid = 20; %Температура среды
hup=1; %коэффициент теплоотдачи без опалубки
hupg=20; %коэффициент теплоотдачи грунт-воздух
hside=1;%коэффициент теплоотдачи с опалубкой
Tbot = 20; %Температура в основании
g=[2 2 2 2 2 2 2 2 2 2
0 9 9 2.85 2.85 0 0 0 15 15
9 9 2.85 2.85 0 0 0 15 15 9
0 0 1.5 2.7 3 3 0 -2 -2 0
0 1.5 2.7 3 3 0 -2 -2 0 0
1 1 1 1 1 1 2 2 2 2
2 0 0 0 0 0 0 0 0 0];%геометрия области

[p,e,t]=initmesh(g,'Hmax',0.2);
np=size(p,2);%количество узлов
ne=size(e,2);%количество ребер, попавших на границу

```

```

nt=size(t,2);%количество элементов
lamb=2.67;%коэффициент теплопроводности бетона
rhob=2500;%плотность бетона
cb=1000;%удельная теплоемкость бетона, Дж/(кг*К)
lamg=1.5;%коэффициент теплопроводности грунта
rhog=1600;%плотность бетона
cg=1875;%удельная теплоемкость бетона, Дж/(кг*К)
%функция тепловыделения
Q0=zeros(1,nT+1);
k=0.26;
x=0.7;
Q28V=130;
%Функция тепловыделения
for it=1:nT+1
tau=time0+(it-1)*dt;
Q1(it)=(28*Q28V*k*x*exp(-k*((28/(tau/3600/24))^x -
1))*(28/(tau/3600/24))^(x - 1))/(tau/3600/24)^2*10^6/3600/24;
end
hold on
T0=ones(np,1)*Temp0;
Temp=zeros(nT+1,np);
Tmax=zeros(1,nT+1);
ksi=zeros(1,np);
%первый шаг по времени
f=mn0*(A0m/ksib)*ksib;
ksi_=f*exp(-5000/(Temp0+273));
ksi(1,:)=ksi_*dt;
for it=2:nT+1
    K=zeros(np,np);%матрица теплопроводности
    C=zeros(np);
for i=1:nt
    ii(1)=t(1,i);%Номер первого узла
    ii(2)=t(2,i);%Номер второго узла
    ii(3)=t(3,i);%Номер третьего узла
    ri=p(1,ii(1));
    zi=p(2,ii(1));
    rj=p(1,ii(2));
    zj=p(2,ii(2));
    rk=p(1,ii(3));
    zk=p(2,ii(3));
    ai=rj*zk-rk*zj;
    aj=rk*zi-zk*ri;
    ak=ri*zj-rj*zi;
    bi=zj-zk;
    bj=zk-zi;
    bk=zi-zj;
    ci=rk-rj;
    cj=ri-rk;
    ck=rj-ri;
    A=0.5*det([1 ri zi
               1 rj zj
               1 rk zk]);

```

```

Br=[bi,bj,bk];
Bz=[ci,cj,ck];
rm=(ri+rj+rk)/3;
zm=(zi+zj+zk)/3;
if t(4,i)==2
    lam=lamg;
    c=cg;
    rho=rhog;
else
    Ksi=mean(ksi(ii));
    lam=lamb*(1.33-0.33*Ksi);
    c=cb;
    rho=rhob;
end
Kt=(Br'*Br+Bz'*Bz)*lam*pi/2/A*rm;
Ni=1/2/A*(ai+bi*rm+ci*zm);
Nj=1/2/A*(aj+bj*rm+cj*zm);
Nk=1/2/A*(ak+bk*rm+ck*zm);
N=[Ni Nj Nk];

Ct=pi*A*rho*c/30*[6*ri+2*(rj+rk) 2*(ri+rj)+rk 2*(ri+rk)+rj
                2*(ri+rj)+rk 6*rj+2*(ri+rk) 2*(rj+rk)+ri
                2*(ri+rk)+rj 2*(rj+rk)+ri 6*rk+2*(ri+rj)];

for m=1:3
    for n=1:3
        K(ii(m),ii(n))=K(ii(m),ii(n))+Kt(m,n);
        C(ii(m),ii(n))=C(ii(m),ii(n))+Ct(m,n);
    end
end
end
%Накладываем граничные условия:
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i);
    ii(2)=e(2,i);
    r1=p(1,ii(1));
    r2=p(1,ii(2));
    z1=p(2,ii(1));
    z2=p(2,ii(2));
    %Боковая поверхность фундамента
    if r1==r2&&r1==2.85
        L=abs(z2-z1);
        K(ii(1),ii(1))=K(ii(1),ii(1))+L*(r1/4+r2/12)*2*pi*hside;
        K(ii(1),ii(2))=K(ii(1),ii(2))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
        K(ii(2),ii(1))=K(ii(2),ii(1))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
        K(ii(2),ii(2))=K(ii(2),ii(2))+L*(r1/12+r2/4)*2*pi*hside;
    end
    %Боковая поверхность грунта
    if r1==r2&&r1==9
        L=abs(z2-z1);
        K(ii(1),ii(1))=K(ii(1),ii(1))+L*(r1/4+r2/12)*2*pi*hside;
        K(ii(1),ii(2))=K(ii(1),ii(2))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
        K(ii(2),ii(1))=K(ii(2),ii(1))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
    end
end

```

```

K(ii(2),ii(2))=K(ii(2),ii(2))+L*(r1/12+r2/4)*2*pi*hside;
end
%верхняя поверхность фундамента
if z1==z2&&z1==3
L=abs(r2-r1);
K(ii(1),ii(1))=K(ii(1),ii(1))+L*(r1/4+r2/12)*2*pi*hup;
K(ii(1),ii(2))=K(ii(1),ii(2))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hup;
K(ii(2),ii(1))=K(ii(2),ii(1))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hup;
K(ii(2),ii(2))=K(ii(2),ii(2))+L*(r1/12+r2/4)*2*pi*hup;
end
%верхняя поверхность грунта
if z1==z2&&z1==0&&r1>=9&&r2>=9
L=abs(r2-r1);
K(ii(1),ii(1))=K(ii(1),ii(1))+L*(r1/4+r2/12)*2*pi*hupg;
K(ii(1),ii(2))=K(ii(1),ii(2))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hupg;
K(ii(2),ii(1))=K(ii(2),ii(1))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hupg;
K(ii(2),ii(2))=K(ii(2),ii(2))+L*(r1/12+r2/4)*2*pi*hupg;
end
%наклонная поверхность фундамента
if z1~=z2&&r1~=r2
L=((r2-r1)^2+(z2-z1)^2)^0.5;
K(ii(1),ii(1))=K(ii(1),ii(1))+L*(r1/4+r2/12)*2*pi*hside;
K(ii(1),ii(2))=K(ii(1),ii(2))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
K(ii(2),ii(1))=K(ii(2),ii(1))+L*(r1/12+r2/12)*2*pi*hside;
K(ii(2),ii(2))=K(ii(2),ii(2))+L*(r1/12+r2/4)*2*pi*hside;
end
end
P=zeros(np,1);%вектор нагрузки
for i=1:nt
ii(1)=t(1,i);%Номер первого узла
ii(2)=t(2,i);%Номер второго узла
ii(3)=t(3,i);%Номер третьего узла
ri=p(1,ii(1));
zi=p(2,ii(1));
rj=p(1,ii(2));
zj=p(2,ii(2));
rk=p(1,ii(3));
zk=p(2,ii(3));
bi=zj-zk;
bj=zk-zi;
bk=zi-zj;
ci=rk-rj;
cj=ri-rk;
ck=rj-ri;
A=0.5*det([1 ri zi
           1 rj zj
           1 rk zk]);

Pe=Q1(it)*pi*A/6*[2 1 1
                  1 2 1
                  1 1 2]*[ri;rj;rk];
if t(4,i)==1

```

```

        for m=1:3
            P(ii(m))=P(ii(m))+Pe(m);
        end
    end
end
    %Накладываем граничные условия на вектор нагрузки:
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i);
    ii(2)=e(2,i);
    r1=p(1,ii(1));
    r2=p(1,ii(2));
    z1=p(2,ii(1));
    z2=p(2,ii(2));
    %Боковая поверхность фундамента
    if r1==r2&&r1==2.85
        L=abs(z2-z1);
        P(ii(1))=P(ii(1))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r1+r2);
        P(ii(2))=P(ii(2))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r2+r1);
    end
    %Боковая поверхность грунта
    if r1==r2&&r1==9
        L=abs(z2-z1);
        P(ii(1))=P(ii(1))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r1+r2);
        P(ii(2))=P(ii(2))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r2+r1);
    end
    %Верхняя поверхность фундамента
    if z1==z2&&z1==3
        L=abs(r2-r1);
        P(ii(1))=P(ii(1))+2*pi*hup*Tmid*L/6*(2*r1+r2);
        P(ii(2))=P(ii(2))+2*pi*hup*Tmid*L/6*(2*r2+r1);
    end
    %Верхняя поверхность грунта
    if z1==z2&&z1==0&&r1>=9&&r2>=9
        L=abs(r2-r1);
        P(ii(1))=P(ii(1))+2*pi*hupg*Tmid*L/6*(2*r1+r2);
        P(ii(2))=P(ii(2))+2*pi*hupg*Tmid*L/6*(2*r2+r1);
    end
    %наклонная поверхность фундамента
    if z1~=z2&&r1~=r2
        L=((r2-r1)^2+(z2-z1)^2)^0.5;
        P(ii(1))=P(ii(1))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r1+r2);
        P(ii(2))=P(ii(2))+2*pi*hside*Tmid*L/6*(2*r2+r1);
    end
end

end
%Нижняя и боковая поверхность грунта
k=0;
i0=zeros(1,np);
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i);
    ii(2)=e(2,i);
    r1=p(1,ii(1));

```

```

r2=p(1,ii(2));
z1=p(2,ii(1));
z2=p(2,ii(2));
if z1==-2&&z2==-2
    k=k+2;
    i0(k)=ii(1);
    i0(k-1)=ii(2);
end
if r1==15&&r2==15
    k=k+2;
    i0(k)=ii(1);
    i0(k-1)=ii(2);
end
end
i0=unique(i0);
i0=i0(2:length(i0));
K0=K;
    K(i0,:)=0;
    for i=1:length(i0)
        P=P-K0(:,i0(i))*Tbot;
    end
    K(:,i0)=0;
    K1=K(any(K,2),any(K,1));
    C1=C(any(K,2),any(K,1));
    P1=P(any(K,2));
    indexes=find(any(K,1));
    T0=T0(indexes);
    P2=P1+C1/dt*T0;
    K2=K1+C1/dt;
    K2=sparse(K2);
    T=K2\P2;
    Trest=zeros(np,1);
    Trest(indexes)=T;
    Trest(i0)=Tbot;
    T0=Trest;
    Temp(it,:)=Trest;
    clc
    proc=fix(it/(nT+1)*100)
    Tmax(it)=max(abs(T));
    for i=1:np
        f=mn0*(A0m/ksib+ksi(i))*(ksib-ksi(i))*exp(-n_*ksi(i)/ksib);
        ksi_=f*exp(-5000/(Temp(it,i)+273));
        ksi(i)=ksi(i)+ksi_*dt;
    end
    Tdown(it)=Trest(1);
    Tup(it)=Trest(6);
end

time=time0:dt:time1;
Tmax(1)=Temp0;
Tup(1)=Temp0;
Tdown(1)=Temp0;

```

```
%вывод температур
plot(time/3600, Tmax, 'k');
hold on
plot(time/3600, Tup, 'b');
plot(time/3600, Tdown, 'r');
```

Подпрограмма расчета напряжений stress.m

```
temperature; %Решение задачи теплопроводности
%уменьшение числа шагов по времени в ndec раз
ndec=10;
nT1=nT/ndec;
indexes=1:ndec:nT+1;
Temp1=Temp(indexes,:);
nT=nT1;
dt=(time1-time0)/nT;
Temp=Temp1;
%%%
%Dанные для расчета напряжений
nu=0.2;%Коэффициент Пуассона бетона
Alpha=1e-5;%коэффициент температурного расширения
BV=25;%класс бетона
R28=(BV+12)*1e3;%прочность бетона при сжатии
aa=0.31;
bb=0.4;
Eg=300;%модуль упругости грунта, кПа
E=ones(nT+1,nt)*0.01;
R=zeros(nT+1,nt);
Rt=zeros(nT+1,nt);
ZB=zeros(nT+1,nt);
buf=zeros(1,nt);
E24=zeros(1,nt);
%Расчет прочностных и деформативных характеристик в зависимости от
%температуры
for it=1:nT+1
    tau=time0+(it-1)*dt;
    for k=1:nt
        if t(4,k)==1
            ii(1)=t(1,k);
            ii(2)=t(2,k);
            ii(3)=t(3,k);
            Tmean=(Temp(it,ii(1))+Temp(it,ii(2))+Temp(it,ii(3)))/3;
            if it~=1
                ZB(it,k)=ZB(it-1,k)+Tmean*dt;
            end
            if it~=1
                R(it,k)=R28*exp(0.35*(1-((15800-
122.5*ZB(it,k)/tau)/(ZB(it,k)/3600))^0.55));
            end
            if tau/3600>=24
                E(it,k)=1e6*(0.04*R(it,k)/1000+57)/(1+29/(3.8+0.8*R(it,k)/1000));
                if buf(k)==0
```

```

        ZB24=ZB(it-1,k)+(ZB(it,k)-ZB(it-1,k))/dt*(tau-24*3600);
        R24=real(R28*exp(0.35*(1-((15800-
122.5*ZB24/(24*3600))/(ZB24/3600))^0.55)));
        E24(k)=1e6*(0.05*R24/1000+57)/(1+29/(3.8+0.8*R24/1000));
        buf(k)=1;
    end
    end
    Rt(it,k)=0.29*(R(it,k)/1000)^0.6*1000;
else
    E(it,k)=Eg;
end
end
end
for it=1:nT+1
    tau=time0+(it-1)*dt;
    for k=1:nt
        if t(4,k)==1
            if it~=1&&tau<24*3600
                %E(it,k)=(tau)/24/3600*E24(k);
                E(it,k)=E24(k)*exp(1.348*(1-(24/(tau/3600))^1.438));
            end
        end
    end
end
sigma_r=zeros(1,nt);%вектор радиальных напряжений в элементах
sigma_t=zeros(1,nt); %вектор окружных напряжений в элементах
sigma_z=zeros(1,nt); %вектор напряжений по z
sigma_tm=zeros(1,nT+1);
Tau=zeros(1,nt); %вектор касательных напряжений
for it=2:nT+1
    P=zeros(1,2*np); %вектор нагрузки
    K=zeros(2*np,2*np); %матрица жесткости
    tau=time0+(it-1)*dt;
    if tau/3600>0.5
        if tau/3600-bb>0
            eps_sh1=-real((0.2*BB-2)*(aa*log(tau/3600-bb)*10^(-5)));
        else
            eps_sh1=0;
        end
        if (tau-dt)/3600-bb>0
            eps_sh0=-real((0.2*BB-2)*(aa*log((tau-dt)/3600-bb)*10^(-5)));
        else
            eps_sh0=0;
        end
    end
for i=1:nt
    if t(4,i)==1
        deps_sh=eps_sh1-eps_sh0;
    else
        deps_sh=0;
    end
end
BD; %Вызов подпрограммы для вычисления матриц [B] и [D]

```

```

Ke=B'*D*B*2*pi*rm*A; %Локальная матрица жесткости
%Сборка глобальной матрицы жесткости
for j=1:2
    for k=1:2
        for l=1:3
            for m=1:3
                K(2*ii(1)+j-2,2*ii(m)+k-2)=K(2*ii(1)+j-2,2*ii(m)+k-
2)+Ke(2*l+j-2,2*m+k-2);
            end
        end
    end
end
%Вычисление температурных деформаций
temp0=(Temp(it-1,ii(1))+Temp(it-1,ii(2))+Temp(it-1,ii(3)))/3;
Pe=B'*D*(Alpha*(temp-temp0)+deps_sh)*[1;1;1;0]*2*pi*rm*A;
%Локальный вектор нагрузки
%Сборка глобального вектора нагрузки
for j=1:2
    for l=1:3
        P(2*ii(1)+j-2)=P(2*ii(1)+j-2)+Pe(2*l+j-2);
    end
end
end
%Наложение граничных условий
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i); %номер первого узла ребра, попавшего на границу
    ii(2)=e(2,i); %номер второго узла ребра, попавшего на границу
    %Координаты начальной и конечной точки ребра:
    ri=p(1,ii(1));
    rj=p(1,ii(2));
    zi=p(2,ii(1));
    zj=p(2,ii(2));
    if (zi==zj&&zi==-2)
        for j=1:2
            K(2*ii(j),:)=0;
            K(:,2*ii(j))=0;
            K(2*ii(j),2*ii(j))=1;
            P(2*ii(j))=0;
        end
    end
    if (ri==rj&&ri==0)
        for j=1:2
            K(2*ii(j)-1,:)=0;
            K(:,2*ii(j)-1)=0;
            K(2*ii(j)-1,2*ii(j)-1)=1;
            P(2*ii(j)-1)=0;
        end
    end
end
end
%Решение СЛАУ МКЭ
K=sparse(K);
U=K\P';

```

```

%Вычисление напряжений
kk=0;
stm=zeros(1,nt);
Rm=zeros(1,nt);
kk1=0;
stm1=zeros(1,nt);
Rm1=zeros(1,nt);
kk2=0;
stm2=zeros(1,nt);
Rm2=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    if t(4,i)==1
        deps_sh=eps_sh1-eps_sh0;
    else
        deps_sh=0;
    end
    BD;
    temp0=(Temp(it-1,ii(1))+Temp(it-1,ii(2))+Temp(it-1,ii(3)))/3;
    %Локальный вектор перемещений
    Ue=zeros(4,1);
    for j=1:2
        for l=1:3
            Ue(2*l+j-2)=U(2*ii(l)+j-2);
        end
    end
    S=D*(B*Ue-(Alpha*(temp-temp0)+deps_sh)*[1;1;1;0]);
    sigma_r(i)=sigma_r(i)+S(1);
    sigma_z(i)=sigma_z(i)+S(2);
    sigma_t(i)=sigma_t(i)+S(3);
    Tau(i)=Tau(i)+S(4);
    if abs(rm)<0.08
        kk=kk+1;
        stm(kk)=sigma_t(i);
        szm(kk)=sigma_z(i);
        srm(kk)=sigma_r(i);
    end
end
sigma_tm(it)=max(stm);
sigma_zm(it)=max(szm);
sigma_rm(it)=max(srm);
end
clc
proc=fix(it/(nT+1)*100)

stmax(it)=max(sigma_t);
szmax(it)=max(sigma_z);
srmax(it)=max(sigma_r);
end
time=time0:dt:time1;
plot(time/3600,stmax);
hold on
for it=1:nT+1

```

```

kr=0;
sumR=0;
for i=1:nt
    if t(4,i)==1
        kr=kr+1;
        sumR=sumR+Rt(it,i);
    end
end
Rtmean(it)=sumR/kr;
end
plot(time/3600,Rtmean,'--');

```

Подпрограмма вычисления матриц [B] и [D] BD.m

```

ii(1)=t(1,i);%Номер первого узла
ii(2)=t(2,i);%Номер второго узла
ii(3)=t(3,i);%Номер третьего узла
temp=(Temp(it,ii(1))+Temp(it,ii(2))+Temp(it,ii(3)))/3; %Средняя
температура в элементе
%Координаты узлов КЭ
ri=p(1,ii(1));
zi=p(2,ii(1));
rj=p(1,ii(2));
zj=p(2,ii(2));
rk=p(1,ii(3));
zk=p(2,ii(3));
%Коэффициенты матрицы B
ai=rj*zk-rk*zj;
aj=rk*zi-zk*ri;
ak=ri*zj-rj*zi;
bi=zj-zk;
bj=zk-zi;
bk=zi-zj;
ci=rk-rj;
cj=ri-rk;
ck=rj-ri;
%Координаты центра элемента
rm=(ri+rj+rk)/3;
zm=(zi+zj+zk)/3;
%Площадь КЭ
A=0.5*det([1 ri zi
           1 rj zj
           1 rk zk]);
Ni=ai+bi*rm+ci*zm;
Nj=aj+bj*rm+cj*zm;
Nk=ak+bk*rm+ck*zm;
B=[[bi,0,bj,0,bk,0];[0,ci,0,cj,0,ck];[Ni/rm,0,Nj/rm,0,Nk/rm,0];[ci,b
i,cj,bj,ck,bk]]*1/2/A;
%Матрица упругих констант
D=E(it,i)/(1+nu)/(1-2*nu)*[1-nu nu nu 0
                          nu 1-nu nu 0
                          nu nu 1-nu 0
                          0 0 0 (1-2*nu)/2];

```