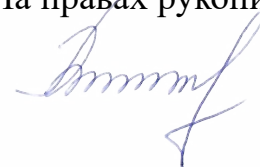


Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Донской государственный технический университет (ДГТУ)

На правах рукописи



Кузнецов Владимир Вячеславович

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
НЕОДНОРОДНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЦИЛИНДРОВ С
УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

2.1.9. Строительная механика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д-р техн. наук, доц.
С. В. Литвинов

Ростов–на–Дону — 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Состояние вопроса. Постановка задачи.....	12
1.1. Обзор работ, посвященных задачам механики неоднородных тел.....	12
1.2. Используемые гипотезы.....	16
1.3. Основные уравнения теории упругости, пластичности и ползучести.....	17
1.4. Вывод уравнений метода конечных элементов.....	21
1.4.1. Геометрическая составляющая (треугольный конечный элемент).....	21
1.4.2. Геометрическая составляющая (линейный конечный элемент).....	23
1.4.3. Физическая составляющая.....	24
1.4.4. Энергетическая составляющая.....	26
1.5. Учёт изменение модуля упругости материала.....	32
Глава 2. Исследование согласования различных зависимостей деформирования бетона с некоторыми экспериментальными данными для случая одноосного сжатия.....	33
2.1. Обзор материала.....	33
2.2. Материалы и методы.....	34
2.2.1. Методика построения кривых деформирования на основе уравнения Сарджина.....	35
2.2.2. Методика построения кривых деформирования на основе свода правил СП 63.13380.2018.....	36
2.2.3. Методика построения кривых деформирования на основе уравнения Г. А. Гениева.....	39
2.2.4. Методика построения кривых для экспериментальных данных....	45
2.3. Результаты расчёта.....	48
2.4. Методика учёта изменения модуля упругости бетона в зависимости от объёмного напряжённого состояния.....	56
2.5. Выводы по главе 2.....	60
Глава 3. Исследование напряжённо-деформированного состояния в бетонном цилиндре с учётом температурного поля.....	61
3.1. Влияние температурного воздействия на изменение модуля упругости бетона.....	61
3.2. Одномерные осесимметричные задачи с учётом неоднородности материала.....	64
3.3. Решение при помощи метода конечных элементов. Задача №1.....	69
3.3.1. Задача №1.1.....	69
3.3.2. Задача №1.2.....	73
3.4. Учёт армирования бетона. Задача №2.....	77

3.4.1. Задача №2.1.....	79
3.4.2. Задача №2.2.....	79
3.4.3. Задача №2.3.....	81
3.4.4. Задача №2.4.....	82
3.4.5. Задача №2.5.....	83
3.5. Выводы по главе 3.....	98
Глава 4. Изменение напряжённо-деформированного состояния в железобетонном цилиндре с учётом температурного нагружения и преднапряжения арматурных стержней.....	99
4.1. Железобетонная оболочка с внутренней преднапряжённой арматурой. Задача №3.....	99
4.1.1. Задача 3.1.....	101
4.1.2. Задача 3.2.....	102
4.1.3. Задача 3.3.....	104
4.1.4. Задача 3.4.....	105
4.1.5. Задача 3.5.....	106
4.2. Железобетонная оболочка с внешней стальной преднапряжённой арматурой. Сравнение с существующими решениями. Задача №4.....	121
4.3. Железобетонный цилиндр с внешней стальной преднапряжённой оболочкой. Задача №5.....	126
4.3.1. Задача 5.1.....	128
4.3.2. Задача 5.2.....	129
4.3.3. Задача 5.3.....	130
4.4. Итоги по главе 4.....	139
Заключение.....	140
Список литературы.....	142
Приложения. Свидетельства программ ЭВМ и свидетельства о внедрении результатов работы.....	150

Введение

Актуальность. Железобетонные конструкции представляют собой один из самых распространённых классов строительных элементов. В настоящее время и перспективу 80% всей номенклатуры строительных конструкций выполняются из железобетона, это колонны, балочные перекрытия, плиты перекрытия и покрытия и другое. С учётом особенностей эксплуатации отдельно можно выделить железобетонные конструкции цилиндрической формы, в качестве которых используются как слабо нагруженные трубы для колодцев, так и предназначенные для эксплуатации в экстремальных условиях водопроводные трубы под транспортными коммуникациями или конструкции — оболочки сухой защиты АЭС — подобные изделия могут работать при различных температурных режимах и больших значениях давления.

Задачи оптимизации строительных конструкций в настоящее время рассматриваются всё больше и больше в связи с развитием как аппаратного обеспечения современных компьютеров, так и существенных расширением возможностей программных комплексов. Подобные задачи могут решаться на использовании различных критериев: стоимости, оптимального сечения строительной конструкции, наиболее полного использования физико-механических характеристик бетона и арматуры и т. д. Последний критерий особенно важен для конструкций, которые под нагрузкой работают в объёмном напряжённом состоянии. В таких конструкциях напряжения по сечению распределяются неравномерно, предельное состояние может достигаться по одной оси, а по двум другим значительно меньше, что приводит к неполному использованию прочности материала и, как следствие, к его перерасходу. Поэтому одним из важных направлений в строительной механике признаётся разработка численных методов расчёта, позволяющих наиболее полно использовать физико-механические свойства материала. Внедрение таких методов способно обеспечить существенный экономический эффект, выражающийся либо в сокращении расхода материала при неизменных нагрузках, либо в повышении несущей способности конструкции при сохранении прежнего объёма материала.

Все расчёты основаны на определении напряжённо-деформированного состояния, возникающего в конструкции, а также различных критериях оценки прочности самой конструкции и оценки возможного развития несовершенств таких, как трещинообразование. Обеспечивается это полным анализом напряжённо-деформированного состояния, возникающего в конструкции под действием различных внешних факторов (давление, температурный градиент и т. д.). При этом для полноценного всестороннего анализа требуется учитывать нелинейную работу бетона, характерную даже для изделий из него при малых значениях нагрузжений. Данная нелинейность связана с развитием микротрещин в бетоне, а также другими факторами (геометрическая, конструктивная и монтажная нелинейности, ползучесть, усадка и релаксация в данной работе не рассматриваются).

Учёт реальной нелинейности работы материала при различных условиях нагружения способен существенно изменить картину распределения напряжений и развития деформаций в исследуемых железобетонных конструкциях в виде труб не только количественно, но, что особенно важно, и качественно. Таким образом, становится особенно *актуальным* вопрос моделирования напряжённо-деформированного состояния железобетонных труб в целом, учитывая работу каждого компонента железобетона, их взаимное влияние друг на друга, что приводит к образованию ослабленных зон, связанных с наличием растягивающих напряжений в бетоне, так и достижением предела прочности материала при сложном напряжённом состоянии.

Степень разработанности проблемы. Значительный вклад в теорию упругости неоднородных тел был внесён отечественными учёными, такими как В. И. Андреев, Б. И. Биргер, А. Т. Василенко, И. И. Гольденблат, А. М. Григоренко, А. Д. Коваленко, Г. Б. Колчин, Ю. М. Коляно, С. Г. Лехницкий, В. А. Ломакина, С. Г. Михлин, Н. Д. Панкратова, В. П. Плевако, Я. С. Подстригач, Н. А. Ростовцев и другие.

Широкий спектр задач механики неоднородных тел был также решён польскими исследователями: В. Олышаком, Я. Рыхлевским, В. Урбановским, К. Голец-

ким. Среди западных учёных данной проблемой занимались Б. Гейтвуд, Д. Л. Клементс, Х. Конвей и другие..

Многочисленные решения задач механики неоднородных тел представлены в работах академика В. И. Андреева и его учеников: [9], [45], [51], [70], [69]. В этих исследованиях рассматриваются, в частности, толстостенные цилиндры и сферы, подверженные различным видам воздействий. Неоднородность в таких задачах может быть обусловлена изменением модуля упругости материала из-за температурного градиента. Кроме того, в работах приводятся решения для железобетонных конструкций с неравномерным армированием.

Решение задач механики неоднородных тел, основано, как правило, на использовании строго численных методов применительно к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, поскольку учёт неоднородности, физической нелинейности делают аналитическое решение возможным лишь в крайне ограниченном классе задач, приоритетными являются численные подходы. Развитие численных методов в теории упругости и строительной механике было обеспечено трудами Дж. Аргириса, Н. П. Абовского, Л. Сегерлинда, И. Чанга, И. С. Березина, С. К. Годунова, М. В. Келдыша, А. А. Самарского, Г. И. Марчука, Дж. Ортеги, С. Г. Михлина, Р. С. Варги, Р. Куранта, О. Зенкевича и др.

Значительный вклад в развитие теории расчета железобетонных конструкций внес Н. И. Карпенко, который разработал общую теорию деформирования железобетона с трещинами. Созданная им модель стала главным методологическим каркасом для верификации численных методов расчета железобетонных конструкций и сооружений с учетом сложного комплекса факторов физической нелинейности, анизотропии и трещинообразования.

Основой физических условий расчёта являются диаграммы деформирования бетона и арматуры — представляющих собой нелинейную связь между напряжениями и деформациями (σ — ϵ), которые в теории железобетона составляют основу диаграммных методов расчёта.

На базе единой фундаментальной модели механики железобетона существенный вклад в развитие специализированных, прикладных теорий расчёта железобетонных конструкций с учётом особенностей эксплуатационных условий внесли: А. А. Дыховичный, Ю. П. Гуца, М. И. Додонов, В. Н. Байков, С. Х. Байрамуков, В. А. Ерышев, В. И. Колчунов, В. С. Фёдоров, А. Л. Кришан, О. Г. Кумпьяк, Д. Н. Лазовский, Ф. Леонгард, Р. Л. Маилян, Л. Р. Маилян и др., а также зарубежные исследователи: L. Saennz, B. Sinha, K. Gerstle.

Анализ литературных источников показал, что существующие исследования по оценке прочности и жёсткости железобетонных конструкций с учётом сложного комплекса факторов физической нелинейности, анизотропии и трещинообразования относятся к плоскостным и массивным конструкциям и не затрагивали научную задачу напряжённо-деформированного состояния железобетонных конструкции цилиндрической формы — оболочек, решение которой является актуальным.

Объект исследования: железобетонные конструкции цилиндрической формы.

Предмет исследования: напряжённо-деформированное состояние цилиндрических железобетонных оболочек при силовом и температурном воздействиях.

Цель работы: разработать расчётные модули для современных программных комплексов по оценке напряжённо-деформированное состояние железобетонных конструкций цилиндрической формы — оболочек при статических нагрузках и тепловых воздействиях.

Задачи работы:

1. Выполнить анализ опубликованных научных работ по рассматриваемой теме — методах расчёта железобетонных элементов, в том числе цилиндрической формы, работающих при объёмном напряжённо-деформированном состоянии, изучить существующие теоретические и экспериментальные исследования в области физической нелинейности бетона, а также определения их напряжённо-деформированного состояния.

2. На основе экспериментальных данных выявить особенности деформирования бетона при объёмном напряжённом состоянии.

3. Разработать алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния элемента железобетонной оболочки при силовом и температурном воздействии, а также изменения физико-механических свойств железобетона как функции напряжённого состояния и температуры.

4. Провести моделирование работы элемента железобетонной оболочки с учётом предварительного напряжения арматурных стержней или внешней стальной обоймы.

5. Разработать расчётные модули для современных программных комплексов по оценке напряжённо-деформированного состояния железобетонных конструкций цилиндрической формы — оболочек при статических нагрузках и тепловых воздействиях.

Научная новизна работы:

1. Проведённый анализ показал, что существующие методики расчёта железобетонных конструкций, работающих при объёмном напряжённом состоянии, не имеют единого алгоритма учёта изменения модуля деформации бетона при этом состоянии, что приводит к значительному расхождению теоретических моделей с экспериментальными результатами.

2. Предложена методика учёта изменения модуля деформации бетона при объёмном напряжённом состоянии, реализация которой в конечно-элементной модели показала появление ослабленных зон в бетоне, места появления которых не всегда очевидны.

3. Реализовано конечно-элементное моделирование задачи в среде Anaconda на языке Python определения напряжённо-деформированного состояния железобетонной оболочки при непосредственном учёте арматуры, в отличие от «традиционного размазывания» последней по сечению, а также валидация с известными решениями других авторов.

4. Выявлено существенное развитие зон концентрации напряжений и появление ослабленных зон при совместной работе бетона и преднапрягаемой сталь-

ной оболочки. При этом установлено существенное различие в работе конструкции цилиндрической формы при действии температурного градиента и без него..

Теоретическая значимость работы:

— Построен алгоритм расчёта элемента железобетонной конструкции цилиндрической формы — оболочки с учётом совместной работы бетона и арматуры, с учётом изменения физико-механических свойств бетона как функции температуры.

— Предложен учёт изменения модуля деформации бетона при объёмном напряжённо-деформированном состоянии.

— Выполнено определение для расчётных моделей напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций цилиндрической формы и математических выражений их описывающих.

Практическая значимость работы:

— Разработаны расчётные модули для современных программных комплексов по оценке напряжённо-деформированного состояния железобетонных конструкций цилиндрической формы — оболочек при статических нагрузках и тепловых воздействиях.

— Реализованы на основе свободных программных пакетов Python расчётные модули определения напряжённо-деформированного состояния элементов железобетонных конструкций цилиндрической формы при объёмном напряжённо-деформированном состоянии и учёте изменения физико-механических параметров связующего, что соответствует программе правительства по импортозамещению.

— Реализованы на языках программирования MatLab и Python расчётные модули определения напряжённо-деформированного состояния железобетонных конструкций цилиндрической формы, в том числе фундаментов, в составе ряде программ (приведены в приложении к диссертации).

Методология и методы исследования. Для получения решения поставленных задач в диссертационной работе использован численный метод — метод конечных элементов (далее — МКЭ). Реализация метода осуществлена созданием расчётных модулей, в том числе при помощи свободного программного обеспече-

ния (язык Matlab в среде Octave и Python 3.12 в среде Anaconda), конечно-элементная сетка генерировалась при помощи pygmsh (модуля gmsh в составе Python), что соответствует Указу Президента Российской Федерации В. В. Путина от 30.03.2022 г. № 166 «О мерах по обеспечению технологической независимости и безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации».

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Результаты сопоставления теоретических кривых деформирования бетона, построенных на основе нормативных документов и теории Г. А. Гениева, с некоторыми экспериментальными данными.
2. Алгоритм корректировки модуля деформации бетона для объёмного напряжённого состояния.
3. Алгоритмы расчёта элемента железобетонной оболочки с учётом совместной работы бетона и арматуры, с учётом изменения физико-механических свойств связующего как функции от напряжённого состояния и температурного поля.
4. Алгоритм расчёта элемента железобетонной оболочки с учётом предварительного напряжения арматурных стержней или внешней стальной обоймы.

Достоверность результатов обеспечивается: строгой математической постановкой задачи, проверкой выполнения граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений; сравнением результатов с экспериментальными данными других авторов.

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на: II Международной научной конференции «Новейшие достижения в архитектуре и строительстве 2024» (The II International Scientific Conference «Recent Advances in Architecture and Construction 2024»), г. Казань, 2024; Международной научной конференции «Промышленное и гражданское строительство» (International Scientific Conference Industrial and Civil Construction), г. Белгород, 2024; Международной научно-технической конференции «Строительство и Архитектура: Теория и практика инновационного развития» (CATPID–2024), г. Нальчик, 2024.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 6 печатных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, определенных ВАК РФ — 4, в изданиях, входящих в международные реферативные базы Scopus/Web of Science — 2.

Внедрение результатов работы. Имеется 2 свидетельства о регистрации программ ЭВМ и 1 технический акт внедрения результатов работы в ГК АКС-строй.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Изложена на 152 страницах машинописного текста и содержит 65 рисунков и 6 таблиц.

Соответствие работы паспорту научной специальности. В соответствии с паспортом специальности ВАК 2.1.9. Строительная механика работа включает следующие области исследований:

- п. 2: «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;
- п. 4: «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях».

Глава 1. Состояние вопроса. Постановка задачи

1.1. Обзор работ, посвященных задачам механики неоднородных тел

Механика неоднородных тел рассматривается как одно из ключевых направлений механики деформируемого твердого тела и строительной механики. В рамках линейной механики неоднородных тел основополагающим является закон Гука, при этом основные параметры, характеризующие физические свойства материала, представляются функциями координат точек тела. В законе Гука используются такие характеристики, как модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν . Возникновение неоднородности материала может быть обусловлено различными факторами, включая введение в состав материала определенных добавок, что приводит к изменению прочностных и деформативных характеристик. Кроме того, неоднородность может быть вызвана конструктивными особенностями или воздействием физических полей [34], [58].

Остальные соотношения классической теории упругости, такие как уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций и соотношения Коши, при решении задач для неоднородных тел остаются неизменными. Следовательно, основные уравнения как в перемещениях, так и в напряжениях могут быть получены теми же методами, что и в классической теории упругости [34], [58]. К числу первых работ, в которых были решены плоские задачи механики неоднородных тел, относятся исследования С. Г. Михлина [37], [36].

На сегодняшний день существует значительное количество работ, посвященных решению задач с учетом неоднородности, и их полный перечисление в рамках данного обзора представляется затруднительным. Один из полных обзоров работ по теории упругости неоднородных тел, был произведён в трудах [30], [29]. Наиболее полные постановки задач теории упругости неоднородных тел содержатся в работах [9], [34], [43]. Следует отметить, что в монографии [34] рассматриваются постановка и методы решения задач для тел с непрерывной неоднородностью, тогда как в работе [43] основное внимание уделено задачам для кусочно-неоднородных тел.

Как уже упоминалось, задачи механики неоднородных тел могут решаться как в напряжениях, так и в перемещениях [8], [7], [9], [34]. В ряде исследований решение задач теории упругости ищется с использованием функции напряжений [6], [34], [41]. Однако такой подход применим не всегда. В работе В. А. Ломакина [34] показано, что если материал конструкции обладает произвольной неоднородностью, то его описание с помощью функции напряжений в общем случае невозможно. Это связано с тем, что зачастую не удастся свести шесть уравнений совместности деформаций к трем уравнениям относительно функций напряжений. Тем не менее, для некоторых специфических видов неоднородности [34] применение функции напряжений позволяет существенно упростить решение. В случаях, когда неоднородность носит произвольный характер, получаемые разрешающие уравнения в напряжениях обладают сложной структурой, и их решение возможно только с использованием численных методов [9], [6].

Основные разрешающие уравнения задачи механики неоднородного тела в перемещениях при произвольных законах изменения свойств материала приводятся в работах [1], [6], [9], [13], [19], [20], [21] и других. Также при решении может использоваться задача смешанного типа, решение которой в общем случае сводится к шести уравнениям относительно шести неизвестных компонент тензоров перемещений и напряжений [23], [24], [60].

Сложность решения задач механики неоднородных тел заключается в том, что в общем случае они сводятся к системам дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Существуют приемы, позволяющие преодолеть эти трудности, после применения которых решение задач теории упругости для неоднородных тел может быть сведено к решению известных задач для однородного тела. Одним из наиболее распространенных методов является метод сопряжений [43]. Его суть заключается в замене непрерывно-неоднородного тела слоистым телом с кусочно-постоянной неоднородностью в каждом слое, при этом на стыке слоев должны быть удовлетворены граничные условия. Также при решении задач механики неоднородных тел используются методы, основанные на применении обобщенных функций. Основная особенность

этих методов заключается в возможности использования известных аналитических решений классической теории упругости для расчета неоднородных тел.

Непосредственное решение задач механики неоднородных тел в аналитической форме часто сопряжено со значительными математическими трудностями. Решения некоторых задач были получены благодаря применению специальных функций, описывающих неоднородность [6], [9], [34], [52]. Еще одним подходом к решению краевых задач механики неоднородных тел с использованием методов классической теории упругости является метод возмущений [34], [68], [67], [66]. Однако в случаях, когда отсутствует аналитическое решение вспомогательной задачи для неоднородного тела, эффективность метода возмущений снижается.

Несмотря на высокую эффективность перечисленных методов, они обладают рядом ограничений и применимы лишь для решения узкого круга задач. В настоящее время наибольшее распространение для решения подобных задач получили численные методы. К наиболее часто используемым относятся метод конечных разностей и метод конечных элементов. Достаточно высокую точность при решении задач, в которых напряжения и перемещения являются функциями только одной координаты, обеспечивают различные модификации методов, основанных на идее предиктора-корректора, включая семейство одношаговых методов Рунге–Кутты. В работах [24], [60] приведены решения одномерных задач для неоднородных тел с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Кроме того, при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений могут применяться многошаговые методы Гира. Более подробно эти методы рассмотрены в исследованиях [14], [42], [49], [56], [61], [64]. Указанные методы эффективно применяются при решении прямых задач механики неоднородных тел. Следует отметить, что для прямой задачи теории упругости получение решения является более сложным, чем для обратной. Некоторые решения обратных задач теории упругости представлены в работах [5], [4], [3], [7], [8], [9], [33], [34], [65], [70].

Например, в работе [70] и монографии [9] определяются законы распределения модуля упругости для толстостенного цилиндра, нагруженного внутренним и внешним давлением, при которых он является равнопрочным в соответствии с

первой и третьей теориями прочности. Аналогичная задача на основе второй и четвертой теорий прочности рассматривается в исследованиях [5], [44], [45]. Методика построения модели равнопрочного цилиндра на основе критерия прочности Баландина описана в работах [45], [73]. В статьях [4], [3] проводится оптимизация работы толстостенных оболочек, находящихся в температурном поле.

Во всех перечисленных работах в качестве варьируемой характеристики выступает модуль упругости. В диссертационном исследовании Б. М. Языева [70] описана методика создания цилиндров с переменным модулем упругости из дисперсно-наполненных полимеров. Суть методики заключается в смешивании полимерной массы с тонкодисперсным минеральным наполнителем с последующим помещением композиционного материала в цилиндрическую форму, вращающуюся в процессе отверждения полимера. Под действием центробежных сил твердая фаза смещается к периферии, что приводит к неравномерному распределению наполнителя по радиусу цилиндра и, как следствие, к изменению модуля упругости. Путем варьирования типа наполнителя, его процентного содержания и скорости вращения центрифуги может быть получен спектр зависимостей модуля упругости от радиуса, что позволяет приблизить функцию к требуемой.

Наиболее универсальным средством автоматизации расчётов является метод конечных элементов (МКЭ). Однако при решении нелинейных задач механики железобетона его использование не всегда удобно по следующим причинам: необходимость освоения специализированных программных комплексов; ограниченная возможность внесения изменений в расчётный аппарат из-за закрытости кода или незнания языков программирования; избыточность детализации напряжённо-деформированного состояния для конструкций, работа которых определяется одним-двумя опасными сечениями.

Поэтому оптимальным решением является использование МКЭ для получения усилий в сечении в рамках линейной теории, а для нелинейного расчёта железобетонного сечения — численного диаграммного метода на основе нелинейной деформационной модели (СП 63.13330.2018).

Диаграммный метод является упрощённым аналогом МКЭ, в котором изменением усилий по длине элемента пренебрегают, а влияние поперечных сил не учитывается [46]. Применение диаграммных методов в аналитическом виде затруднено, поэтому на практике используются численные методы, которые могут быть автоматизированы с применением ЭВМ. Для этого применяются дискретные деформационные модели.

Все расчётные модели силового сопротивления железобетона делятся на:

1. Интегральные модели — основаны на представлении сечения в виде небольшого числа компонентов с заданной функцией изменения напряжений или деформаций. К ним относятся модели В. М. Бондаренко [11], А. Б. Голышева [18], Б. С. Расторгуева [47], А. В. Боровских [12], В. И. Колчунова [17], В. С. Фёдорова [63], [62]. Интегральные модели применимы только для аналитического расчёта, а дискретные — для численного, что удобнее для автоматизации.

2. Дискретные модели — сечение представляется в виде множества компонентов с постоянными напряжениями и деформациями. Этот подход позволяет учитывать неоднородность материала, развитие трещин и реализовывать расчёт для различных типов железобетонных элементов. Развитию дискретных деформационных моделей посвящены работы В. Н. Байкова [10], Н. И. Карпенко [26], [25], А. И. Звездов [22] и др.

Нелинейные деформационные модели включены в нормы проектирования железобетонных конструкций в России, странах ЕС, США и Японии.

1.2. Использованные гипотезы

В диссертации использованы следующие гипотезы и допущения:

1. Полная относительная деформация представляет собой сумму составляющих её компонент: упругой, температурной, пластической, усадки и др.:

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_T + \varepsilon_{pl} + \varepsilon_{cr} + \varepsilon_{shr} + \varepsilon_{ps} + \dots, \quad (1.1)$$

где ε — полная относительная деформация; ε_{el} — упругая компонента (от «elastic» — упругий); ε_T — температурная деформация; ε_{pl} — пластическая деформация

(от «plastic» — пластический); ε_{cr} — деформация ползучести (от «creep» — ползучесть); ε_{shr} — деформация, связанная с усадкой материала; ε_{ps} — деформация, связанная с преднапряжением материала (от «prestressing» — преднапряжение).

2. Материал тела изотропен. В случае рассмотрения бетона пренебрегаем случайностью распределения отдельных больших частиц крупного заполнителя и считаем, что свойства материала во всех направлениях меняются одинаково.

3. Считаем контакт бетонного массива и стальной арматуры (или обоймы) абсолютным. То есть прочность соединения равна наименьшей прочности из материалов, возможным проскальзыванием двух материалов относительно друг друга пренебрегаем.

1.3. Основные уравнения теории упругости, пластичности и ползучести

Основные решения поставленных задач выполнены для цилиндров в системе координат, представленной на рисунке 1.1, а, с осями r , θ , z ; соответствующие перемещения вдоль осей обозначаются u , v и w . Представленные в работе задачи будут решаться двумя методами (схематизация представлена на рисунке 1.2): методом конечных разностей (МКР) и методом конечных элементов (МКЭ), алгоритм использования которых приведён в последующих главах.

В диссертации исследуются толстостенные цилиндры, которыми считаются тела, отвечающие условию

$$\frac{R_a - R_b}{R_b} \geq \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}. \quad (1.2)$$

Рассматриваются решения задач как в одномерной постановке, когда из тела «вырезается» цилиндрический элемент высотой dz , имеющий объём порядка $(R_a - R_b) d\theta dz$, деформации элемента происходят только вдоль оси r , так и в двумерной постановке, при которой вдоль оси z элемент имеет конечную высоту h .

Во всех случаях напряжённое состояние определяется тремя компонентами напряжения: радиальным σ_r , окружным σ_θ и осевым σ_z .

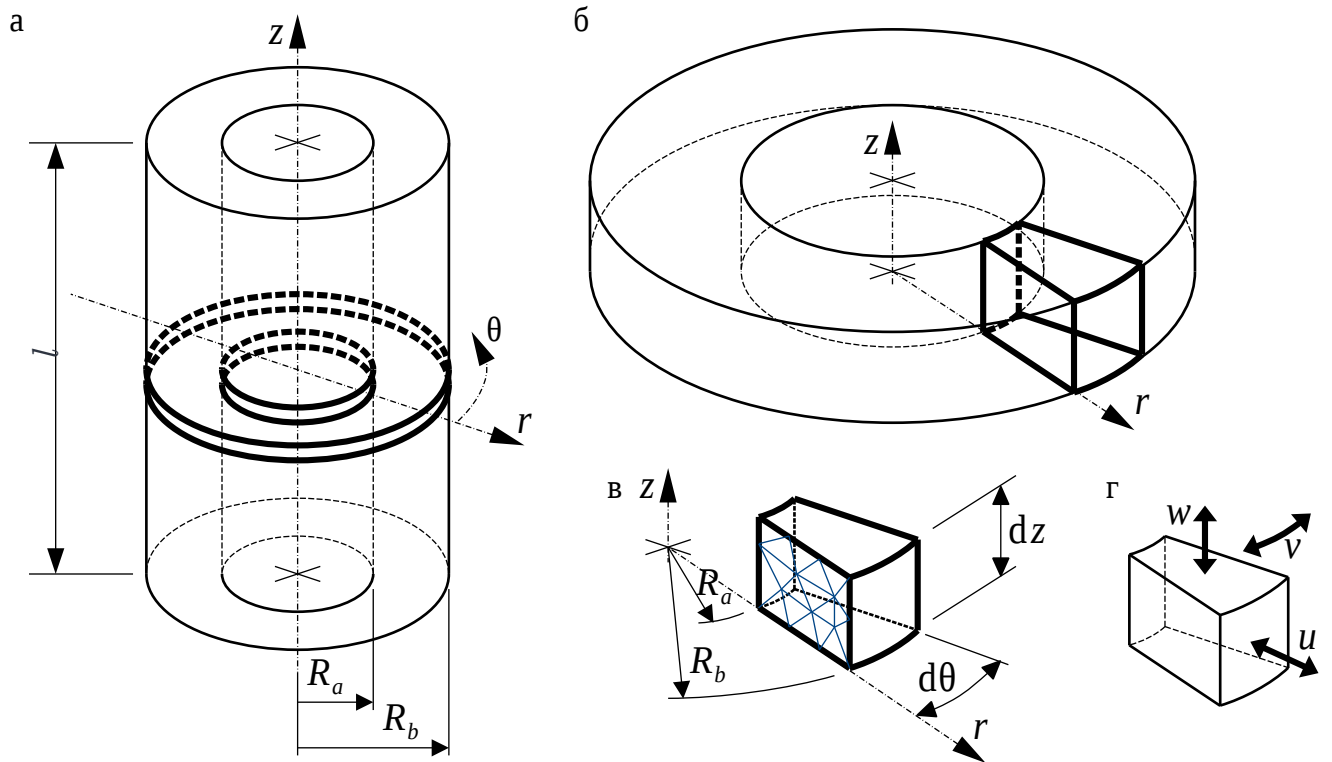


Рисунок 1.1 — Схема направления осей в цилиндрической системе координат

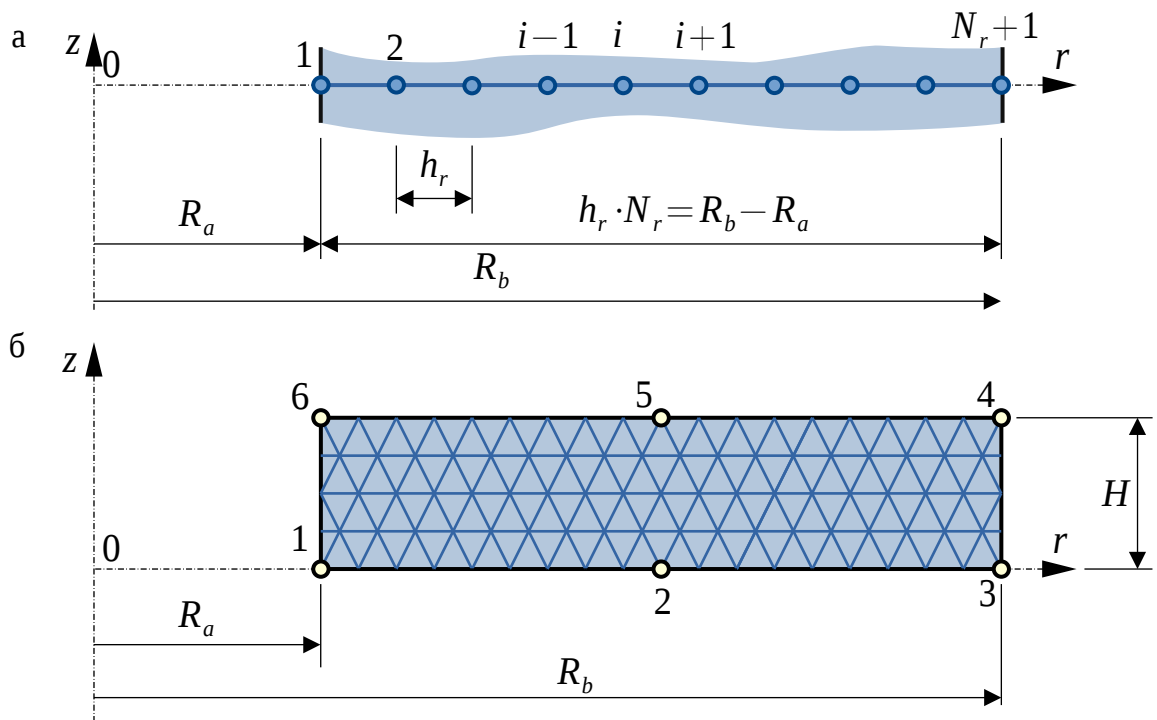


Рисунок 1.2 — Схематизация расчётной схемы для решения задач при помощи численных методов: а — МКР; б — МКЭ

Дифференциальные уравнения равновесия [50] (уравнения Навье):

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + R = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2 \tau_{\theta r}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \Theta = 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (r \tau_{zr}) + Z = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где R, Θ, Z — объёмные силы.

В случае решения задачи в двумерной постановке в осях rz , производная любой функции относительно оси θ будет равна нулю, следовательно, в осях rz уравнения (1.3) примут вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \frac{\sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + R = 0; \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} (r \tau_{zr}) + Z = 0. \quad (1.4)$$

Полная относительная деформация связана с абсолютными деформациями (перемещениями) через формулы Коши:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & r \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & -1 + r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & r \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ r \frac{\partial}{\partial z} & 0 & r \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Упругая компонента полной относительной деформации зависит от напряжения согласно закону Гука и в общем виде записывается:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{el,r} \\ \varepsilon_{el,\theta} \\ \varepsilon_{el,z} \\ \gamma_{el,r\theta} \\ \gamma_{el,\theta z} \\ \gamma_{el,rz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

где E — модуль упругости в случае расчёта по физически линейной модели, или модуль деформации в случае физически нелинейной модели $E = E(\phi)$, где ϕ — фактор, определяющий кривую деформирования материала, как правило — интенсивность относительной продольной деформации; ν — коэффициент Пуассона, принимаемый, как правило, неизменной величиной при нагрузках, гораздо ниже тех, при которых происходит дилатация бетона — увеличение объёма материала (образца) при осевом и многоосном сжатии в стадиях, близких к разрушению.

В матричном виде (1.6) записывается

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma},$$

откуда выражаются напряжения через упругую деформацию

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{el}. \quad (1.7)$$

В выражении (1.7) матрица $\mathbf{D}$ является обратной для матрицы $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{H}^{-1} = & \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \\ = & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В практических расчётах удобно полную относительную деформацию (1.1) представлять как сумму компонент упругой и вынужденной

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ps}, \quad (1.9)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} = \boldsymbol{\varepsilon}_T + \boldsymbol{\varepsilon}_{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}_{cr} + \boldsymbol{\varepsilon}_{shr} + \dots$ — вынужденная деформация.

В общем случае при наличии вынужденной деформации напряжения представляются через деформации следующим образом

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{el} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ps} &\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{ps} \rightarrow \\ \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} + \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ps} &\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} - \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{ps}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения между матрицами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ (1.7), окончательно

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ps}). \quad (1.10)$$

1.4. Вывод уравнений метода конечных элементов

1.4.1. Геометрическая составляющая (треугольный конечный элемент)

В настоящей диссертационной работе рассматривается традиционный треугольный конечный элемент (рисунок 1.3,а) с узлами i, j, k и линейными перемещениями u (вдоль оси r) и w (вдоль оси z).

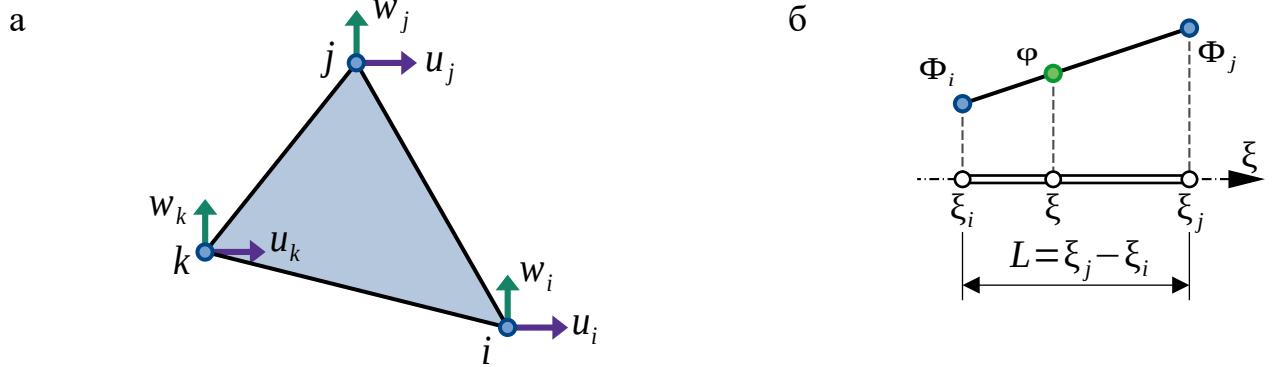


Рисунок 1.3 — Треугольный (а) и линейный (б) конечные элементы

Для описания произвольной функции $\phi(r, z)$ по конечному элементу используется традиционный полином

$$\varphi(r, z) = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z = \begin{bmatrix} 1 & r & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

где в узлах треугольного конечного элемента искомая функция принимает значения

$$\varphi(R_i, Z_i) = \Phi_i; \quad \varphi(R_j, Z_j) = \Phi_j; \quad \varphi(R_k, Z_k) = \Phi_k. \quad (1.12)$$

Или, иначе, с учётом (1.11), (1.12) можно записать в матричном виде

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & R_i & Z_i \\ 1 & R_j & Z_j \\ 1 & R_k & Z_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}}, \quad (1.13)$$

или

$$\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Phi}. \quad (1.14)$$

Отсюда

$$\mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (1.15)$$

где

$$\mathbf{r}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} R_j Z_k - R_k Z_j & R_k Z_i - R_i Z_k & R_i Z_j - R_j Z_i \\ Z_j - Z_k & Z_k - Z_i & Z_i - Z_j \\ R_k - R_j & R_i - R_k & R_j - R_i \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

А удвоенная площадь треугольного конечного элемента может быть найдена через определитель из координат узлов

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & R_i & Z_i \\ 1 & R_j & Z_j \\ 1 & R_k & Z_k \end{vmatrix} = R_i Z_j - R_i Z_k - R_j Z_i + R_j Z_k + R_k Z_i - R_k Z_j. \quad (1.17)$$

Полученное в выражении (1.15) значения $\boldsymbol{\alpha}$ подставляется в исходное уравнение (1.11)

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 & r & z \end{bmatrix} \mathbf{r}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Phi}, \quad (1.18)$$

где вектор $\mathbf{N}$ равен

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= [N_i \quad N_j \quad N_k]; \\
N_i &= \frac{1}{2A} [r(Z_j - Z_k) + z(R_k - R_j) + (R_j Z_k - R_k Z_j)]; \\
N_j &= \frac{1}{2A} [r(Z_k - Z_i) + z(R_i - R_k) + (R_k Z_i - R_i Z_k)]; \\
N_k &= \frac{1}{2A} [r(Z_i - Z_j) + z(R_j - R_i) + (R_i Z_j - R_j Z_i)].
\end{aligned} \tag{1.19}$$

1.4.2. Геометрическая составляющая (линейный конечный элемент)

Некоторые соотношения связаны с линейной аппроксимацией функции, для чего используется линейный конечный элемент (рисунок 1.3,б).

Для описания произвольной функции $\varphi(\xi)$, где $\xi = r, z$, по конечному элементу используется полином

$$\varphi(\xi) = \alpha_1 + \alpha_2 \xi = [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

где в узлах треугольного конечного элемента искомая функция принимает значения

$$\varphi(\xi, Z_i) = \Phi_i; \quad \varphi(\xi_j) = \Phi_j. \tag{1.21}$$

Или, иначе, с учётом (1.20), (1.21) можно записать в матричном виде

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \xi_i \\ 1 & \xi_j \end{bmatrix}}_{\xi} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}}_{\Phi}, \tag{1.22}$$

или

$$\xi \cdot \alpha = \Phi. \tag{1.23}$$

Отсюда

$$\xi^{-1} \cdot \xi \cdot \alpha = \xi^{-1} \cdot \Phi \quad \rightarrow \quad \alpha = \xi^{-1} \cdot \Phi, \tag{1.24}$$

где

$$\xi^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \xi_j & -\xi_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.25}$$

где $L = \xi_j - \xi_i$ — длина конечного элемента.

Полученное в выражении (1.24) значения α подставляется в исходное уравнение (1.20)

$$\varphi = [1 \quad \xi] \xi^{-1} \cdot \Phi = N \cdot \Phi, \quad (1.26)$$

где вектор N равен

$$N = [N_i \quad N_j] = \frac{1}{L} [\xi_j - \xi \quad \xi - \xi_i]. \quad (1.27)$$

1.4.3. Физическая составляющая

Физические уравнения рассматривают связь деформаций с напряжениями (1.6) или, наоборот, — напряжений с деформациями (1.10).

С учётом представленной на рисунке 1.1 расчётной схемы в рассматриваемых задачах расчёт будет проводиться в осесимметричной постановке, в плоскости $r-z$, через три осевые компоненты ε_r , ε_θ , ε_z и одну сдвиговую γ_{rz} . Тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{el,r} \\ \varepsilon_{el,\theta} \\ \varepsilon_{el,z} \\ \gamma_{el,rz} \end{bmatrix}}_{\varepsilon_{el}} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}}_{\sigma}; \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_{el} = N \cdot \sigma.$$

А его обратная форма из (1.7) и (1.8) запишется

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{el,r} \\ \varepsilon_{el,\theta} \\ \varepsilon_{el,z} \\ \gamma_{el,rz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{el}}. \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{el};$$

Далее рассматривается полная относительная деформация (1.9), которая определяется через уравнения Коши (1.5)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & r \frac{\partial}{\partial z} \\ r \frac{\partial}{\partial z} & r \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Здесь в рамках осесимметричной постановки задачи в плоскости $r-z$ принято, что осевое перемещение v вдоль оси θ равно 0 и, следовательно, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$.

Перемещения $u^{(e)}$ и $w^{(e)}$ в границах конечного элемента будут определяться согласно выражению (1.18)

$$\begin{bmatrix} u^{(e)} \\ w^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_k \\ W_k \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

или

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}. \quad (1.32)$$

Следовательно, с учётом выражения для перемещения в границах конечного элемента (1.32), полная продольная деформация запишется

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{bmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & r \frac{\partial}{\partial z} \\ r \frac{\partial}{\partial z} & r \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(e)} \\ w^{(e)} \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & r \frac{\partial}{\partial z} \\ r \frac{\partial}{\partial z} & r \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_k \\ W_k \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial r} & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & \frac{N_j}{r} & 0 & \frac{N_k}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ W_i \\ U_j \\ W_j \\ U_k \\ W_k \end{bmatrix}. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Полученное выражение для интерполяции в рамках конечного элемента полной продольной деформации от значения перемещений в узлах в матричном виде записывается

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}. \quad (1.34)$$

1.4.4. Энергетическая составляющая

Полная энергия системы $\mathcal{E}$ равна разности между энергией упругой деформации тела Π и работой внешних сил W_A

$$\mathcal{E} = \Pi - W_A. \quad (1.35)$$

Согласно принципу минимума потенциальной энергии Лагранжа, для отыскания перемещений $\mathbf{U}$ системы (1.35), при которых система находится в равновесии, необходимо найти минимум этой системы, т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{U}} = 0. \quad (1.36)$$

Рассмотрим подробнее энергию упругой деформации тела Π , которая определяется выражением в общем случае

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,z} + \tau_{r\theta} \gamma_{el,r\theta} + \tau_{\theta z} \gamma_{el,\theta z} + \tau_{zr} \gamma_{el,zr}) dV. \quad (1.37)$$

С учётом представленной на рисунке 1.1 расчётной схемы в дальнейшем перемещения v вдоль оси θ исключаются, как и производные $\partial/\partial\theta$. Следовательно выражение (1.37) для метода конечных элементов запишется

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{el} dV, \quad (1.38)$$

где вектор напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ и компонента упругой относительной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$ определяются согласно (1.29).

Из выражения (1.9) компонента упругой относительной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}_{el}$ определяется

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ps}. \quad (1.39)$$

С учётом (1.34), выражения (1.39) и (1.41) записываются

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{el} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ps}; \quad (1.40)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ps}) = \mathbf{D}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вын}}) - \boldsymbol{\sigma}_{ps}. \quad (1.41)$$

Перед подстановкой вектора напряжений (1.40) в (1.38), необходимо учесть правила транспонирования матричных произведений

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T,$$

тогда (1.41) при транспонировании запишется

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}}^T \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\sigma}_{ps}^T. \quad (1.42)$$

Здесь для изотропных материалов $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$.

Энергию упругой деформации тела Π (1.38) с учётом (1.40) и (1.42) записывается

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \left(\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}}^T \cdot \mathbf{D} - \boldsymbol{\sigma}_{ps}^T \right) \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \left(\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \right. \\ &\quad \left. + \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} + \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} - \boldsymbol{\sigma}_{ps}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} + \boldsymbol{\sigma}_{ps}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} + \boldsymbol{\sigma}_{ps}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Здесь, согласно (1.7), $\mathbf{D} = \mathbf{H}^{-1}$, тогда множитель $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps}$ примет вид $\mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps}$.

Минимум потенциальной энергии Π (1.43) относительно линейных перемещений $\mathbf{U}$ запишется

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \int_V \left(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) dV. \quad (1.44)$$

Согласно представленной на рисунке 1.1 расчётной схеме будем рассматривать конечный элемент, повёрнутый вдоль оси θ на угол 2π радиан. Следовательно, при переходе к численной модели объём конечного элемента составит

$$dV = 2\pi \cdot A \cdot r. \quad (1.45)$$

Тогда, выражение (1.44) принимает вид

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \left(\bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U} - \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) 2\pi \cdot A \cdot \bar{r}, \quad (1.46)$$

где штрих « $\bar{}$ » над параметрами, входящими в выражение (1.46) говорит, что эти параметры определяются для координаты в центре тяжести элемента, т. е.

$$\bar{r} = \frac{R_i + R_j + R_k}{3}; \quad \bar{z} = \frac{Z_i + Z_j + Z_k}{3}. \quad (1.47)$$

Минимум энергии системы (1.36) с учётом (1.46) записывается

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathbf{U}} = \left(\bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{U} - \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) 2\pi \cdot A \cdot \bar{r} - \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (1.48)$$

И приводится к виду

$$k^{(e)} \cdot \mathbf{U}^{(e)} = f^{(e)}, \quad (1.49)$$

где $k^{(e)}$ и $f^{(e)}$ — соответственно матрица жёсткости и вектор нагрузки конечного элемента (локальные) и равны

$$\begin{aligned} k^{(e)} &= \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \bar{\mathbf{B}}; \\ f^{(e)} &= \left(\bar{\mathbf{B}}^T \cdot \bar{\mathbf{D}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{вын}} - \bar{\mathbf{B}}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ps} \right) 2\pi \cdot A \cdot \bar{r} - \frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Необходимо отметить, что в выражении (1.50) матрица $\bar{\mathbf{B}}$ включает в себя (1.33), (1.34) слагаемые $\bar{r}$ и $\bar{z}$ (1.47), определяемые в центре тяжести элемента. В случае изотропного материала, когда свойства тела в каждой точке одинаковые, матрица $\bar{\mathbf{D}}$ будет константой. Если же свойства тела непостоянны, например, в результате неравномерного температурного поля, что приводит к изменению модуля деформации материала, матрица определяется так же для центральной точки, тогда для определения $\bar{\mathbf{D}}$, входящий в неё модуль деформации составит

$$\bar{E} = \frac{E_i + E_j + E_k}{3}. \quad (1.51)$$

Рассмотрим работу внешних сил $\partial W_A / \partial \mathbf{U}$ в выражении (1.50), которая в общем виде разделяется на работу объёмных и плоских сил:

$$\frac{\partial W_A}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[\int_V (R \cdot u + \Theta \cdot v + Z \cdot w) dV + \int_S (\bar{R} \cdot u + \bar{\Theta} \cdot v + \bar{Z} \cdot w) dS \right], \quad (1.52)$$

где S — площадь поверхности элемента между узлами; R, Θ, Z — проекции на оси координат объёмных сил; $\bar{R}, \bar{\Theta}, \bar{Z}$ — проекции на оси координат площадных сил.

В настоящей диссертационной работе объёмные силы не учитываются. Рассмотрим действие на поверхность равномерно распределённой нагрузки q : её вертикальную $q_{\text{верт}}$ и горизонтальную $q_{\text{гор}}$ компоненты (рисунок 1.4, а).

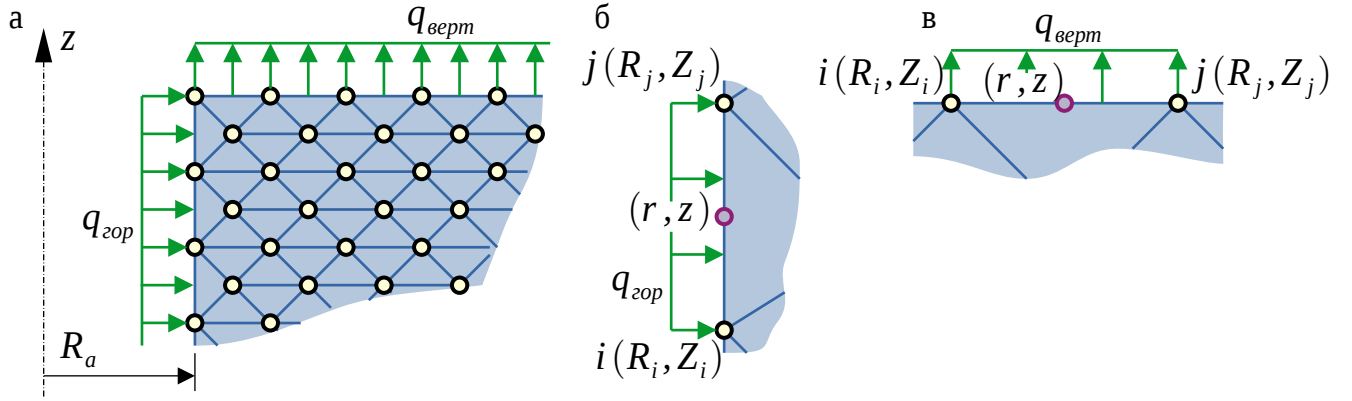


Рисунок 1.4 — К заданию поверхностных нагрузок

Работа горизонтальной компоненты q_{zop} равномерно распределённой нагрузки на вертикальную поверхность тела (рисунок 1.4, б) определяется

$$W_A(q_{zop}) = 2\pi \int_{Z_i}^{Z_j} q_{zop} \cdot u(z) \cdot r \, dZ, \quad (1.53)$$

Где произведение $2\pi \cdot r \cdot dZ$, представляет собой площадь поверхности конечного элемента, на которую прилагается равномерно распределённая нагрузка q_{zop} .

В выражении (1.53) интерполяция перемещения $u(z)$ между двумя узлами i и j производится при помощи интерполяции (1.26)

$$\begin{aligned} W_A(q_{zop}) &= 2\pi \int_{Z_i}^{Z_j} q_{zop} \cdot \left[\frac{Z_j - z}{Z_j - Z_i} \quad \frac{z - Z_i}{Z_j - Z_i} \right] \cdot \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \cdot r \, dZ = \\ &= 2\pi \frac{q_{zop} \cdot r \cdot (R_i + R_j)}{2} (Z_j - Z_i) \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

При действии q_{zop} на строго вертикальную поверхность $r = R_i = R_j$ и с учётом $Z_j - Z_i = L$ (где L — длина ребра конечного элемента между узлами i и j) тогда окончательно выражение (1.54) принимает вид

$$W_A(q_{zop}) = 2\pi \frac{q_{zop} \cdot R_i \cdot L}{2} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

Работа горизонтальной компоненты q_{vert} равномерно распределённой нагрузки на горизонтальную поверхность тела (рисунок 1.4, в) определяется

$$W_A(q_{верт}) = 2\pi \int_{Z_i}^{Z_j} q_{гор} \cdot w(r) \cdot r \, dr, \quad (1.56)$$

Где произведение $2\pi \cdot r \cdot dr$, представляет собой площадь поверхности конечного элемента, на которую прилагается равномерно распределённая нагрузка $q_{верт}$.

В выражении (1.56) интерполяция перемещения $w(r)$ между двумя узлами i и j производится при помощи интерполяции (1.26)

$$\begin{aligned} W_A(q_{верт}) &= 2\pi \int_{R_i}^{R_j} q_{верт} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R_j - r}{R_j - R_i} & \frac{r - R_i}{R_j - R_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \end{bmatrix} \cdot r \, dr = \\ &= 2\pi \frac{q_{верт} (R_j - R_i)}{6} \begin{bmatrix} R_j + 2R_i & 2R_j + R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

С учётом $R_j - R_i = L$ (где L — длина ребра конечного элемента между узлами i и j) тогда окончательно выражение (1.57) принимает вид

$$W_A(q_{верт}) = 2\pi \frac{q_{верт} \cdot L}{6} \begin{bmatrix} R_j + 2R_i & 2R_j + R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

При подстановке в выражение (1.52) значения работ горизонтальной компоненты (1.55) вертикальной компоненты (1.58), а также последующей минимизации по узловым перемещениям

$$\frac{\partial W_A(q_{гор})}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left[2\pi \frac{q_{гор} \cdot R_i \cdot L_{верт}}{2} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \right] = 2\pi \frac{q_{гор} \cdot R_i \cdot L_{верт}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_A(q_{верт})}{\partial \mathbf{U}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left\{ 2\pi \frac{q_{верт} \cdot L_{гор}}{6} \begin{bmatrix} R_j + 2R_i & 2R_j + R_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_i \\ W_j \end{bmatrix} \right\} = \\ &= 2\pi \frac{q_{верт} \cdot L_{гор}}{6} \begin{bmatrix} R_j + 2R_i \\ 2R_j + R_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

После определения локальной матрицы жёсткости $k^{(e)}$ и вектора нагрузок $f^{(e)}$ для каждого элемента, собираются глобальная матрица жёсткости $\mathbf{K}$ и вектор нагрузок $\mathbf{F}$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (1.61)$$

где вектор перемещений $\mathbf{U}$ равен

$$\mathbf{U} = [u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \ \cdots \ u_i \ w_i \ \cdots \ u_{n-1} \ w_{n-1} \ u_n \ w_n]^T. \quad (1.62)$$

В выражении (1.62) n — общее количество узлов;

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N k^{(e)}; \quad (1.63)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N f^{(e)}, \quad (1.64)$$

где N — количество конечных элементов.

1.5. Учёт изменение модуля упругости материала

Модуль упругости материала в общем случае не является величиной постоянной.

$$E = E_0 \cdot \prod_{i=1}^N k_i, \quad (1.65)$$

где E_0 — начальный модуль упругости (при $\varepsilon \rightarrow 0$); k_i — коэффициент, учитывающий влияние на модуль упругости внешних факторов: температуры, изменения напряжённо-деформированного состояния и т. д.; N — общее количество факторов, вызывающих изменение значения изначального модуля упругости материала.

Глава 2. Исследование согласования различных зависимостей деформирования бетона с некоторыми экспериментальными данными для случая одноосного сжатия

Существуют различные уравнения описывающие кривые напряжений и деформаций бетона друг от друга. При этом они дают несколько отличные между собой теоретические кривые. Важным для науки является вопрос наибольшего согласования с экспериментальными данными. Теория Гениева изначально включает в себя уравнения для трёх компонентов напряжений и деформаций. Уравнения по Еврокоду и своду правил приводятся для одномерного напряжённого состояния. В статье приводится сопоставление теоретических кривых для одноосного сжатия на основе уравнений Еврокода, свода правил и теории Гениева с некоторыми экспериментальными результатами испытаний образцов в виде призм и кубов. Приводятся результаты анализа отклонения точки с максимальным напряжением теоретических кривых от соответствующих экспериментальных. Численно анализ приведён как по напряжениям, так и по деформациям. Отличительной особенностью от имеющихся работ по работе с уравнениями теории Гениева является то, что они приведены к некоторому разрешающему виду, включающему в себя три параметра: прочность бетона на сжатие, на растяжение, а также начальный модуль упругости.

2.1. Обзор материала

Изучение связи напряжений и деформаций бетона очень важно как с практической, так и с научной точек зрения. Существуют несколько методик, позволяющие построить теоретические кривые, однако, результат подобных подходов отличается друг от друга. В настоящее время можно выделить следующие подходы, достаточно распространённые в практике и в открытой печати:

— Уравнение Сарджина, на основе которого подготовлены нормы Еврокода. Используется за рубежом [77] и в некоторых государствах бывшего СССР, например, в Белоруссии [59], Казахстане [55] и т. д..

— Свод правил. Используется на территории Российской Федерации [54].

— Уравнение Г. А. Гениева. Используется в научных публикациях [16].

Необходимо отметить, что в ряде стран СНГ нормативные документы продолжают наследие СССР, например, в Узбекистане нормативный документ по проектированию бетонных и железобетонных конструкций [27] основан на СНиП 2.03.01-83*. Отечественный свод правил СП 51-101-2003 лежит в основе подобного нормативного документа, используемого во Вьетнаме [78].

Все вышеперечисленные нормативные документы используют свою «собственную» индексацию различных параметров, даже совпадающих между собой по смыслу. В нормативных документах [77], [74], [72], [71] используется обозначение f_{ck} нормативной прочности бетона на сжатие цилиндров возрасте 28 сут, имеющие размеры 150×300 мм; это же обозначение в документах [79], [75], [76] используется для прочности бетона на сжатие кубов 150×150×150 мм в возрасте 28 суток.

В работе приводится построение теоретических кривых на основе нормативных документов [77], [59], [55], [54], [16], производится сравнение между собой полученных результатов, а также сопоставление с экспериментальными данными, взятыми из диссертационных работ [39], [35], [57].

В источниках экспериментальных данных [39], [57] кривые деформирования построены при испытании на сжатие призматических образцов 100×100×400 мм, по этим же образцам определён класс бетона. В работе [35] кривые деформирования построены при испытании на сжатие призматических образцов 100×100×400 мм, однако, для определения класса бетона использованы образцы кубического сечения 100×100×100 мм.

Таким образом, представляет интерес сопоставление между собой различных норм проектирования и сравнение полученного результата с известными экспериментальными данными.

2.2. Материалы и методы

При рассмотрении методов получения кривых бетона напряжений и деформаций рассматривается одноосное сжатие образца, растяжение не рассматривает-

ся. При этом для удобства сжимающие напряжения и соответствующие им значения относительной деформации принимаются со знаком «+».

Все приведённые методы были численно реализованы на языке Python в среде JupyterLab. При работе с нормативными документами использованы функции линейной интерполяции для поиска промежуточных значений табличных величин при помощи функции `interp1d`, входящей в пакет `scipy.interpolate`.

2.2.1. Методика построения кривых деформирования на основе уравнения Сарджина

Как было указано ранее, в нормативных документах на основе формулы Сарджина [77], [59], [55] одним из основных параметров является f_{ck} (нормативная прочность бетона на сжатие в возрасте 28 сут), однако основные формулы строятся на основе параметра f_{cm} (среднего значения цилиндрической прочности бетона на сжатие); связь между этими двумя параметрами имеет вид

$$f_{cm} = f_{ck} + 8, \text{ МПа.} \quad (2.1)$$

Связь между сжимающим напряжением σ_c и соответствующей ему относительной продольной деформацией ε_c имеют записывается

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \quad (2.2)$$

где $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$; ε_{c1} — относительная продольная деформация при максимальном (пиковом) значении напряжения, является табличной величиной как функция от f_{cm} (или от f_{ck});

$$k = 1.05 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{c1}|}{f_{cm}}; \quad (2.3)$$

здесь E_{cm} — начальный модуль упругости бетона.

Кривая зависимости напряжений и деформаций строится в интервале последнего $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$, где $|\varepsilon_{cu1}|$ представляет собой номинальную предельную относительную деформацию, принимаемую в зависимости от f_{cm} (или от f_{ck}).

Алгоритм построения кривой деформирования на основе уравнения Сарджина следующий:

1. Определяется значение параметра f_{cm} .
2. По таблицам нормативного документа в зависимости от значения f_{cm} интерполяцией определяются параметры E_{cm} , ε_{c1} и ε_{cu1} .
3. По формуле (2.3) определяется коэффициент k .
4. Создаётся массив относительной продольной деформации ε_c из 1000 элементов, значения которого равномерно возрастают от 0 в первом элементе до $|\varepsilon_{cu1}|$ в последнем; каждый элемент полученного массива обозначается $\varepsilon_{c,i}$.
5. Создаётся массив напряжения σ_c , состоящий как и ε_c из 1000 элементов; каждый элемент полученного массива обозначается $\sigma_{c,i}$ и на основе формулы (2.2) определяется как

$$\sigma_{c,i} = \frac{k \left(\frac{\varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{c1}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{c1}} \right)^2}{1 + (k-2) \cdot \left(\frac{\varepsilon_{c,i}}{\varepsilon_{c1}} \right)} \cdot f_{cm}. \quad (2.4)$$

2.2.2. Методика построения кривых деформирования на основе свода правил СП 63.13380.2018

С учётом принятого ранее правила знаком (сжимающие напряжения и деформации положительные, растягивающие отрицательные), согласно своду правил для случая одноосного и однородного сжатия бетона относительные продольные деформации ε_b определяются при помощи выражения

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b \cdot \nu_b}, \quad (2.5)$$

где ε_b — напряжение; E_b — начальный модуль упругости; ν — коэффициент изменения секущего модуля

$$\nu_b = \hat{\nu}_b \pm (\nu_0 - \hat{\nu}_b) \sqrt{1 - \omega_1 \nu - \omega_2 \nu^2}, \quad (2.6)$$

здесь $\hat{v}_b$ — значение коэффициента в вершине диаграммы (при $\sigma_b = \hat{\sigma}_b$); $v_0 = 1$ — начальный коэффициент изменения секущего модуля; ω_1, ω_2 — коэффициенты, характеризующие полноту диаграммы материала, $\omega_2 = 1 - \omega_1$.

Диаграмма деформирования бетона строится в два этапа: отдельно восходящая ветвь, отдельно нисходящая. Для обеих ветвей диаграммы принимают с учётом принятого правила знаков

$$\hat{\sigma}_b = R_{b,ser}; \quad \hat{v}_b = \hat{\sigma}_b / (\hat{\varepsilon}_b E_b); \quad \eta = \sigma_b / \hat{\sigma}_b. \quad (2.7)$$

Для восходящей ветви

$$v_0 = 1; \quad \omega_1 = 2 - 2.5\hat{v}_b. \quad (2.8)$$

Для нисходящей ветви

$$v_0 = 2.05\hat{v}_b; \quad \omega_1 = 1.9\hat{v}_b - 0.138. \quad (2.9)$$

В одно из уравнений (2.7) входит $\hat{\varepsilon}_b$ — значение относительной продольной деформации, при которой напряжение достигает на диаграмме своего экстремального значения. $\hat{\varepsilon}_b$ определяется в зависимости от класса бетона по прочности на сжатие B по формуле

$$\hat{\varepsilon}_b = \frac{B}{E_b} \cdot \lambda \cdot \frac{1 + \left(\frac{0.75\lambda B}{60} \right) + \left(\frac{0.2\lambda}{B} \right)}{0.12 + \left(\frac{B}{60} \right) + \left(\frac{0.2}{B} \right)}, \quad (2.10)$$

где безразмерный коэффициент λ для тяжелого и мелкозернистого бетона принимается равным 1.

Алгоритм построения кривой деформирования на основе уравнения свода правил следующий:

1. Для заданного класса бетона B определяется расчётное сопротивление бетона $R_{b,ser}$ для предельных состояний второй группы путём линейной интерполяции табличных данных; определяется $\hat{\sigma}_b$ из уравнений (2.7)

$$\hat{\sigma}_b = R_{b,ser}.$$

2. Аналогично интерполяцией определяется значение начального модуля упругости E_b .

3. Из формулы (2.10) определяется $\hat{\varepsilon}_b$, при учёте, что $\lambda=1$

$$\hat{\varepsilon}_b = \frac{60B[B(0.0125B+1)+0.2]}{E_b[B(B+7.2)+12]}. \quad (2.11)$$

4. На основании второго уравнения (2.7) определяется значение $\hat{v}_b$

$$\hat{v}_b = \frac{\hat{\sigma}_b}{\hat{\varepsilon}_b E_b}. \quad (2.12)$$

5. Создаётся массив относительной напряжения для восходящей $\sigma_{b,u}$ и нисходящей $\sigma_{b,d}$ ветвей диаграммы из 1000 элементов. Значения массива σ_{bu} равномерно возрастают от 0 в первом элементе до $\hat{\sigma}_b$ в последнем; значения массива σ_{bd} равномерно уменьшается от $\hat{\sigma}_b$ в первом элементе до $0.8\hat{\sigma}_b$ в последнем. Элементы полученных массивов обозначаются $\sigma_{bu,i}$ и $\sigma_{bd,i}$ соответственно.

6. Создаётся 2 массива η , каждый из 1000 элементов, соответственно для восходящей η_u и нисходящей η_d ветвей; для заполнения их элементов $\eta_{u,i}$ и $\eta_{d,i}$ используется третье уравнение (2.7)

$$\eta_{u,i} = \frac{\sigma_{bu,i}}{\hat{\sigma}_b} \quad \eta_{d,i} = \frac{\sigma_{bd,i}}{\hat{\sigma}_b}. \quad (2.13)$$

7. Определяются значения параметров η_0 и ω_1 из уравнения (2.8) применительно к восходящей ветви диаграммы.

8. Определяются значения параметров v_0 и ω_1 из уравнения (2.9) применительно к нисходящей ветви диаграммы.

9. Создаётся 2 массива v_b , каждый из 1000 элементов, соответственно для восходящей v_{bu} и нисходящей v_{bd} ветвей; для заполнения их элементов $v_{bu,i}$ и $v_{bd,i}$ используется третье уравнение (2.7)

$$\begin{aligned}
v_{bu,i} &= \hat{v}_b + (1 - \hat{v}_b) \sqrt{1 - (2 - 2.5\hat{v}_b)\eta_{u,i} - (2.5\hat{v}_b - 1)\eta_{u,i}^2}; \\
v_{bd,i} &= \hat{v}_b \left[1 - 1.05 \sqrt{1 - (1.95\hat{v}_b - 0.138)\eta_{d,i} - (1.138 - 1.95\hat{v}_b)\eta_{d,i}^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

10. Создаётся 2 массива ε_b , каждый из 1000 элементов, соответственно для восходящей ε_{bu} и нисходящей ε_{bd} ветвей; для заполнения их элементов $\varepsilon_{bu,i}$ и $\varepsilon_{bd,i}$ используется третье уравнение (2.5)

$$\varepsilon_{bu,i} = \frac{\sigma_{bu,i}}{E_b \cdot v_{bu,i}}; \quad \varepsilon_{bd,i} = \frac{\sigma_{bd,i}}{E_b \cdot v_{bd,i}}. \tag{2.15}$$

11. Массивы относительных продольных деформаций ε_{bu} и ε_{bd} объединяются в единый массив ε_b . Аналогично объединяются массивы напряжений σ_{bu} и σ_{bd} объединяются в единый массив σ_b .

2.2.3. Методика построения кривых деформирования на основе уравнения Г. А. Гениева

Данная методика была предложена Г. А. Гениевым в книге [16]. В дальнейшем она часто была использована в научных трудах отечественных авторов, о чём будет сказано позднее.

Теория Гениева изначально предполагает рассмотрение объёмного напряжённо-деформированного состояния, компоненты напряжений в котором относительно осей x, y, z записываются соответственно $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, а деформаций — $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$. Тогда, согласно Г. А. Гениеву связь между относительными продольными деформациями и напряжениями имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{E(\Gamma)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{g_0 \Gamma^2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где для равенства коэффициента Пуассона значению $1/6$, модуль упругости определяется

$$E(\Gamma) = E_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right), \quad (2.17)$$

здесь Γ_s — предельная интенсивность деформаций сдвига; Γ — интенсивность сдвига, определяемая по формуле

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad (2.18)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации

Предельная интенсивность деформаций сдвига связана с предельной интенсивностью деформаций сдвига при чистом соотношением

$$\Gamma_s = \Gamma_c \cdot k(\lambda, \delta). \quad (2.19)$$

Интенсивность касательных напряжений обозначается T и её квадрат численно равен второму инварианту девиатора напряжений I_{D2}

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (2.20)$$

тогда аналогично равенству (2.19) возможна подобная запись относительно напряжений

$$T_s = T_c \cdot k(\lambda, \delta), \quad (2.21)$$

где T_s — предельное значение интенсивности касательных напряжений для рассматриваемого вида напряжённого состояния; T_c — предельная прочность при чистом сдвиге.

Начальный модуль упругости E_0 и модуль сдвига G_0 для $\nu=1/6$ связаны соотношением

$$E_0 = \frac{7}{3} G_0. \quad (2.22)$$

Для предельного состояния $\Gamma = \Gamma_s = \Gamma_c \cdot k(\lambda, \delta)$ интенсивность касательных напряжений определяется

$$T = T_s = \frac{1}{2}G_0\Gamma_s = G_s\Gamma_c \cdot k(\lambda, \delta) = T_c \cdot k(\lambda, \delta). \quad (2.23)$$

В приведённых выше уравнения используется коэффициент $k(\lambda, \delta)$ изменения предельного значения интенсивности касательных напряжений для рассматриваемого вида напряжённого состояния по сравнению с предельным значение T при чистом сдвиге T_c

$$k(\lambda, \delta) = \frac{\lambda(1+\delta)}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\delta)^2}{4} + (1+\delta)}. \quad (2.24)$$

Входящие в уравнение (2.24) коэффициенты λ и δ определяются

$$\lambda = f \frac{\sigma_m}{T}, \quad (2.25)$$

где $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ — среднее напряжение, совпадающее с точностью до постоянного коэффициента с первым инвариантом тензора напряжений $I_{\sigma 1}$;

$$\delta = e \left(\frac{S}{T} \right)^3, \quad (2.26)$$

здесь S — инвариантная величина, третья степень которой с точностью до постоянного коэффициента совпадает с третьим инвариантом девиатора напряжений I_{D3}

$$S = \sqrt{3} \cdot \left[\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_m) (\sigma_2 - \sigma_m) (\sigma_3 - \sigma_m) \right]^{\frac{1}{3}}; \quad (2.27)$$

здесь f и e — безразмерные коэффициенты

$$f = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}; \quad (2.28)$$

$$e = \frac{R_c - R_p}{3T_c^2} - 1. \quad (2.29)$$

Предел прочности при чистом сдвиге T_c связан с пределом прочности при одноосном сжатии R_c , равному призменной прочности бетона, и с пределом прочности при одноосном растяжении R_p соотношением

$$T_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{R_c \cdot R_p}. \quad (2.30)$$

В уравнении связи деформаций и напряжений также фигурирует g_0 — модуль дилатации бетона

$$g_0 = -\frac{\theta_c}{\Gamma_c^2}, \quad (2.31)$$

где θ_c — предельная объёмная деформация при чистом сдвиге.

Из выражения (19) может быть выражено значение Γ_c

$$\Gamma_c = \frac{\Gamma_s}{k(\lambda, \delta)}, \quad (2.32)$$

а значение Γ_s может быть найдено из (2.23)

$$\frac{1}{2} G_0 \Gamma_s = T_c \cdot k(\lambda, \delta) \quad \rightarrow \quad \Gamma_s = \frac{2 T_c \cdot k(\lambda, \delta)}{G_0}. \quad (2.33)$$

Здесь $G_0 = E_0 / [2(1+\nu)]$, или для случая $\nu = 1/6$ справедлива запись (2.22).

Академик В. И. Колчунов [31] занимался исследованием зависимости значения модуля дилатации бетона от множества переменных, но в настоящей статье эти зависимости не рассматриваются и коэффициент дилатации рассматривается при постоянном значении предельной объёмной деформации при чистом сдвиге $\theta_c = -10^{-4}$. При этом в части работ в выражении (2.16) параметры, связанные с дилатацией бетона опускаются [15], [80]. В работе [80] также приводится попытка рассмотрения теории Гениева с рядом нормативных документов.

В приведённых исследованиях не рассматривается окончательное выражение для связи напряжений и деформаций при учёте всех составляющих от уравнения (17) до (24) для случая одноосного сжатия.

Алгоритм построения кривой деформирования на основе уравнения Гениева следующий:

1. Для заданного класса бетона B определяется расчётное сопротивление бетона на сжатие R_C и растяжение R_P . По формуле (31) определяет предел прочности при чистом сдвиге T_C .
2. Для исследуемого напряжённо-деформированного состояния в точке выделяют вектор главных напряжений $[\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3]$ и вектор главных деформаций $[\varepsilon_1; \varepsilon_2; \varepsilon_3]$. В случае одноосного напряжённого состояния с учётом принятого правила знаков (сжатие положительно, растяжение — отрицательно), вектор напряжений и вектор главных деформаций примут вид

$$[0; 0; \sigma_3]; \quad [0; 0; \varepsilon_3].$$

3. Для принято вектора деформаций $[0; 0; \varepsilon_3]$ интенсивность сдвига из формулы (2.18) примет вид

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_3.$$

4. Для принято вектора напряжений $[0; 0; \sigma_3]$ интенсивность касательных напряжений из формулы (2.20) примет вид

$$T = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

5. С учётом $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (0 + 0 + \sigma_3)/3 = \sigma_3/3$, величина S из (2.27) будет равна T и запишется

$$S = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}.$$

6. Из (2.28) определяется параметр f

$$f = \sqrt{\frac{3}{R_C R_P}} \cdot (R_C - R_P).$$

7. Для связи прочности при чистом сдвиге T_C с пределом прочности при одноосном сжатии R_C и с пределом прочности при одноосном растяжении R_P из

соотношения (2.30), коэффициент e получается равным нулю, как и коэффициента δ из (2.26)

$$e = 0 \rightarrow \delta = 0.$$

8. Получив значения f и δ , из (2.24) получаем значения $k(\lambda, \delta)$

$$k(\lambda, \delta) = \sqrt{\frac{R_c}{R_p}}.$$

9. Определяется предельная интенсивность деформаций сдвига Γ_s из (2.33)

$$\Gamma_s = \frac{4R_c(1+\nu)}{E_0\sqrt{3}}.$$

10. Определяется предельная интенсивность деформаций сдвига Γ_c из (2.32)

$$\Gamma_c = \frac{4(1+\nu)\sqrt{R_c R_p}}{E_0\sqrt{3}}.$$

11. Определяется значения секущего модуля упругости $E(\Gamma)$

$$E(\Gamma) = \frac{E_0[4R_c(1+\nu) - E_0\epsilon_3]}{4R_c(1+\nu)}.$$

12. При значении коэффициента Пуассона $\nu = 1/6$, окончательно модуль упругости $E(\Gamma)$ равен

$$E(\Gamma) = \frac{E_0[14R_c - 3E_0\epsilon_3]}{14R_c}. \quad (2.34)$$

13. Определяется значение дилатационной составляющей $g_0\Gamma^2/3$ в уравнении (2.16)

$$-\frac{g_0\Gamma^2}{3} = \frac{E_0^2 \theta_c \epsilon_3^2}{12R_c R_p (1+\nu)^2}.$$

14. При значении коэффициента Пуассона $\nu = 1/6$, окончательно значение $g_0\Gamma^2/3$ ставит

$$-\frac{g_0 \Gamma^2}{3} = \frac{3 E_0^2 \theta_c \varepsilon_3^2}{49 R_c R_p}.$$

15. Создаётся массив ε_3 главной относительной продольной деформации из 1000 элементов, изменяющихся от 0 до некоторого конечного значения (как правило до 0.002). Аналогично создаются из 1000 элементов массивы модуля упругости $E(\Gamma)$ и напряжения $\sigma_{x,i}$. Каждый i -й элемент массива $E(\Gamma)$ определяется по формуле (2.34). Каждый i -й элемент массива σ определяется по формуле

$$\sigma_{3,i} = E_i(\Gamma) \cdot \varepsilon_{3,i}.$$

16. Создаётся массив ε_x полной относительной продольной деформации из 1000 элементов. Каждый элемент массива определяется согласно выражению (2.16) для одномерного напряжённого состояния

$$\varepsilon_{x,i} = \frac{14 R_c}{E_0(14 R_c - 3 E_0 \varepsilon_{3,i})} \cdot \sigma_{3,i} + \frac{3 E_0^2 \theta_c}{49 R_c R_p} \cdot \varepsilon_{3,i}^2.$$

2.2.4. Методика построения кривых для экспериментальных данных

Ранее говорилось, что источником экспериментальных данных стали работы А.М. Мкртчяна [39], М.Д. Медянкина [35] и Б. Таинг [57]. Для всех опытных кривых строились согласно исходным данным 8 теоретических:

1. Согласно своду правил.
2. Согласно формуле Сарджина на основе данных Еврокода.
3. Согласно формуле Сарджина на основе свода правил по первой группе предельных состояний.
4. Согласно формуле Сарджина на основе свода правил по второй группе предельных состояний.
5. По теории Гениева без учёта дилатации по первой группе предельных состояний.

6. По теории Гениева без учёта дилатации по второй группе предельных состояний.
7. По теории Гениева с учётом дилатации по первой группе предельных состояний.
8. По теории Гениева с учётом дилатации по второй группе предельных состояний.

Пункт 1 строится по своду правил, при этом для указанного класса бетона B по табличным данным принимаются расчётное сопротивление бетона по второй группе предельных состояний $R_{b,ser}$ и начальный модуль упругости бетона при сжатии E_b . Далее расчёт идёт по методике в разделе 2.2.2.

Пункты 2, 3 и 4 строятся на методике, приведённой в разделе 2.2.1. Трудность заключается в том, что прямой связи Еврокода и свода правил не существует. Для расчёта надо передавать 4 параметра:

- начальный модуль упругости бетона E_{cm} ;
- относительную продольную деформацию при максимальном значении напряжения ε_{c1} ;
- номинальную предельную относительную деформацию ε_{cu1} ;
- среднее значение цилиндрической прочности бетона на сжатие f_{cm} (для опытных данных [39], [57]) или кубиковую прочность при сжатии $f_{ck,cube}$ (для опытных данных [35]).

Для теоретической кривой в пункте 2 было сделано допущение, что среднее значение цилиндрической прочности бетона на сжатие f_{cm} равно призмочной прочности R_b , то есть

$$f_{cm} = R_b. \quad (2.35)$$

Поскольку в источниках экспериментальных данных указан класс бетона исследуемых образцов, то существует связь между призмочной прочностью бетона R_b и кубиковой R

$$R_b = (0.77 - 0.00125R)R. \quad (2.36)$$

Поскольку класс бетона B — это кубиковая прочность бетона на сжатие с обеспеченностью 0.95, в расчётах было принято

$$R = B, \quad (2.37)$$

тогда с учётом (2.35) и (2.37) выражение (2.36) примет вид

$$f_{cm} = (0.77 - 0.00125B)B. \quad (2.38)$$

В работе [38] показано, что выражение (2.36) хорошо работает для бетонов с кубиковой прочностью $R < 60$ МПа. Если $R \geq 60$ МПа, то необходимо использовать следующую зависимость

$$R_b = \{0.77[1.123 + 0.00115(R - 60)] - 0.00125R\}R. \quad (2.39)$$

С учётом принятых ранее обозначений (36) и (38) выражение (40) окончательно записывается

$$f_{cm} = \{0.77[1.123 + 0.00115(B - 60)] - 0.00125B\}B. \quad (2.40)$$

Теоретическая кривая из пункта 2 для опытных данных из работ [39], [57] строилась на параметрах, определяемых интерполяцией от f_{cm} по формуле (2.38) для бетонов $B < 60$ МПа и по формуле (2.40) для бетонов $B \geq 60$ МПа.

Теоретическая кривая из пункта 2 для опытных данных из работы [35] строилась на параметрах, определяемых интерполяцией от $f_{ck, cube}$ при допущении, что

$$f_{ck, cube} = B.$$

Сделано это было по той причине, что в работах [39], [57] испытывались призматические образцы, а в работе [35] класс бетона определялся по испытаниям бетонных кубиков.

Для построения теоретических кривых 3 и 4 использованы формулы из раздела 2.2.1, а исходные данные принимались по своду правил. Параметр ε_{cu1} принимался для каждого случая индивидуально.

Для теоретической кривой 3 принимались переменные по первой группе предельных состояний

$$E_{cm} = E_b; \quad \lambda = 1; \quad \varepsilon_{c1} = \frac{B}{E_{cm}} \lambda \frac{1 + \frac{0.75\lambda B}{60} + \frac{0.2\lambda}{B}}{0.12 + \frac{B}{60} + \frac{0.2}{B}}; \quad f_{cm} = R_b.$$

Для теоретической кривой 4 принимались переменные по первой группе предельных состояний

$$E_{cm} = E_b; \quad \lambda = 1; \quad \varepsilon_{c1} = \frac{B}{E_{cm}} \lambda \frac{1 + \frac{0.75\lambda B}{60} + \frac{0.2\lambda}{B}}{0.12 + \frac{B}{60} + \frac{0.2}{B}}; \quad f_{cm} = R_{b,ser}.$$

Для построения кривых деформирования 5–8 исходные данные принимались только по своду правил

$$E_0 = E_b; \quad R_C = R_b; \quad R_P = R_{bt}$$

в случае кривых по первой группе предельных состояний (кривые 5 и 7), и

$$E_0 = E_b; \quad R_C = R_{b,ser}; \quad R_P = R_{bt,ser}$$

в случае кривых по второй группе предельных состояний (кривые 6 и 8).

Кривые 5 и 6 были построены без учёта развития дилатации бетона, принималось $\theta_C = 0$, кривые 7 и 8 учитывали развитие дилатации бетона, принималось $\theta_C = -10^{-4}$.

2.3. Результаты расчёта

На рисунке 2.1 представлены теоретические кривые и экспериментальные данные для образцов из работы А. М. Мкртчяна [39], на рисунке 2.2 — из работы М. Д. Медянкина [35], на рисунке 2.3 — из работы Б. Таинга [57].

В таблицах 1–3 представлены численные значения отклонения максимального значения напряжения экспериментальных данных и соответствующего ему значения относительной продольной деформации от такого значения теоретических кривых. Приведена оценка отклонения значения теоретических значений напряжения $\sigma_{\text{teoretical}}$ и продольной деформации $\varepsilon_{\text{teoretical}}$ от максимального значения

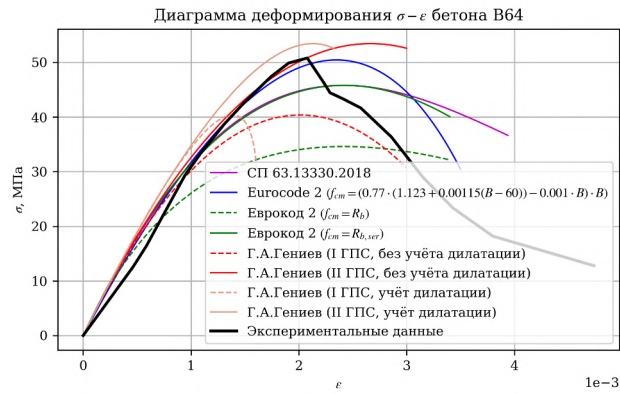
экспериментальных данных для напряжения $\sigma_{\text{experimental}}$ и продольной деформации $\epsilon_{\text{experimental}}$

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{\text{teoretical}} - \sigma_{\text{experimental}}|}{\sigma_{\text{experimental}}} \cdot 100\%; \quad \Delta\epsilon = \frac{|\epsilon_{\text{teoretical}} - \epsilon_{\text{experimental}}|}{\epsilon_{\text{experimental}}} \cdot 100\%.$$

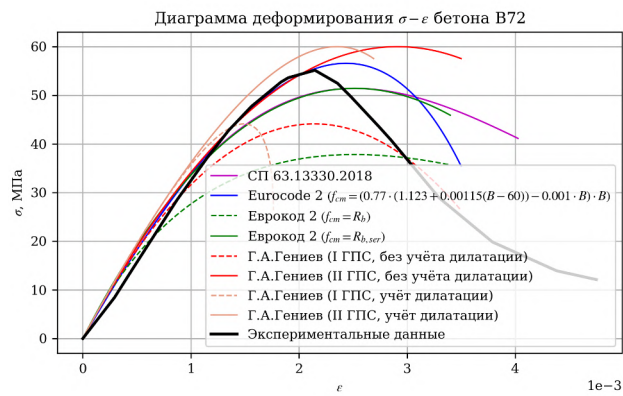
В таблицах 2.1–2.3 значения с наименьшими отклонениями теоретических данных от экспериментальных выделены полужирным шрифтом.

Анализ графиков на рисунках 2.1–2.3 показывает, что по характеру распределения экспериментальным данным хорошо соответствует кривая по пункту 2 из раздела 2.2.4, построенная на основе формулы Сарджина и исходным данным из Еврокода. Это же подтверждает и сопоставление численных данных из таблиц 2.1–2.3. Кривая по Еврокоду или наиболее хорошо согласуется с экспериментальными данными, или имеет минимальные отклонения по значениям максимального напряжения. Однако, значения относительной продольной деформации в точках с наибольшим напряжением чаще дают лучшее согласование теоретических кривых на основе свода правил и теории Гениева. Объяснить это можно тем, что данные на основе свода правил имеют несколько меньшие цифры по допускаемым значениям максимального напряжения в пользу дополнительного запаса прочности готового изделия.

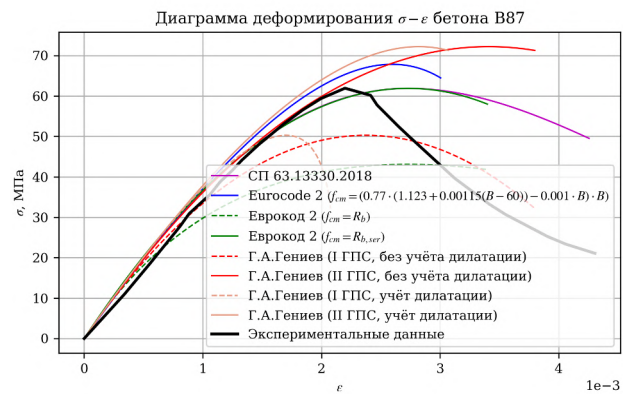
а



б



в



г

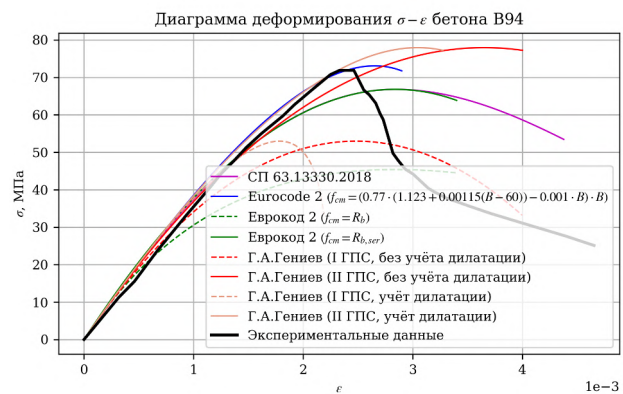
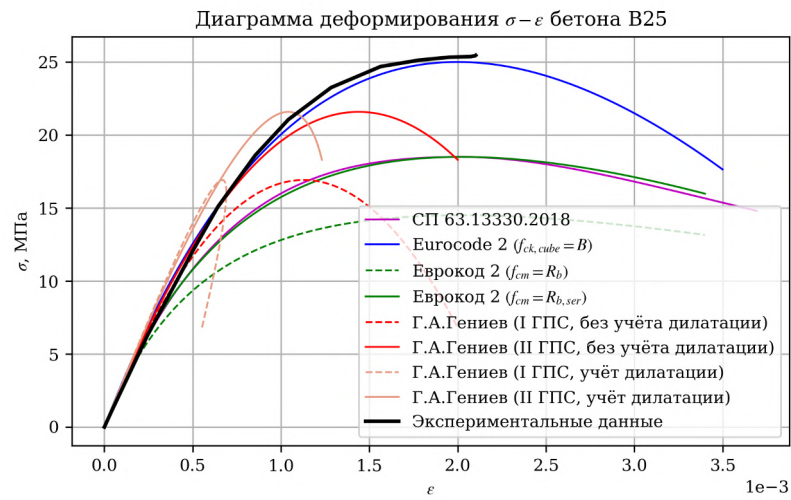
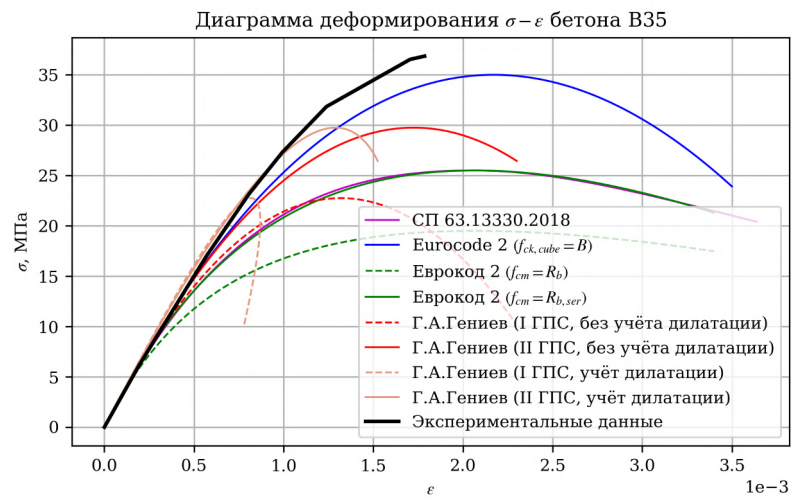


Рисунок 2.1 — Сопоставление теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы А. М. Мкртчяна [39]

а



б



в

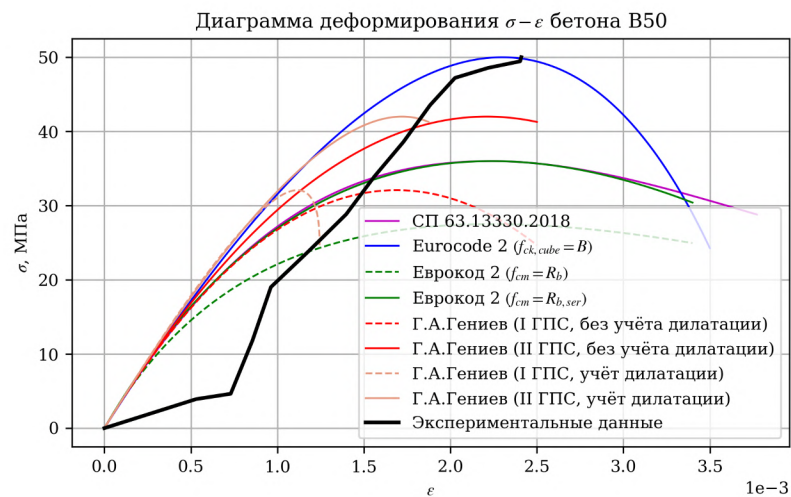
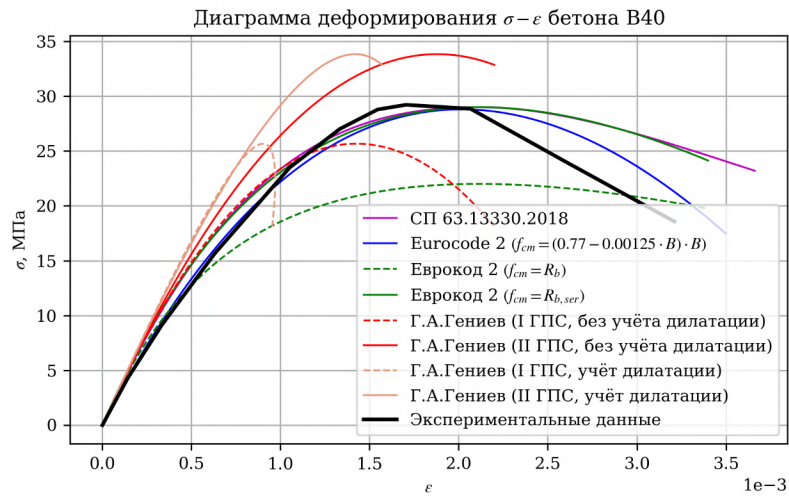
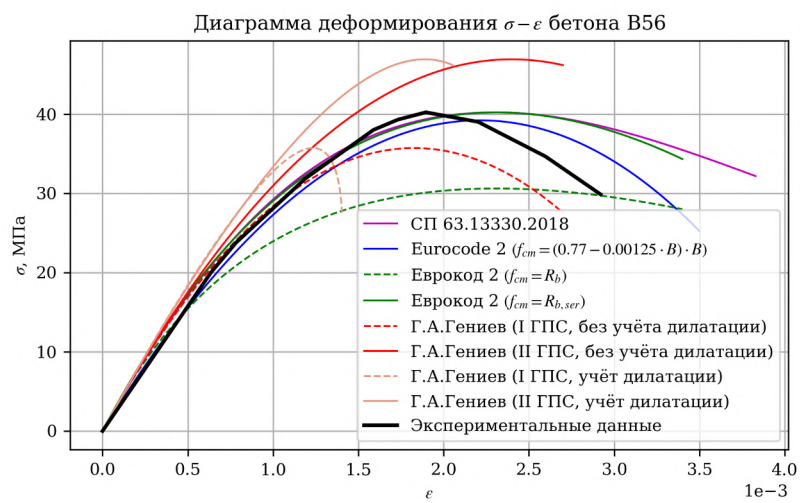


Рисунок 2.2 — Сопоставление теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы М. Д. Медянкина [35]

а



б



в

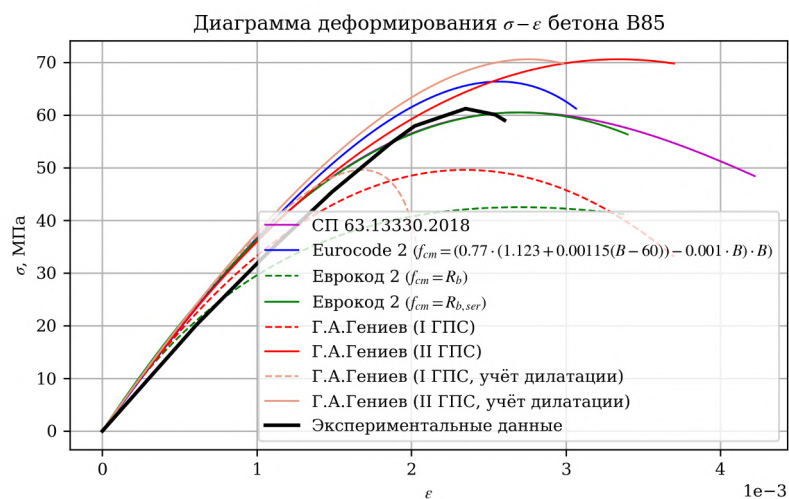


Рисунок 2.3 — Сопоставление теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы Б. Таинга [57]

Таблица 2.1 — Сопоставление обработки теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы А. М. Мкртчяна [39]

Класс бетона	Параметр	Экспериментальные данные	СП 63.13330.2018	Eurocode 2, согласно выражению (2.40)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_b$)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_{b,ser}$)	По Г. А. Гениеву I ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву I ГПС, учёт дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, учёт дилатации
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B64	σ , МПа	50.79	45.80	50.45	34.60	45.80	40.37	53.43	40.37	53.43
	$\Delta\sigma$, %	—	9.834	0.684	31.88	9.834	20.53	5.193	20.53	5.193
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.078	2.419	2.347	2.420	2.420	2.012	2.664	1.386	2.129
	$\Delta\varepsilon$, %	—	16.38	12.94	16.43	16.43	3.192	28.16	33.31	2.414
B72	σ , МПа	55.11	51.40	56.54	37.80	51.40	44.10	59.97	44.10	59.97
	$\Delta\sigma$, %	—	6.738	2.596	31.41	6.738	19.98	8.805	19.98	8.805
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.147	2.514	2.435	2.515	2.515	2.141	2.911	1.491	2.351
	$\Delta\varepsilon$, %	—	17.07	13.40	17.13	17.13	0.308	35.59	30.55	9.506
B87	σ , МПа	61.93	61.90	67.85	43.10	61.90	50.28	72.22	50.28	72.22
	$\Delta\sigma$, %	—	0.051	9.554	30.41	0.051	18.81	16.61	18.81	16.61
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.199	2.730	2.597	2.730	2.730	2.374	3.412	1.701	2.824
	$\Delta\varepsilon$, %	—	24.18	18.10	24.13	24.13	7.945	55.17	22.63	28.51
B94	σ , МПа	71.88	66.80	73.07	45.40	66.80	52.97	77.93	52.97	77.93
	$\Delta\sigma$, %	—	7.061	1.659	36.83	7.061	26.31	8.429	26.31	8.429
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.332	2.838	2.652	2.838	2.838	2.482	3.652	1.784	3.046
	$\Delta\varepsilon$, %	—	21.71	13.74	21.73	21.73	6.467	56.61	23.48	30.64

Таблица 2.2 — Сопоставление обработки теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы М. Д. Медянкина [35]

Класс бетона	Параметр	Экспериментальные данные	СП 63.13330.2018	Eurocode 2, согласно выражению (2.40)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_b$)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_{b,ser}$)	По Г. А. Гениеву I ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву I ГПС, учёт дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, учёт дилатации
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B25	σ , МПа	25.46	18.50	25.00	14.50	18.50	16.92	21.58	16.92	21.58
	$\Delta\sigma$, %	—	27.33	1.793	43.04	27.33	33.55	15.22	33.55	15.22
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.102	2.020	2.001	2.022	2.022	1.127	1.439	0.6673	1.041
	$\Delta\varepsilon$, %	—	3.892	4.836	3.831	3.831	46.38	31.53	68.25	50.47
B35	σ , МПа	36.85	25.50	35.00	19.50	25.50	22.75	29.75	22.75	29.75
	$\Delta\sigma$, %	—	30.81	5.029	47.09	30.81	38.27	19.27	38.27	19.27
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1.786	2.065	2.172	2.066	2.065	1.319	1.724	0.819	1.289
	$\Delta\varepsilon$, %	—	15.64	21.64	15.69	15.69	26.12	3.432	54.14	27.84
B50	σ , МПа	50.01	36.00	50.00	27.50	36.00	32.08	42.00	32.08	42.00
	$\Delta\sigma$, %	—	28.02	0.027	45.01	28.02	35.85	16.02	35.85	16.02
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.410	2.239	2.298	2.239	2.239	1.689	2.210	1.116	1.720
	$\Delta\varepsilon$, %	—	7.096	4.633	7.075	7.075	29.91	8.309	53.70	28.62

Таблица 2.3 — Сопоставление обработки теоретических кривых и экспериментальных данных для образцов из работы Б. Таинга [57]

Класс бетона	Параметр	Экспериментальные данные	СП 63.13330.2018	Eurocode 2, согласно выражению (2.40)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_b$)	Eurocode 2 ($f_{cm} = R_{b,ser}$)	По Г. А. Гениеву I ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, без дилатации	По Г. А. Гениеву I ГПС, учёт дилатации	По Г. А. Гениеву II ГПС, учёт дилатации
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B40	σ , МПа	29.21	29.00	28.80	22.00	29.00	25.67	33.83	25.67	33.83
	$\Delta\sigma$, %	—	0.733	1.418	24.69	0.733	12.14	15.81	12.14	15.81
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1.704	2.112	2.015	2.114	2.114	1.425	1.881	0.902	1.420
	$\Delta\varepsilon$, %	—	23.95	18.22	24.02	24.02	16.39	10.36	47.08	16.68
B56	σ , МПа	40.21	40.20	39.20	30.60	40.20	35.70	46.90	35.70	46.90
	$\Delta\sigma$, %	—	0.036	2.522	23.91	0.036	11.23	16.23	11.23	16.23
	$\varepsilon \cdot 10^3$	1.896	2.309	2.211	2.308	2.308	1.827	2.400	1.233	1.890
	$\Delta\varepsilon$, %	—	21.77	16.61	21.71	21.71	3.632	26.59	34.94	0.308
B85	σ , МПа	61.21	60.50	66.35	42.50	60.50	49.58	70.58	49.58	70.58
	$\Delta\sigma$, %	—	1.167	8.391	30.57	1.167	19.00	15.31	19.00	15.31
	$\varepsilon \cdot 10^3$	2.351	2.699	2.566	2.699	2.699	2.348	3.341	1.681	2.756
	$\Delta\varepsilon$, %	—	14.83	9.148	14.81	14.81	0.108	42.12	28.49	17.26

2.4. Методика учёта изменения модуля упругости бетона в зависимости от объёмного напряжённого состояния

В современных нормативных документах таких, как свод правил (СП) и Еврокод, основное внимание уделяется работе бетона в сжатом состоянии при одноосном напряжённом состоянии.

В теории Г. А. Гениева [16] основное внимание уделяется интенсивности касательных напряжений, связанной со вторым инвариантом девиатора напряжений, формально определяемому как радикал касательных напряжений на октаэдрических площадках

$$\tau_i = \sqrt{(I_2^D)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (2.41)$$

Аналогичные соотношения используются для описания деформаций

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_{\text{окт}}. \quad (2.42)$$

Поскольку ранее приводилась метода построения кривых деформирования зависимости нормальных напряжений и относительной продольной деформации $(\sigma - \varepsilon)$, было принято решение сопоставлять с нормальными напряжениями σ на кривой деформирования значения интенсивности напряжений σ_i , а с продольной деформацией ε — значение интенсивности деформаций ε_i . В курсе теории упругости, пластичности и ползучести приводятся соотношения для интенсивности напряжений и деформаций через главные напряжения и деформации с учётом соотношений (2.41) и (2.42)

$$\sigma_i = \sqrt{3} \tau_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_i = \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu)} \tau_{\text{окт}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \quad (2.44)$$

При этом интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ε_i связаны соотношением [2]

$$\sigma_i = E \varepsilon_i, \quad (2.45)$$

Откуда, модуль деформации материала в точке с учётом объёмного напряжённого состояния может быть определён

$$E = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (2.46)$$

Решение задачи определялось методом последовательных приближений. Пусть E_i — модуль деформации (упругости) принятый на каждом шаге i . Далее, под модулем упругости материала E_0 понимается модуль упругости материала на первом шаге $i = 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и определяется из нормативных документов (в дальнейшем кривые деформирования материала будут строиться на основе норм Еврокод), а на последующих этапах для обозначения E_i применяется термин модуль деформации, соответствующий текущему модулю упругости на кривой деформации материала. Тогда общий алгоритм представлен в виде блок-схемы на рисунке 2.4 и состоит из следующих шагов:

1. На первом этапе определяем начальный модуль упругости E_0 на основе Еврокод. Если шаг больше первого, то задаётся модуль деформации E_i
2. Определяется напряжённо-деформированное состояние:
 - напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_m, \sigma_i$;
 - относительные деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_m, \varepsilon_i$.
3. На основе выражения (2.46) и с учётом алгоритма, представленного блок-схемой на рисунке 2.4, определяется значение модуля деформации E_i' на текущем шаге, соответствующее полученному напряжённо-деформированному состоянию.
4. Проверяется условие достижения максимального количества шагов или достижения заложенной точности $[\delta]$

$$\delta = \frac{|E_i' - E_i|}{E_i} \leq [\delta] = 0.0001. \quad (2.47)$$

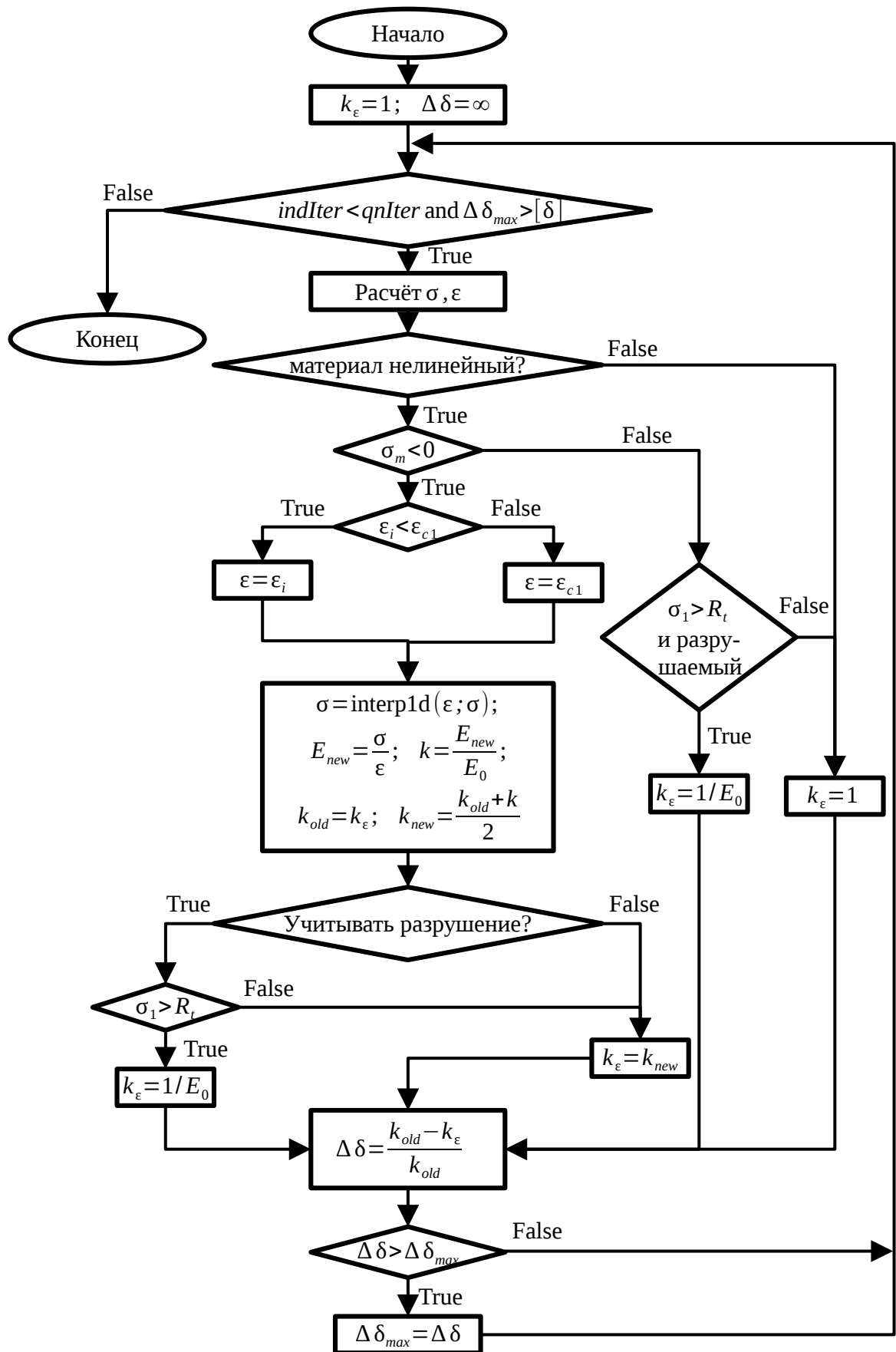


Рисунок 2.4 — Блок-схема

5. Если достигнуто максимальное количество шагов, или выполняется условие (2.47), то расчёт оканчивается, иначе происходит переход к п.1, принимая модуль деформации на следующем этапе равный

$$E_{i+1} = \frac{E_i' + E_i}{2}. \quad (2.48)$$

При этом изменение модуля деформации происходит не прямым способом, а задачей коэффициентов, как было сказано ранее в параграфе 1.5, при этом из п.3 определяется понижающий коэффициент, равный

$$k_\epsilon = \frac{E_i}{E_0}. \quad (2.49)$$

Необходимо отметить, что подобным образом коэффициент k_ϵ определяется при выполнении условия, что главное напряжение σ_1 не превышает прочность бетона на растяжение R_t , и среднее напряжение σ_m отрицательно, т. е. в точке в основном наблюдается сжатие. В расчётах при этом не используется ни одна теория прочности, поэтому к работе с растягивающими напряжениями надо подходить осторожно. Если среднее напряжение положительно, т. е. в точке в основном наблюдается растяжение, и главное напряжение σ_1 не превышает прочность бетона на растяжение R_t , принимается $k_\epsilon = 1$, поскольку кривая деформирования бетона при растяжении не рассматривалась.

С другой стороны, как показано на блок-схеме (рисунок 2.4), если главное напряжение положительно (соответствует растяжению) и превышает R_t , или в случае.

Однако, была предпринята попытка смоделировать разрушение бетона при растяжении. В этом случае при выполнении условия $\sigma_1 \geq R_t$ коэффициент деформации принимался

$$k_\epsilon = \frac{1}{E_0}, \quad (2.50)$$

т. е. при расчёте модуль деформации получался весьма мал, некоторым образом моделируя разрушение бетона в текущем конечном элементе, при этом конечно-элементная сетка оставалась нетронутой.

2.5. Выводы по главе 2

Проведённые исследования показывают, что каждый подход имеет преимущества в отдельном случае. Если моделируется работа конструкции в сжатом состоянии в научном исследовании, то лучше использовать данные только на основе Еврокода. Если моделируется работа реальной конструкции, то данные на основе свода правил, поскольку они закладывают некоторый дополнительный запас прочности. Если моделируется работа массивной конструкции при объёмном напряженно-деформированном состоянии, то предпочтительней теория Г. А. Гениева, поскольку она сразу включает в себя объёмные компоненты напряжений и относительной деформации.

Глава 3. Исследование напряжённо-деформированного состояния в бетонном цилиндре с учётом температурного поля

На рисунке 1.1 представлена общая схема рассматриваемых в настоящем диссертационной работе задач. Непосредственный расчёт будет производиться при помощи МКЭ. Использован простой треугольный КЭ без дополнительных узлов. Связано это с тем, что первоначально стоит задача продемонстрировать общее напряжённо-деформированное состояние в конструкции, возникающее с учётом множества факторов, таких как физическая нелинейность материала как от возникающего напряжения (деформации материала), так и от действия температуры. Точности выбранного КЭ вполне для этих целей хватает, а для описания возникающего в теле градиента физико-механических параметров более предпочтительным оказывается применение большего количества подобных КЭ.

Изначально результаты полученного решения будут базироваться на задачах, исследуемых в работах учеников академика В. И. Андреева: проф. Б. М. Языева [70], доц. И. А. Потехина [45], доц. А. В. Смолова [51] и их последователей: доц. С. В. Литвинова [32] и др. с целью оценки достоверности полученных результатов путём сопоставления решений, полученных разными авторами и в разными методами.

3.1. Влияние температурного воздействия на изменение модуля упругости бетона

Для учёта изменения модуля упругости бетона от температуры использованы данные СП 27.13330.2011 «Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур» [53]. Так, при кратковременном нагреве значения начального модуля упругости бетона определяют по формуле 5.9 СП 27.13330.2011:

$$E_{bt} = E_b \cdot \beta_b, \quad (3.1)$$

где значения β_b принимаются согласно таблице 5.3 СП 27.13330.2011 [53] и приведены в таблице 3.1 при температуре бетона в диапазоне 50–300 °С для кратковременного и длительного нагрева, номеров составов бетона 1, 1а, 2 (вяжущее —

портландцемент, быстротвердеющий потрландцемент, шлакопортландцемент) согласно таблице 5.1 СП 27.13330.2011.

Аппроксимация по приведённым значениям β_b может быть выполнена тремя способами:

— экспоненциальной зависимостью

$$\beta_b(T) = a \cdot \exp(b \cdot T), \quad (3.2)$$

где $a = 1.16868795879125$, $b = -0.00352087362046568$;

— полиномиальной (квадратной

$$\beta_b(T) = a \cdot T^2 + b \cdot T + c \quad (3.3)$$

где $a = 3.67551965 \cdot 10^{-6}$, $b = -3.56412948 \cdot 10^{-3}$, $c = 1.14488032538$;

— полиномиальной кубической

$$\beta_b(T) = a \cdot T^3 + b \cdot T^2 + c \cdot T + d, \quad (3.4)$$

где $a = -5.53352 \cdot 10^{-8}$, $b = 3.30051 \cdot 10^{-5}$, $c = -7.99416 \cdot 10^{-3}$, $d = 1.321761$.

В таблице 3.1 приведены результаты расчёта $\beta_b(T)$ по формулам 3.2–3.4, а также значения отклонения понижающего коэффициентами, определённые по формуле

$$\delta = \frac{\beta_b(T) - \beta_{b, \text{СП}}}{\beta_{b, \text{СП}}} \cdot 100 \%. \quad (3.5)$$

Таблица 3.1 — Данные согласно [53]

$T, ^\circ\text{C}$	50		70		100		200		300	
β_b , СП 27.13330.2011	1	δ , %	0.9	δ , %	0.8	δ , %	0.6	δ , %	0.4	δ , %
$\beta_b(T) = a \cdot \exp(b \cdot T)$	0.980	2.00	0.913	1.49	0.822	2.73	0.578	3.68	0.406	1.60
$\beta_b(T) = a \cdot T^2 + b \cdot T + c$	0.976	2.46	0.913	1.47	0.825	3.07	0.579	3.62	0.406	1.58
$\beta_b(T) = a \cdot T^3 + b \cdot T^2 + c \cdot T + d$	0.998	0.24	0.905	0.54	0.797	0.36	0.600	0.08	0.400	0.02

На рисунке 3.1 построены кривые совпадения результатов расчёта $\beta_b(T)$ по формулам 3.2–3.4 с данными согласно СП 27.13330.2011. Анализ кривых и отклонения R^2 показывает, что наибольшее соответствие аппроксимированных значений с данными из нормативного документа даёт кубический сплайн с достоверностью $R^2=0.99983$, однако, при этом аппроксимирующая кривая приобретает S-образную форму, что говорит об её отклонении от нормативных данных. Наибольшее отклонение имеет полином второго с достоверностью $R^2=0.99191$. В связи с чем в последующих расчётах используется экспоненциальная зависимость для аппроксимации нормативных данных, имеющая достоверность $R^2=0.99448$.

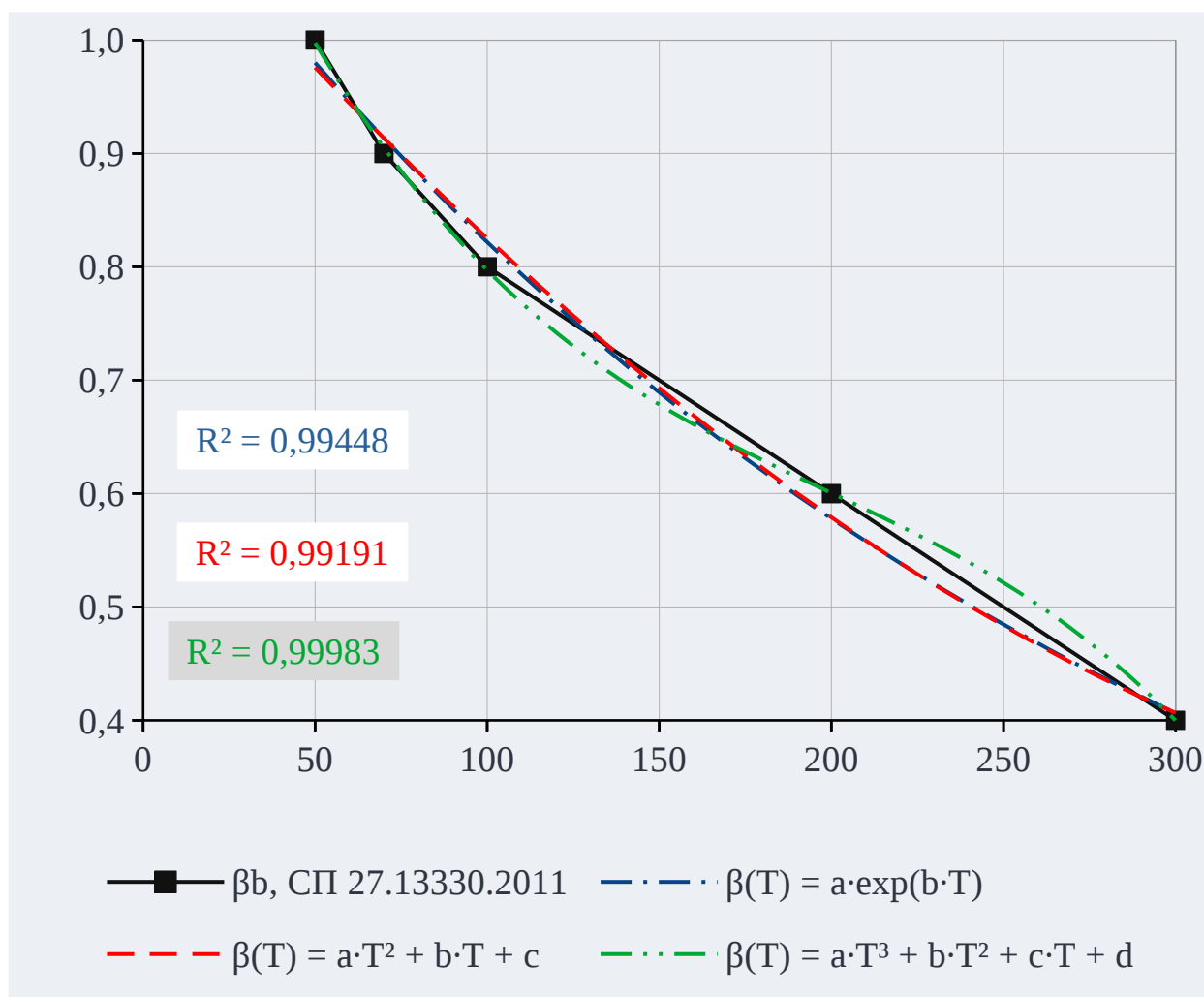


Рисунок 3.1 — Согласование результатов аппроксимации $\beta_b(T)$ по формулам 3.2–3.4 с данными согласно СП 27.13330.2011

Что касается арматуры, то согласно схеме 5.2 СП 27.13330.2011 [53] кривая диаграмма растянутой арматуры в пределах 20–300 °С не меняется, поэтому в дальнейших расчётах изменение физико–механических параметров арматуры не учитывалось.

3.2. Одномерные осесимметричные задачи с учётом неоднородности материала

Плоская осесимметричная деформация неоднородных полых цилиндров является одной из наиболее изученных задач теории упругости неоднородных тел и приводится, например, в работах академика В. И. Андреева [6], его ученика А. В. Смолова [51] и трудах иных авторов [28], [34]. Особенностью рассмотренной в данном разделе задачи является учет регламентированных действующими нормами [53] зависимостей изменения физико–механических свойств материала от температуры. Данное решение позволяет перейти к рассмотрению более сложных задач о напряжённо–деформированном состоянии многослойных цилиндров с учетом дискретной и непрерывной неоднородности материала. Кроме того, полученное в данном разделе решение позволяет осуществить контроль правильности результатов, полученных в последующем.

Задача о плоском деформированном состоянии неоднородного цилиндра у перечисленных выше авторов сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно радиальных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} (v^2 - 1) + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \left[\frac{3v}{r} - \frac{3}{r} + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{v^2}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \right] + \\ + \sigma_r \left[\frac{1}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{v}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{2v^2}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} \right] = \frac{E}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{vE}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \end{aligned} \quad (3.6)$$

с граничными условиями

$$\sigma_r(a) = -p_a; \quad \sigma_r(b) = -p_b, \quad (3.7)$$

где a , b — внутренний и наружный радиусы цилиндра; p_a и p_b — внутреннее и внешнее давления.

Уравнение (3.7) справедливо при зависимости от температуры лишь модуля деформации (упругости) материала, в котором он является функцией температуры

$$E = f(T). \quad (3.8)$$

Коэффициент Пуассона принят постоянной величиной, что объясняется ограниченностью экспериментальных данных о его изменения под действием температуры.

Расчётная схема задачи представлена на рисунке 1.1, а схема к применению метода конечных разностей на рисунке 1.2,а. Уравнение (3.7) представляет собой линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Учитывая сложность вида этих коэффициентов, решение предлагается искать численно. Вводя на интервале $[a, b]$ равномерную сетку

$$\omega_h = \left\{ r_i = a + ih; \quad h = \frac{b-a}{N}; \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \right\},$$

уравнение (3.7) можно аппроксимировать [61] с погрешностью $O(h^2)$

$$Y_{rr,i} + P_i Y_{r,i} + q_i Y_i = f_i, \quad (3.9)$$

где $Y_i = \sigma_{r,i}; \quad P_i = \frac{3\nu}{r} - \frac{3}{r} + \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{\nu^2}{E} \cdot \frac{\partial E}{\partial r}; \quad q_i = \frac{1}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{\nu}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{2\nu^2}{rE} \cdot \frac{\partial E}{\partial r};$

$f_i = \frac{E}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\nu E}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$, с граничными условиями $Y_0 = -p_a; Y_N = -p_b$.

Полученную разностную схему (3.9) можно представить в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i Y_{i-1} + b_i Y_i + c_i Y_{i+1} = f_i, \quad (i = 1, 2, \dots, N-1);$$

$$Y_0 = -p_a; \quad Y_N = -p_b;$$

$$a_i = \frac{1}{2h_r^2 \nu^2 r E} (\nu - 1)(\nu + 1) \left(h_r r \frac{\partial E}{\partial r} - 3h_r E + 2r E \right);$$

$$b_i = -\frac{1}{h_r^2 \nu^2 r E} (\nu + 1) \left(2h_r^2 \nu \frac{\partial E}{\partial r} - h_r^2 \frac{\partial E}{\partial r} + 2\nu r E - 2r E \right);$$

$$c_i = \frac{1}{2h_r^2 v^2 r E} (v-1)(v+1) \left(-h_r r \frac{\partial E}{\partial r} + 3h_r E + 2r E \right);$$

$$f_i = \frac{E}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{vE}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (3.10)$$

Матрица этой системы является трехдиагональной

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & & & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & \\ & & & & & & a_{N-2} & b_{N-1} & c_{N-2} \\ & & & & & & & 1 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \\ Y_{r,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_a \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_i \\ \dots \\ f_{N-} \\ f_{N-} \\ -p_t \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

в силу чего её решение было получено методом прогонки [61].

Стационарное во времени распределение температуры по толщине цилиндра может быть определено формулой [51], [58]:

$$T(r) = T_0 \cdot \frac{\ln(b/r)}{\ln(b/a)} \quad (3.12)$$

при температурах внутренней и внешней поверхностей цилиндра, равных соответственно T_0 и нулю.

В трудах академика В. И. Андреева [6] и его ученика А. В. Смолова [51] аппроксимация модуля упругости проводилась по данным, приведённым ранее в разделе 3.1, при помощи полинома третьей степени ($N=3$)

$$E(T) = E_0 \beta(T) = E_0 \sum_n^N \beta_n T^n. \quad (3.13)$$

В случае постоянного модуля Юнга материала $E(r) = E_0 = \text{const}$, уравнение (3.6) значительно упрощается, и решение соответствующей задачи однородной термоупругости при однородных граничных условиях (3.9) приведено [48].

В работе [51] решена задача определения напряжённо-деформированного состояния бетонного цилиндра при следующих исходных данных: $a = 1.0$ м; $b = 2.0$ м; $T_0 = 300^\circ\text{C}$; $E_0 = 20 \cdot 10^3$ МПа; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$; $\nu = 0.2$. Результаты расчетов, выполненных численным методом и найденные из аналитического решения, приведены в таблице 3.2. Как видно из таблицы 3.2, численное решение практически совпадает с аналитическим даже при весьма редкой сетке ($N=10$).

Таблица 3.2 — Сравнение результатов численного и аналитического решений одномерной задачи неоднородной термоупругости, полученные в работе [51]

r , м	σ_r , МПа	σ_θ , МПа	σ_z , МПа
Численное решение			
1.00	0.00	−45.270	−45.770
1.20	−5.423	−20.734	−26.165
1.50	−5.858	+3.842	−2.019
1.80	−2.770	+20.492	+17.708
2.00	0.00	+29.063	+29.097
Аналитическое решение			
1.00	0.00	−45.890	−45.890
1.20	−5.414	−20.757	−26.197
1.50	−5.842	+3.814	−2.037
1.80	−2.768	+20.469	+17.752
2.00	0.00	+29.101	+29.101

На рисунке 3.2 представлено распределение температурного поля вдоль радиуса для задачи, результаты решения которой приведены в таблице 3.2, температурное поле определено согласно уравнению (3.12). Согласно полученному распределению температурного поля вдоль радиуса цилиндра были получены при помощи формул (3.2) и (3.4) графики изменения коэффициента $\beta_b(T) = a \cdot \exp(b \cdot T)$, отражённые на рисунке 3.3.

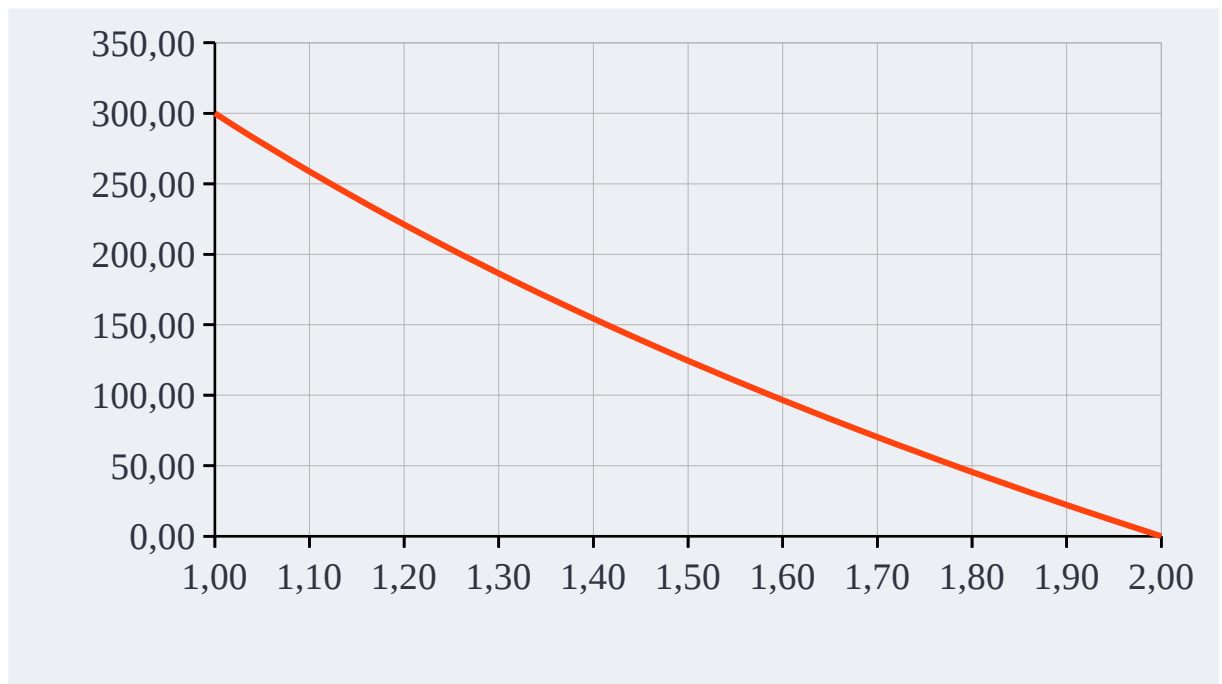


Рисунок 3.2 — Результаты определения распределения температуры вдоль радиуса согласно выражению (3.12)

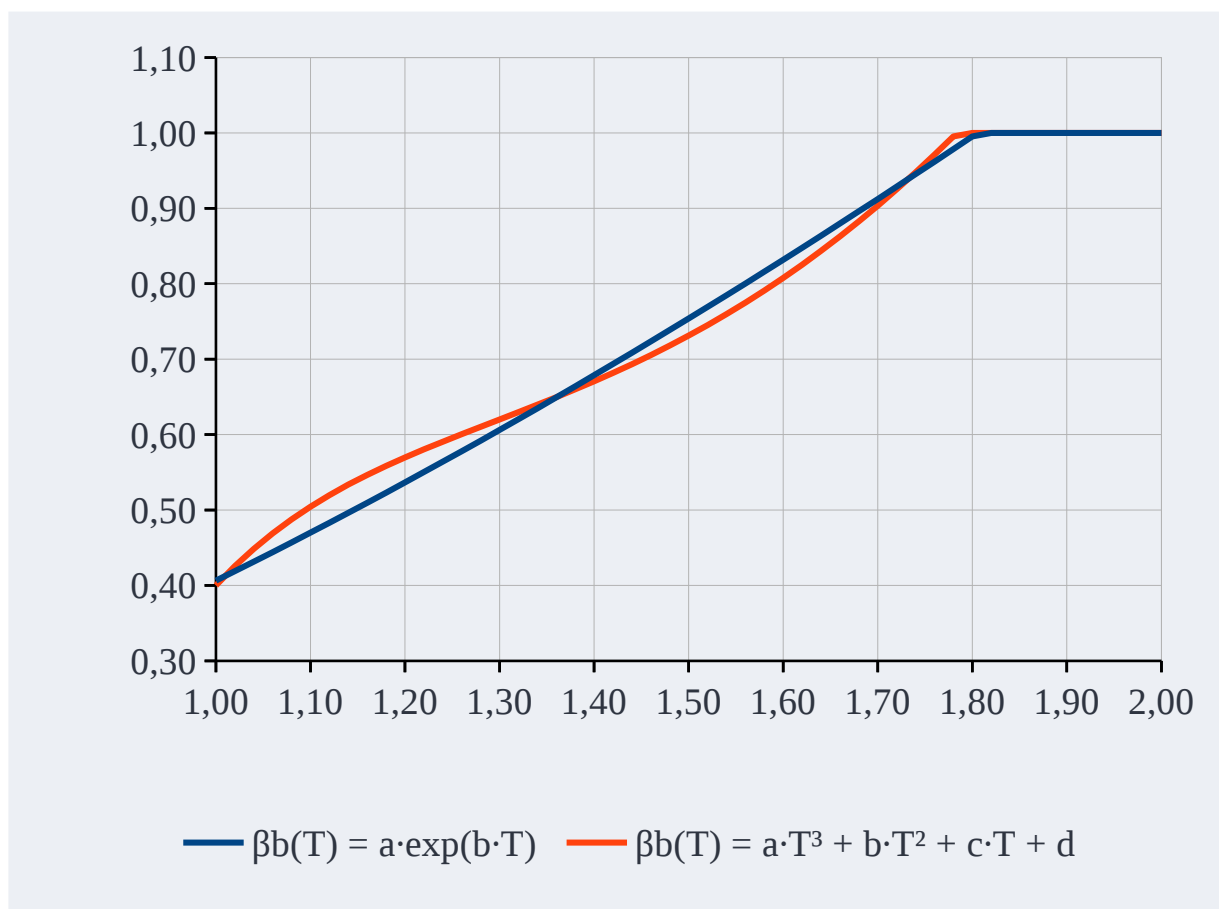


Рисунок 3.3 — Изменение коэффициента $\beta_b(T)$ по экспоненциальной (3.2) и кубической (3.4) формам в зависимости от распределения температуры на рисунке 3.2

Анализ экспоненциальной аппроксимации (3.2) и кубического полинома (3.4) показал, что последний обладает излишней точностью, значительно выгибаясь и принимая «S»-образную форму. Результаты в таблице 3.2 были получены при помощи аппроксимации через кубический полином. Однако, в последующих расчётах предпочтение будет отдано аппроксимации при помощи экспоненты, поскольку точность получается оптимальная и выше, чем у квадратичного полинома (3.3).

3.3. Решение при помощи метода конечных элементов. Задача №1

Для оценки достоверности полученных результатов будет проведено моделирование задачи из параграфа 3.2 при помощи метода конечных элементов. Расчётная схема задачи представлена на рисунке 1.1, схема к применению метода конечных элементов на рисунке 1.2,б, конечно-элементная сетка задачи №1 — на рисунке 3.4. Исходные данные задачи аналогичны таковым из задачи в параграфе 3.2.

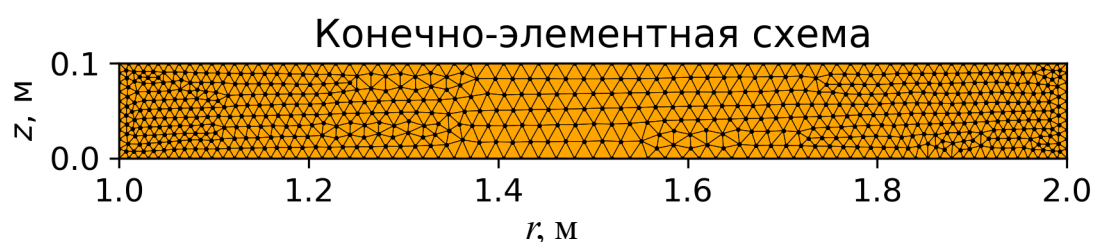


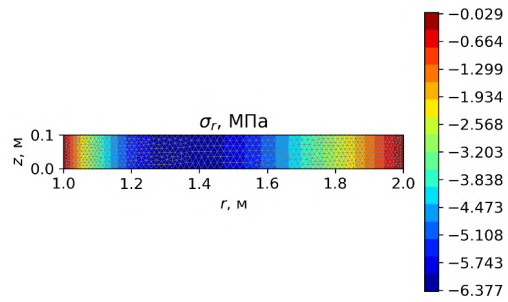
Рисунок 3.4 — Конечно-элементная сетка задачи №1

Для моделирования плоского деформированного состояния рассматривается диск высотой 0.1 м. Согласно рисунку 1.2,б конечно-элементная схема строилась при задании максимального размера в соответствующих узлах не более: для узлов 1, 3, 4, 6 — 0.01 м, для узлов 2, 5 — не более 0.02 м.

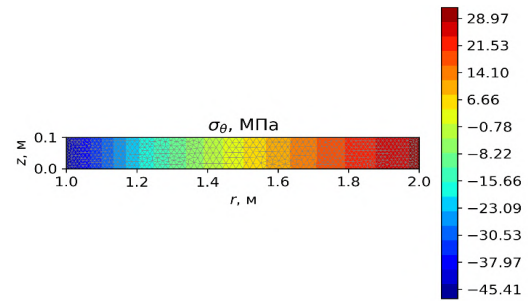
3.3.1. Задача №1.1

Материал рассматривается однородным, т. е. Не зависящим от температуры. Результаты решения при помощи МКЭ для однородного материала представлены на рисунках 3.5–3.7.

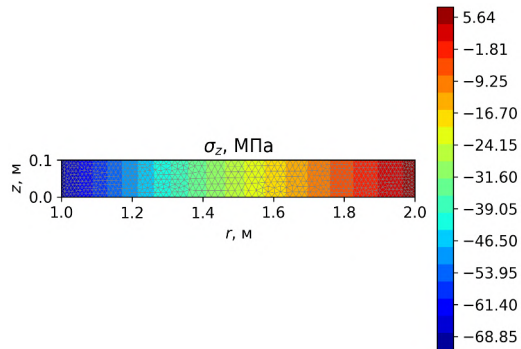
а



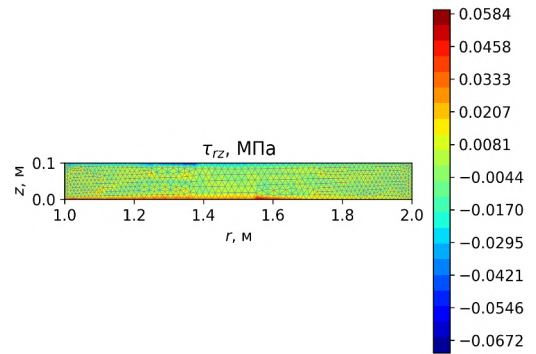
б



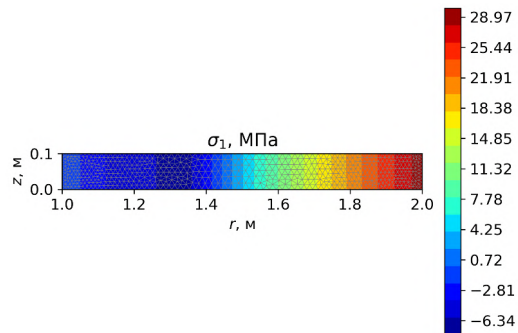
в



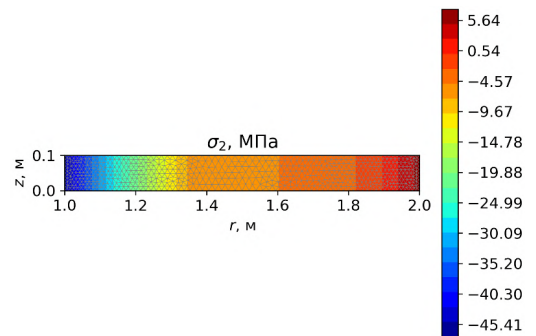
г



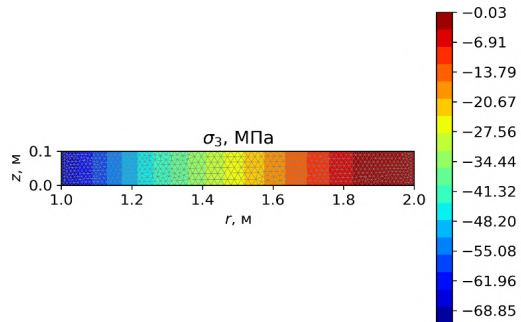
д



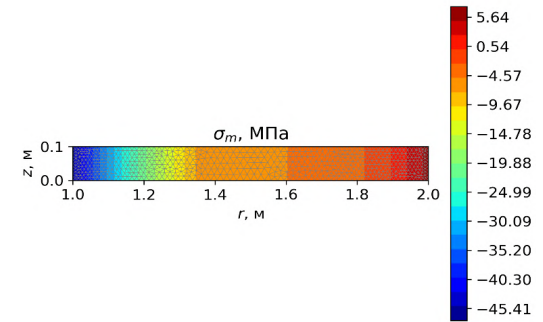
е



ж



з



и

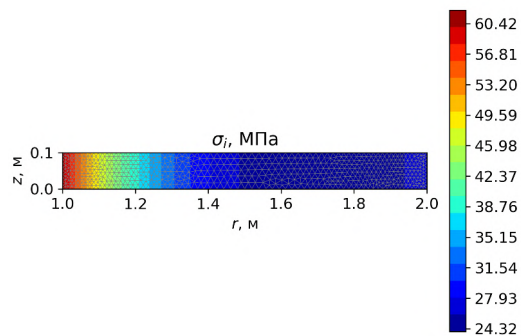
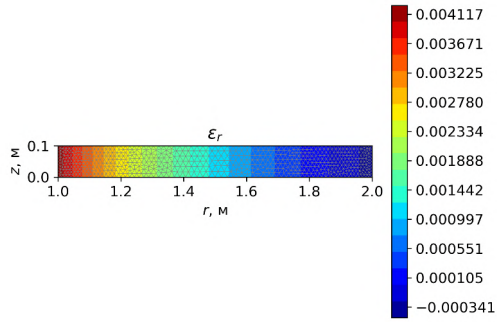
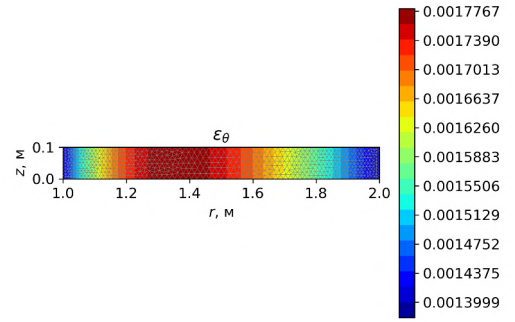


Рисунок 3.5 — Распределение напряжений в задаче №1.1

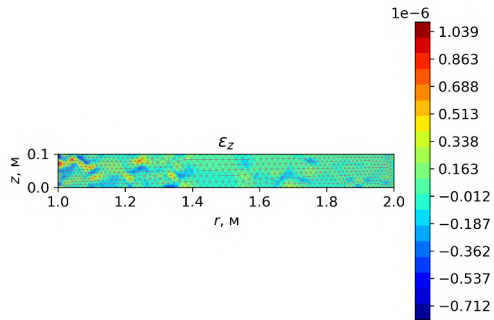
а



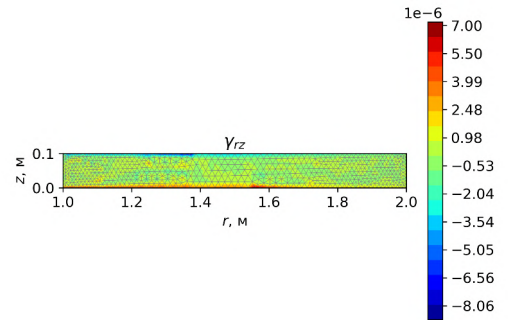
б



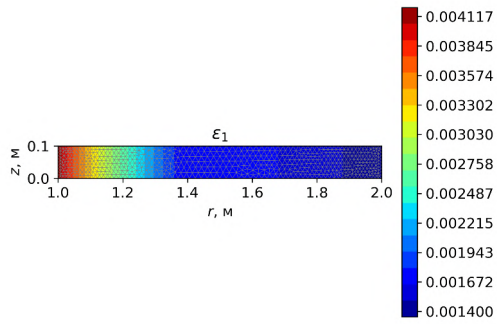
в



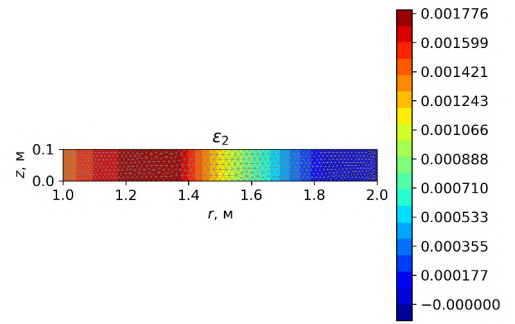
г



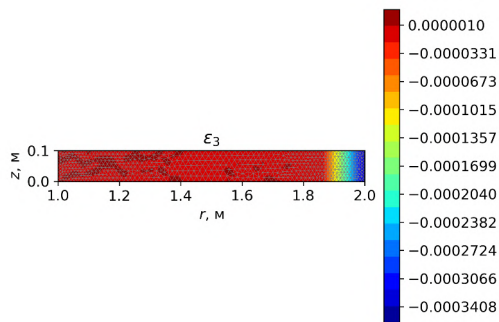
д



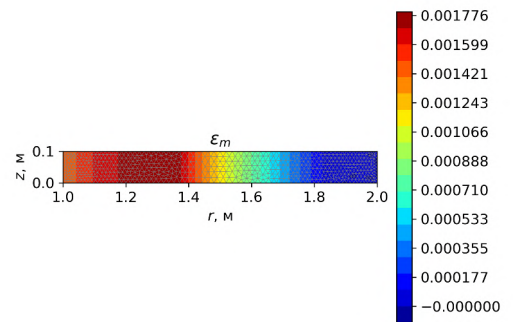
е



ж



з



и

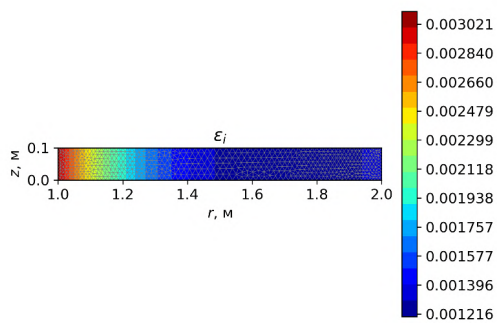


Рисунок 3.6 — Распределение относительной деформации в задаче №1.1

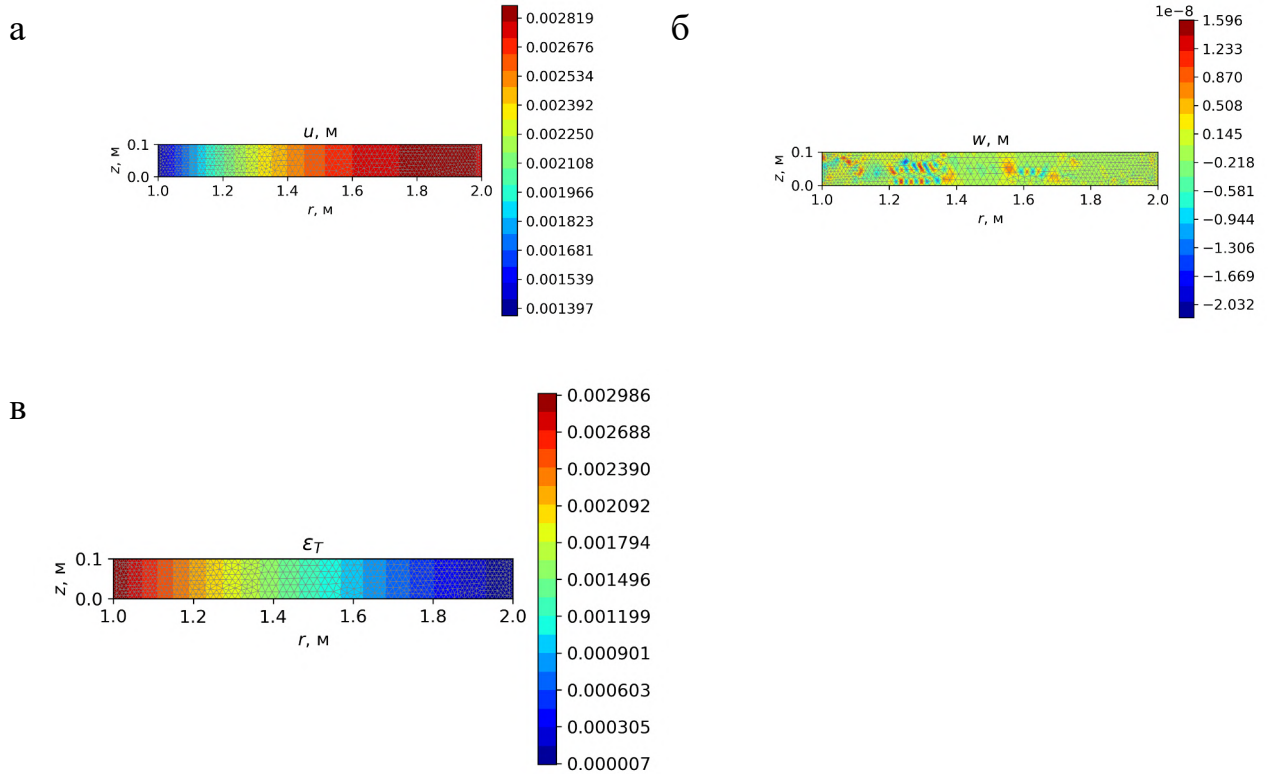


Рисунок 3.7 — Распределение перемещений в задаче №1.1

Сопоставление полученных при помощи МКЭ результатов с приведёнными в таблице 3.2 показывает хорошее совпадение для радиальных σ_r и окружных σ_θ напряжений, но существенное расхождение для осевых σ_z : - 45.390 МПа в таблице против - 68.850 МПа на рисунке 3.5, в на внутренней поверхности с координатой 1 м; 29.101 МПа в таблице против 5.64 МПа на рисунке 3.5, в на внешней поверхности с координатой 2 м. Наличие незначительных по величине касательных напряжений τ_{rz} на рисунке 3.5, г и сдвиговых деформаций γ_{rz} на рисунке 3.6, г для осесимметричной задачи объясняется некоторым несовершенством в полученной конечно-элементной сетке.

Для плоского напряжённого состояния осевые деформации ε_z принимают нулевое значение, следовательно, совместно уравнения (1.6) и (1.9) могут быть записаны

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \varepsilon_T = 0, \quad (3.14)$$

где $\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$ — температурная деформация; α — коэффициент линейного расширения материала.

Из выражения (3.14) осевое напряжение σ_z определяется

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E \cdot \varepsilon_T. \quad (3.15)$$

Подставим в выражение (3.15) значения σ_r и σ_θ из таблицы 3.2, полученные аналитически, а также $\nu = 0.2$, $E = 2 \cdot 10^4$ МПа, $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$:

— на внутренней поверхности $\sigma_\theta = -45.890$ МПа; $\sigma_r = 0$; $\Delta T = 300$ °C:

$$\sigma_z = 0.2(0 - 45.890) - 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = -69.178 \text{ МПа};$$

— на внешней поверхности $\sigma_\theta = 29.101$ МПа; $\sigma_r = 0$; $\Delta T = 0$ °C:

$$\sigma_z = 0.2(0 - 29.101) - 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5} \cdot 0 = 5.8202 \text{ МПа},$$

что очень хорошо согласуется с результатами, полученными при помощи МКЭ.

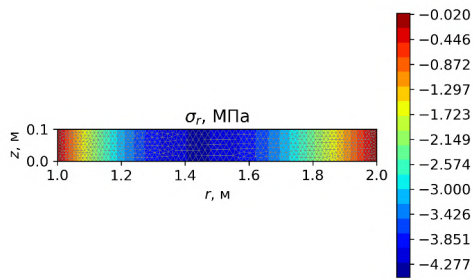
Второе, что необходимо отметить, автор [51] указывает, что результаты, приведённые в таблице 3.2, были получены для неоднородного материала, учитывающего изменение физико-механических параметров от температуры. Однако, моделирование показывает, что решение соответствует именно однородному цилиндру, без учёта изменения физико-механических параметров от температуры.

3.3.2. Задача №1.2

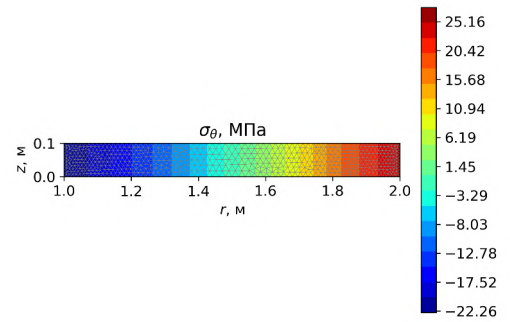
Физико-механические параметры материала зависят от температуры через уравнение (3.2). Результаты решения представлены на рисунках 3.8–3.10.

Анализ показывает, что влияние неоднородности материала из текущей задачи по сравнению с однородной постановкой приводит к существенному снижению напряжений. Подробное сравнение сопоставления максимальных значений различных компонентов напряжений, взятых по абсолютной величине, для однородного и неоднородного материалов приводится в таблице 3.3 на стр. 77.

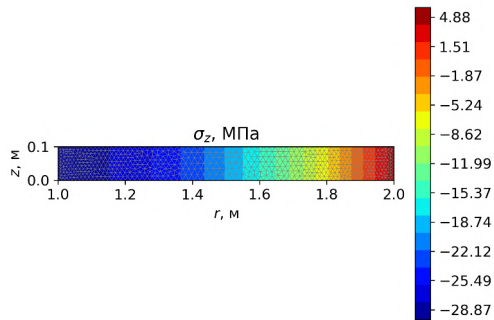
а



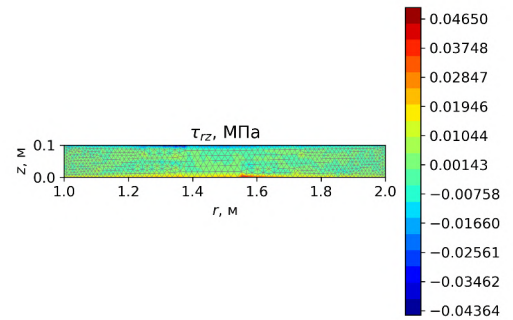
б



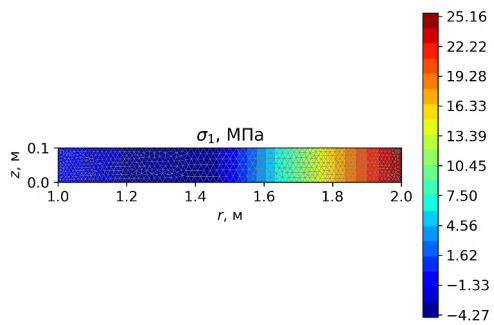
в



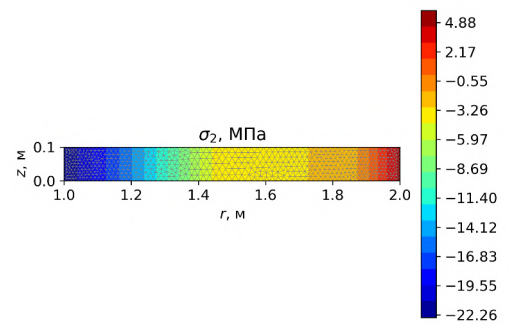
г



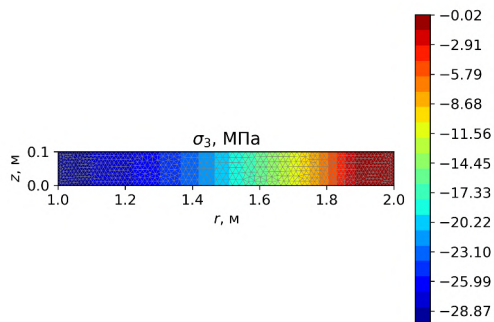
д



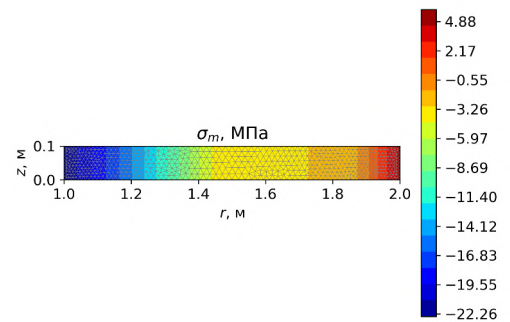
е



ж



з



и

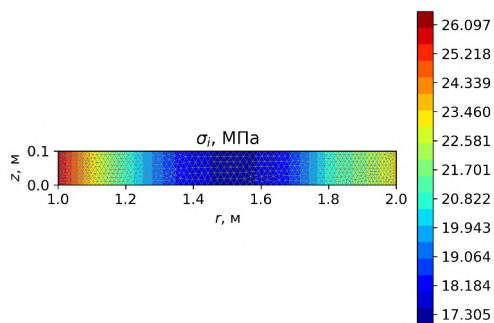
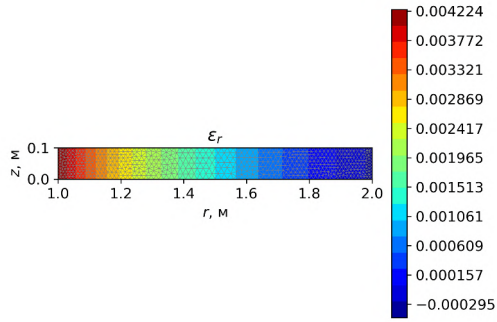
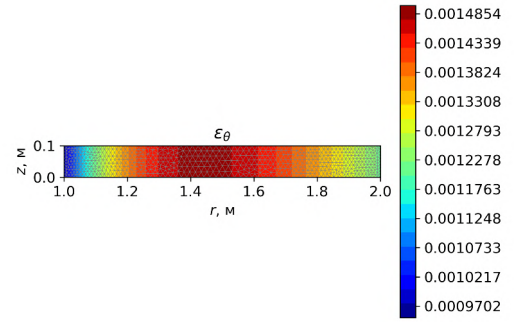


Рисунок 3.8 — Распределение напряжений в задаче №1.2

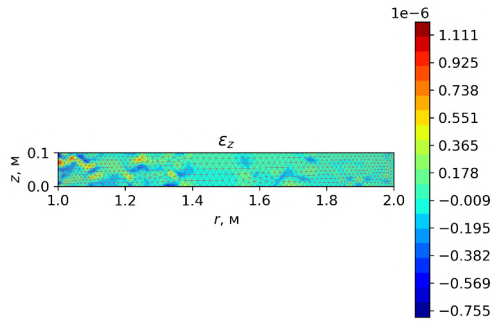
а



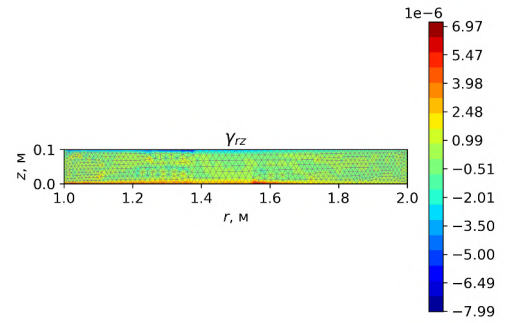
б



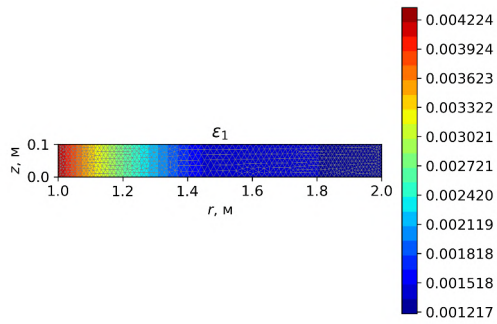
в



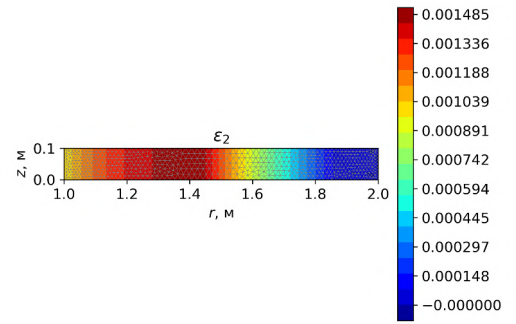
г



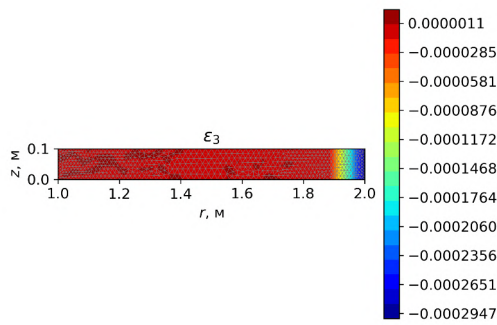
д



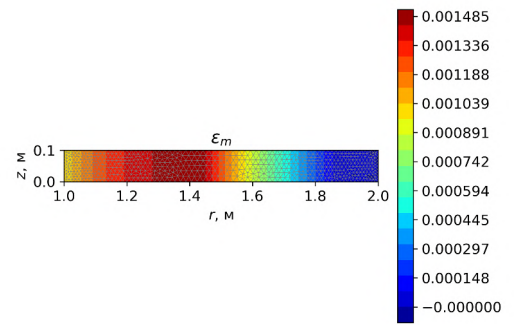
е



ж



з



и

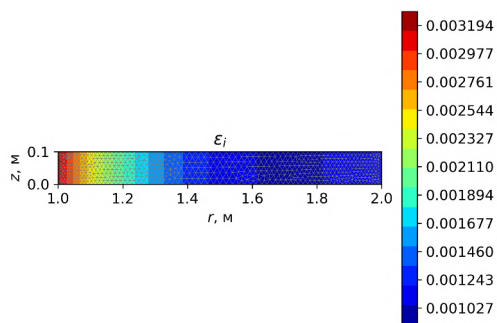


Рисунок 3.9 — Распределение относительной деформации в задаче №1.2

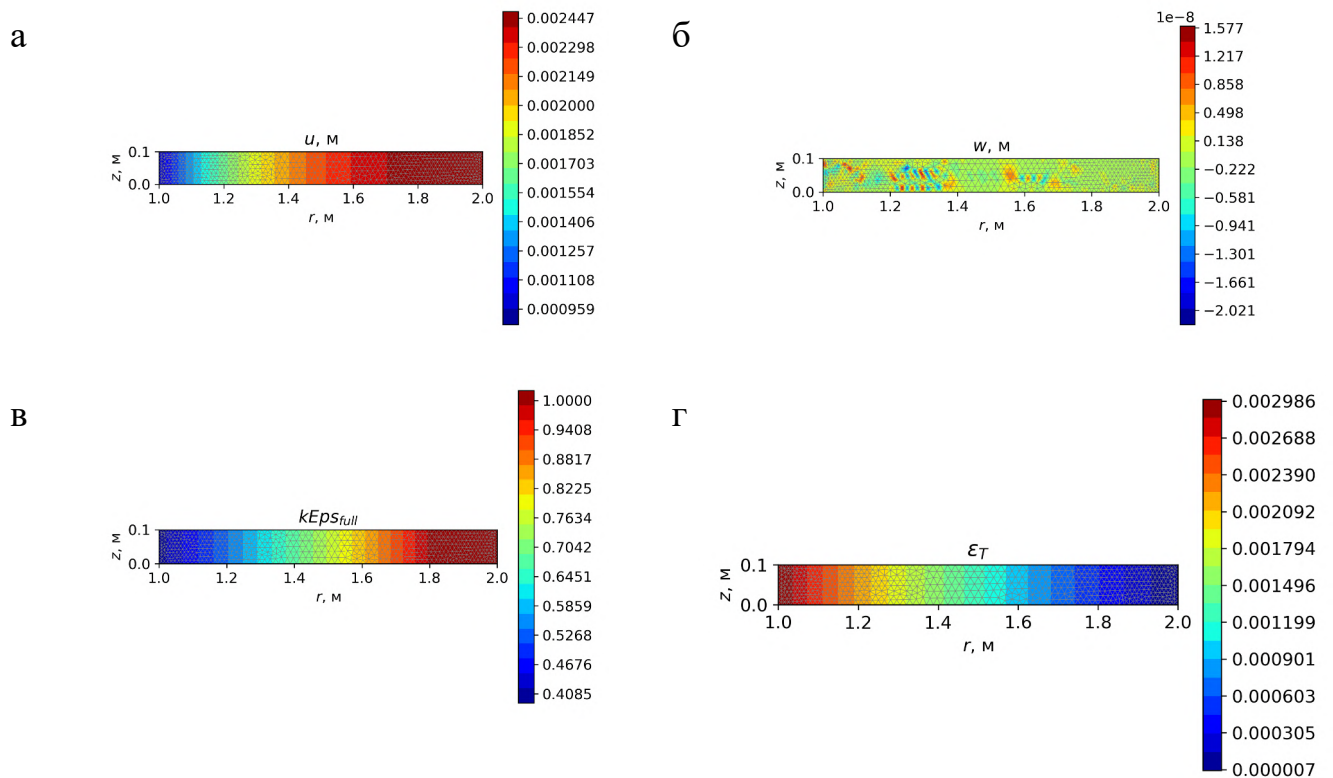


Рисунок 3.10 — Распределение перемещений в задаче №1.2

Решение задачи производилось в несвязной постановке. На первом этапе определяется температурное поле через соотношение (3.12), на втором этапе — через соотношение (3.1) пересчитывался модуль деформации для каждого конечного элемента, понижающий коэффициент при этом определялся при помощи выражения (3.2), на третьем этапе производилось определение напряжённо-деформированного состояния.

Учёт изменения физико-механических параметров от бетона приводит к существенному снижению напряжений. Связано это с тем, что наибольшие напряжения возникали в местах, где за счёт перепада температуры возникали наибольшие температурные деформации (на внутренней поверхности). Здесь же происходило наибольшее снижение значения модуля деформации, что приводит к меньшим значениям напряжений при сохранении уровня деформации. Распределение понижающего коэффициента приведено на рисунке 3.10,в.

Таблица 3.3 — Сопоставление результатов решения задачи №1 в однородной и неоднородной постановках

E	$\max(\sigma), \text{ МПа}$						
	r	θ	z	1	3	m	i
$E = \text{const}$	6.377	45.41	68.85	28.97	68.85	45.41	60.42
$E = f(T)$	4.277	25.16	28.87	25.16	28.87	22.26	26.10

Поскольку для каждого конечного элемента принимается некоторое стационарное значение модуля деформации, а за счёт распределения переменного температурного поля понижающий коэффициент и, следовательно, модуль деформации в каждом узле отличается, для расчёта использовано усреднённое по конечному элементу значения модулей деформации, определённые в его узлах, т. е. для трёх-узлового конечного элемента

$$\bar{E} = \frac{E_i + E_j + E_k}{3}, \quad (3.16)$$

где $\bar{E}$ — усреднённое по конечному элементу значения модуля деформации, используемые при вычислении матрицы $\mathbf{D}$ (1.8) и (1.29); E_i, E_j, E_k — значения модулей деформации, определённые в узлах i, j, k конечного элемента.

3.4. Учёт армирования бетона. Задача №2

Проведено моделирование адаптации задачи №1 к реальным условиям. Для этого помимо «абстрактного» материала, представляющего бетон, определяемого основными двумя физико-механическими параметрами (модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν) учитывается изменение соотношения между деформациями и напряжениями для конкретного класса бетона, определяемого согласно методикам, приведённым в главе 2. За основу были взяты соотношения соотношения на основе формулы Сарджина, приведённые в параграфе 2.2.1, как дающие весьма удовлетворительное согласование теоретических значения с экспериментальными данными, без учёта дополнительных коэффициентов запаса.

Конечно-элементная сетка задачи №2 представлена на рисунке 3.11. Тёмно-жёлтым цветом представлены конечные элементы, моделирующие бетон, бирюзовым — арматуру. На схеме для простоты восприятия приведена грубая сетка, при непосредственном расчёте использован более частый шаг: для бетона — сетка, максимальным размером не более $d/2$, для арматуры — не более $d/10$, где — диаметр арматурного стержня принятый в расчёте $d=2.4$ см. Шаг между арматурными стержнями принят $h_s=15$ см, как в радиальном направлении r , так и в осевом z . В силу симметрии рассматривается участок по высоте в половину шага арматуры в осевом направлении, т. е. $h_s/2=7.5$ см. Расстояние от внутренней и внешней поверхности цилиндра до центров крайних арматурных стержней составляет 5.0 см. В сечении вмещается 7 арматурных стержней. Внутренний радиус цилиндра $R_A=1$ м, внешний — $R_B=2$ м.

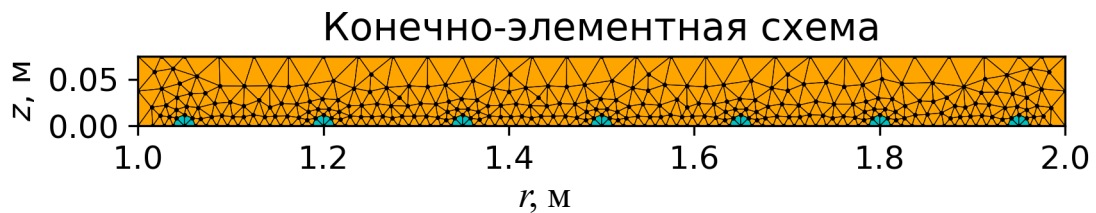


Рисунок 3.11 — Конечно-элементная сетка задачи №2

Процент армирования сечения по площади равен

$$\mu_s = \frac{A_s}{A_b} \cdot 100\% = \frac{7 \text{ шт.} \cdot \frac{\pi \cdot (2.4 \text{ см})^2}{4}}{100 \text{ см} \cdot 15 \text{ см} - 7 \text{ шт.} \cdot \frac{\pi \cdot (2.4 \text{ см})^2}{4}} \cdot 100\% = 2.16\%. \quad (3.17)$$

Коэффициент линейного температурного расширения материала и для бетона, и для стали принят $\alpha=10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Модель деформации арматуры принят $E_s=2.06 \cdot 10^5$ МПа постоянным и от температуры не изменяется. Коэффициент Пуассона бетона $\nu=0.2$, арматуры $\nu=0.3$.

3.4.1. Задача №2.1

Однородная постановка: модуль упругости бетона не изменяется и равен $E_{b,0}=2.0 \cdot 10^4$ МПа, прочность бетона на сжатие $R=30$ МПа, на растяжение $R_t=1.5$ МПа; температура изменяется от $T_a=300^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности до $T_b=0^\circ\text{C}$ на внешней.

Результаты расчёта приведены на рисунках 3.12–3.14 (страницы 84–86).

Анализ результатов. Ожидаемо, наибольшие деформации от температурного расширения материала (см. рисунок 3.14,в) находятся на внутренней поверхности тела, что вызывает там наибольшие напряжения, поскольку развитию температурных деформаций теперь препятствует наличие арматуры, которая препятствует радиальному смещению межарматурных слоёв бетона. Связано это с различием практически на порядок модулей упругости бетона и арматуры. Если говорить про арматуру, то наибольшие напряжения возникают во внутренних стержнях.

Наибольшие напряжения в бетоне достигают величин:

— среднее напряжение составляет $\min(\sigma_m)=-48.37$ МПа в сжатой зоне и $\max(\sigma_m)=6.22$ МПа в растянутой зоне, что значительно превышает пределы прочности бетона, которые принимались в постановке задачи;

— интенсивность напряжений составляет $\max(\sigma_i)=94.08$ МПа МПа, что практически, чем в 3 раза превышает прочность бетона на сжатие.

Ещё интерес вызывает возникновение значительных по величине касательных напряжений во внутренней арматуре $\max|\tau_i|=224.8$ МПа, а также окружных напряжений от $\min(\sigma_\theta)=-314.0$ МПа до $\max(\sigma_\theta)=273.9$ МПа.

3.4.2. Задача №2.2

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, начальное значение составляет $E_{b,0}=2.0 \cdot 10^4$ МПа, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), прочность бетона

на сжатие $R=30$ МПа, на растяжение $R_t=1.5$ МПа; температура изменяется от $T_a=300^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности до $T_b=0^\circ\text{C}$ на внешней.

Результаты расчёта приведены на рисунках 3.15–3.17 (страницы 87–89).

Анализ результатов. Как и при однородной постановке (задача №2.1), на внутренней поверхности тела возникают наибольшие напряжения от развития температурных деформаций в связи с работой арматуры, которая препятствует радиальному смещению межарматурных слоёв бетона. Однако, в бетоне, за счёт изменения модуля упругости, теперь наблюдается значительное снижение напряжений.

Наибольшие напряжения в бетоне достигают величин:

— среднее напряжение составляет $\min(\sigma_m)=-24.67$ МПа в сжатой зоне и $\max(\sigma_m)=5.19$ МПа в растянутой зоне. Минимальное значение напряжения при этом становится примерно в 2 раза ниже, чем в случае однородной постановки, максимальное снизилось незначительно;

— интенсивность напряжений составляет $\max(\sigma_i)=43.47$ МПа МПа, что так же превышает прочность бетона на сжатие, но уровень напряжения стал более чем в 2 раза ниже, чем при однородной постановке.

Если говорить про напряжения в арматуре, то величина касательных напряжений во внутренней арматуре $\max|\tau_i|=224.8$ МПа не изменилась, а также окружающих напряжений поменялась: минимальная с $\min(\sigma_\theta)=-314.0$ МПа до $\min(\sigma_\theta)=-363.3$ МПа, максимальная с $\max(\sigma_\theta)=273.9$ МПа до $\max(\sigma_\theta)=241.4$ МПа.

Интересную информацию дают графики радиальных 3.16,а и окружных деформаций 3.16,б, поскольку они показывают, что в радиальном направлении материал на внутренней поверхности значительно растягивается, что и вызывает столько значительный уровень напряжений в стальной арматуре, однако в окружном направлении растяжение возникает именно в области вокруг середины рассматриваемого сечения.

3.4.3. Задача №2.3

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температура изменяется от $T_a=50^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности до $T_b=0^\circ\text{C}$ на внешней.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Данная постановка задачи предназначена для оценки влияния температурной компоненты на напряжённое-деформированное состояние бетона с учётом изменения модуля упругости как от температуры, так и от самого напряжённо-деформированного состояния.

Результаты расчёта приведены на рисунках 3.18–3.20 (страницы 90–92).

Анализ результатов показывает, что в бетоне даже при уровне температуры на внутренней поверхности $T_a=50^\circ\text{C}$ создаются температурные деформации такого уровня, что происходит разрушение бетона. Полный коэффициент изменения модуля деформации (1.65) на рисунке 3.20, в показывает, что разрушение бетона (области, где $k_{\varepsilon, full} = k_T \cdot k_\varepsilon \rightarrow 0$) происходит как раз у внешней арматуры (где изначально наблюдалось растяжение бетона, а также у внутренней поверхности цилиндра, где радиальные деформации также были положительными, то есть имеет место растяжение материала).

Таким образом, перепад температуры в $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ для столь толстостенных железобетонных цилиндров может приводить к разрушению бетона.

3.4.4. Задача №2.4

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует. На внутреннюю поверхность действует сжимающее напряжение $P_a = 1.50$ МПа.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 3.21–3.23 (страницы 93–95).

Данная постановка задачи позволяет оценить работу конструкции без температурного градиента, но с наличием давления на внутреннюю поверхность изделия.

Анализ графика 3.23,в (коэффициента понижения модуля упругости, который в данной задаче зависит только от напряжённо-деформированного состояния в связи с отсутствием температурного поля) показал локальное появление ослабленной зоны на границе контакта внутренней арматуры с бетоном, при этом область весьма мала даже по сравнению с диаметром арматуры, имеет значение $k_\varepsilon = 0.667$ при предельном значении в $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$. Распределение

напряжений показывает, что в этом месте наблюдаются значительные концентрации касательного напряжения τ_{rz} , среднее напряжение σ_m положительно, т. е. преобладает растяжение, что и объясняет возможное разрушение бетона.

Следовательно, можно сказать, что в данной постановке предельное внутреннее давление составляет $P_a = 1.50 \text{ МПа} \approx 15 \text{ ат.}$

3.4.5. Задача №2.5

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует. На внутреннюю поверхность действует сжимающее напряжение $P_a = 1.80 \text{ МПа.}$

Параметры бетона:

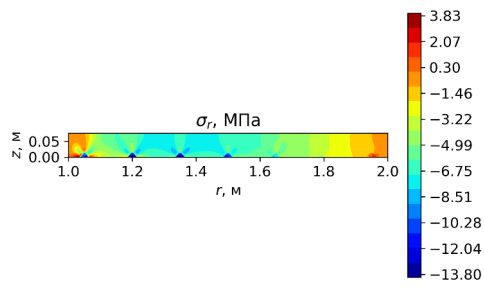
- класс В50
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 33547.5 \text{ МПа};$
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 16471.5 \text{ МПа};$
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4910;$
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2;$
- прочность на сжатие: $R = 35.375 \text{ МПа};$
- прочность на растяжение: $R_t = 2.743 \text{ МПа.}$

Результаты расчёта приведены на рисунках 3.24–3.26 (страницы 96–98).

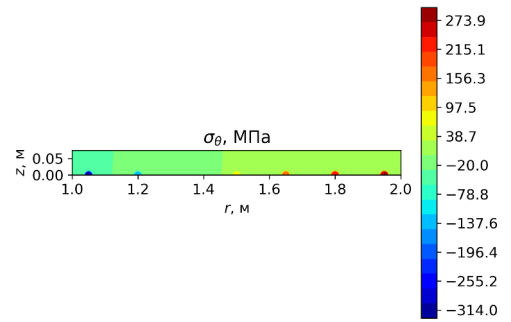
Данная постановка предназначена для сравнения работы толстостенной цилиндрической оболочки при изменении класса бетона с В40 (задача №2.4) до В50.

Анализ графика 3.26,в (коэффициента понижения модуля упругости), показал поведение материала аналогично задаче №2.4, однако подобное ослабление появляется при несколько большем внутреннем давлении $P_a = 1.80 \text{ МПа} \approx 18 \text{ ат,}$ которое можно считать предельно допустимым для текущей задачи.

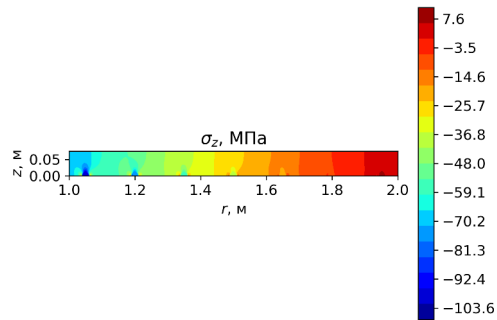
а



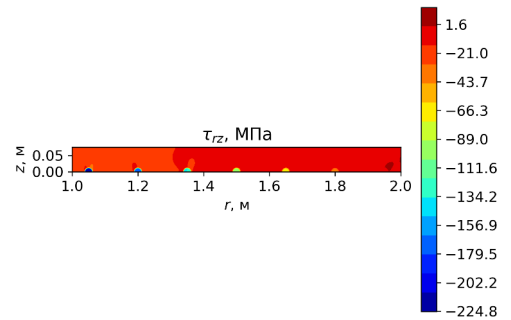
б



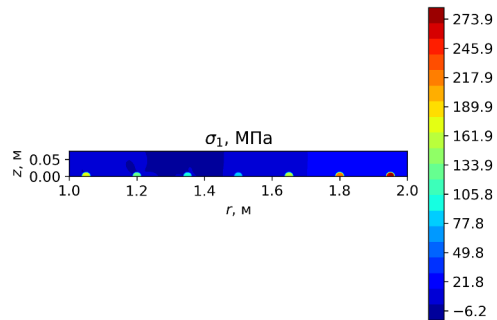
в



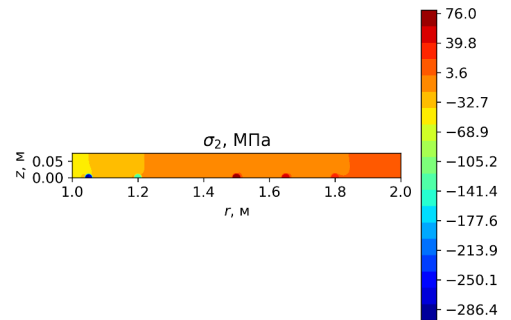
г



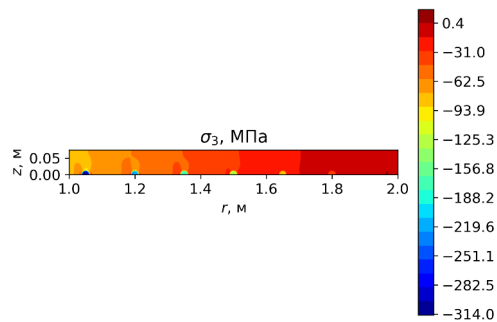
д



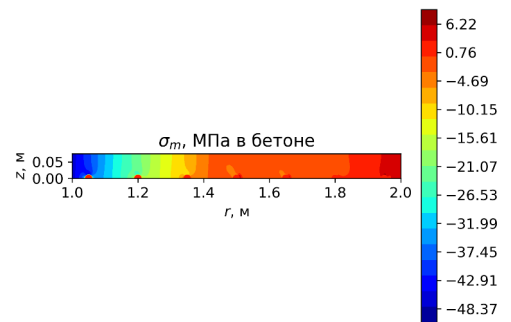
е



ж



з



и

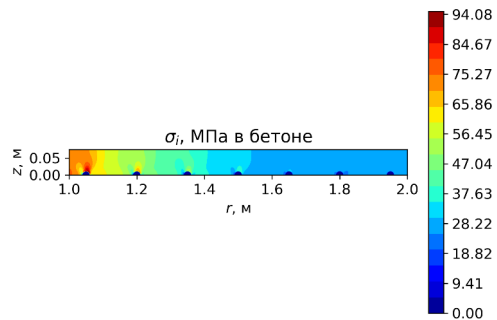
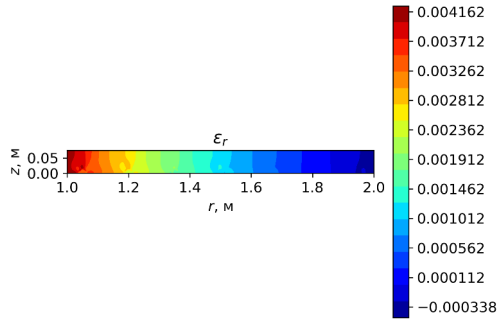
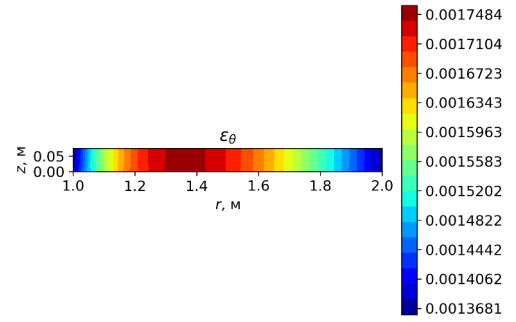


Рисунок 3.12 — Распределение напряжений в задаче №2.1

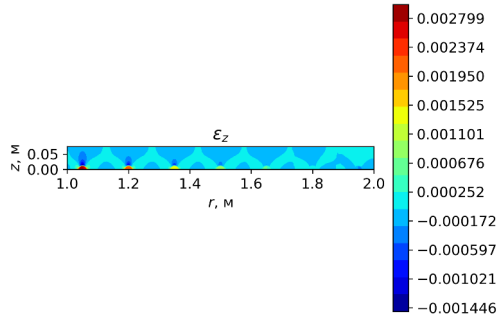
а



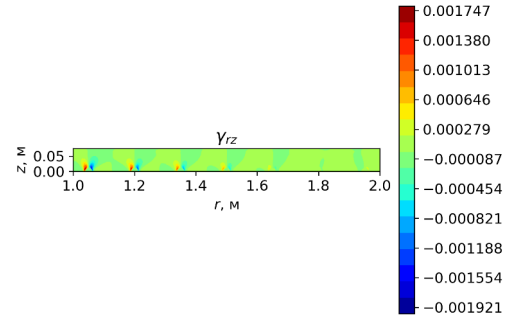
б



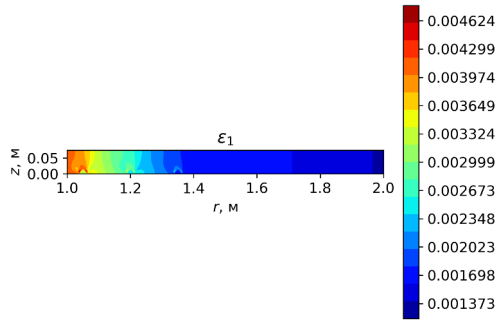
в



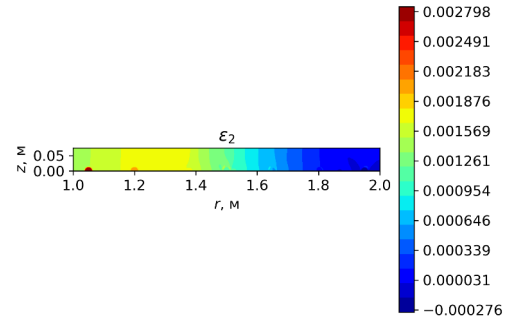
г



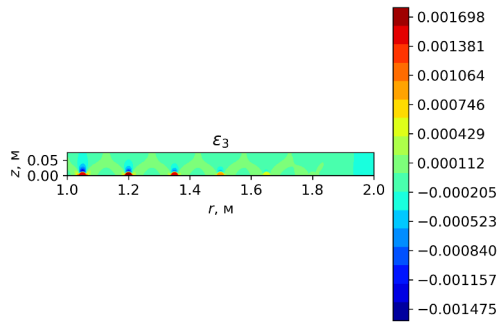
д



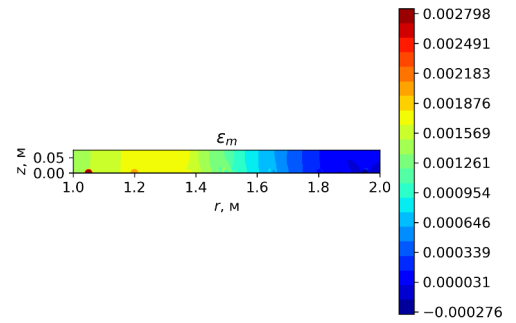
е



ж



з



и

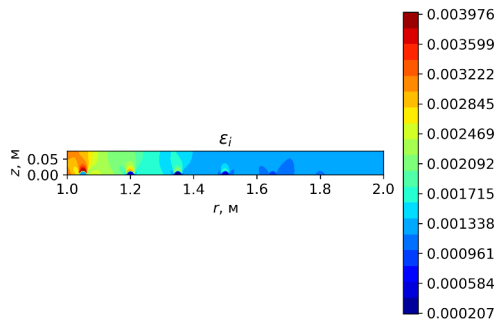
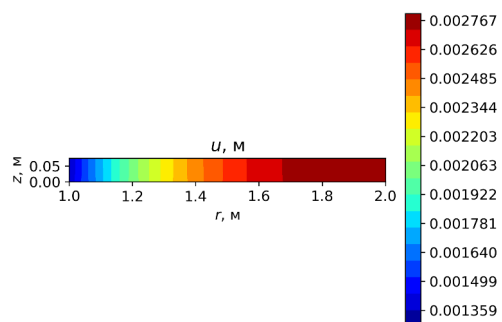
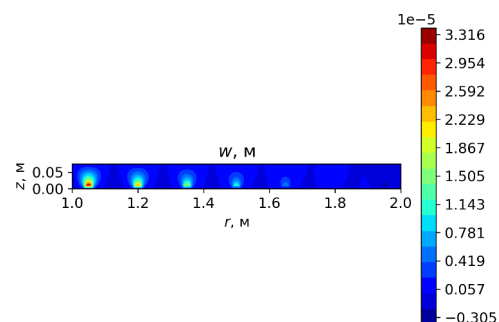


Рисунок 3.13 — Распределение относительной деформации в задаче №2.1

а



б



в

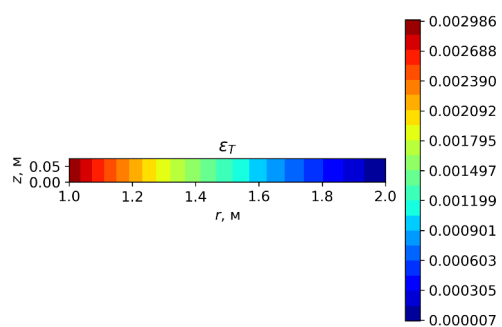
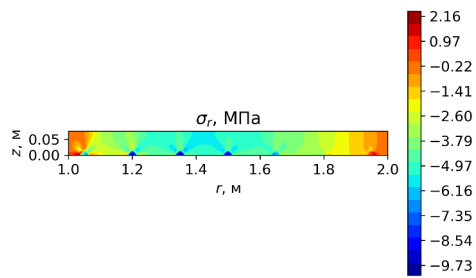
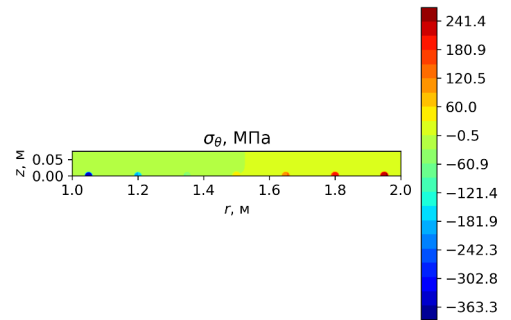


Рисунок 3.14 — Распределение перемещений в задаче №2.1

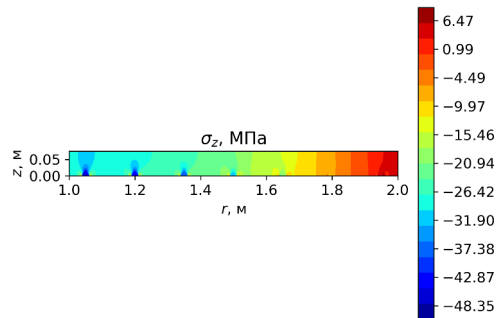
а



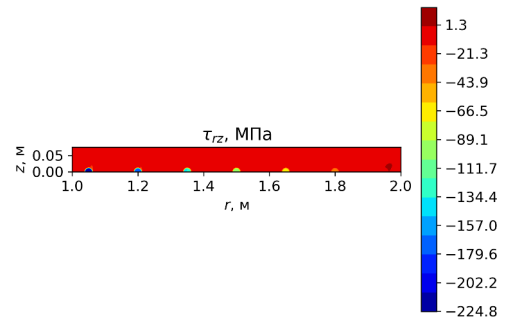
б



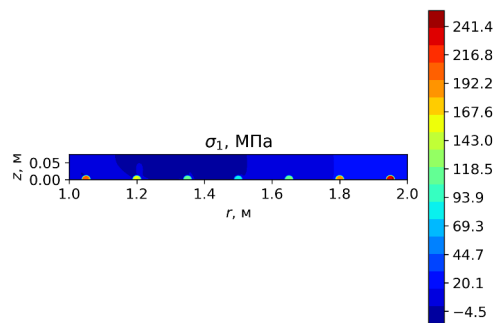
в



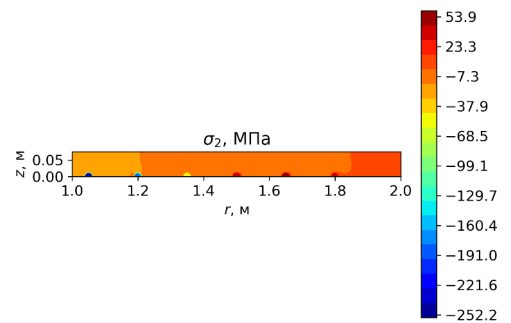
г



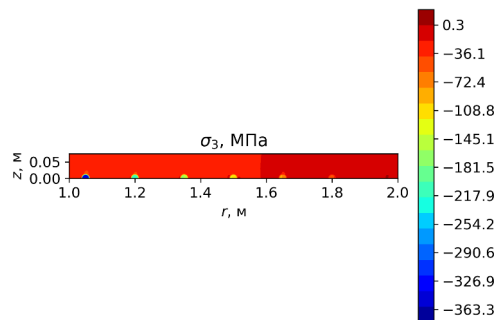
д



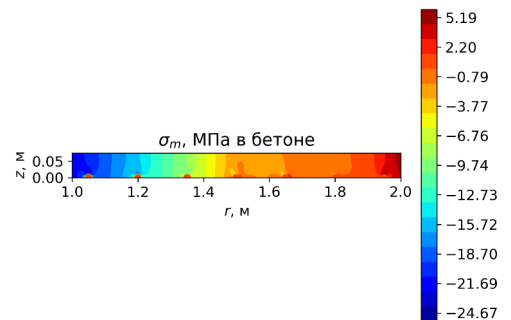
е



ж



з



и

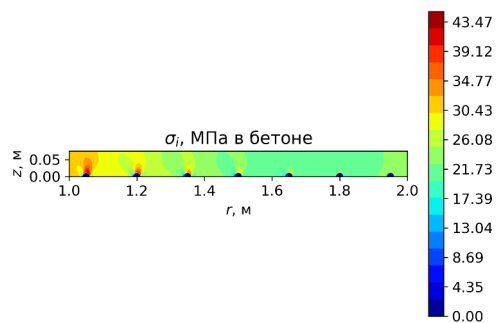
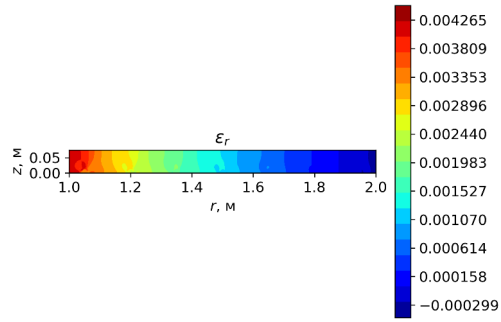
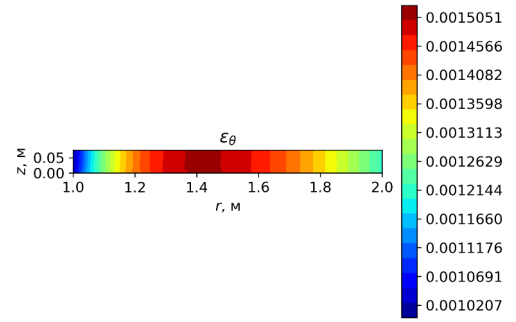


Рисунок 3.15 — Распределение напряжений в задаче №2.2

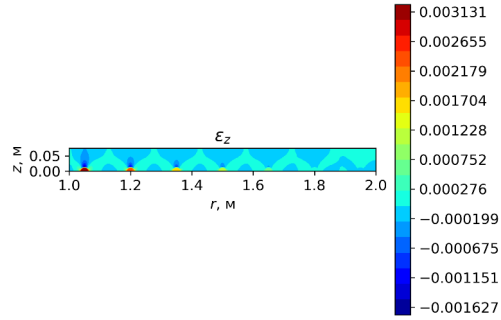
а



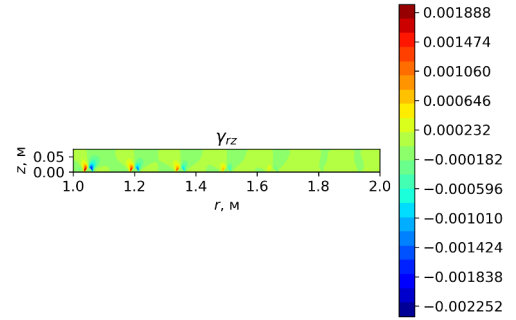
б



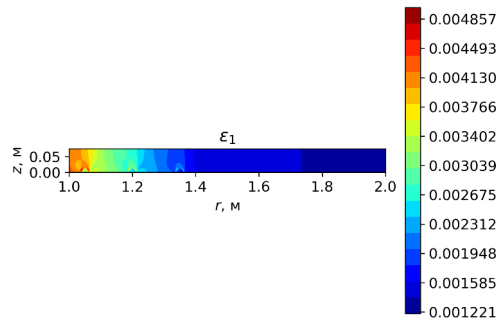
в



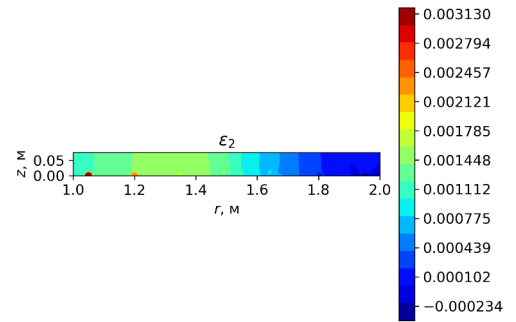
г



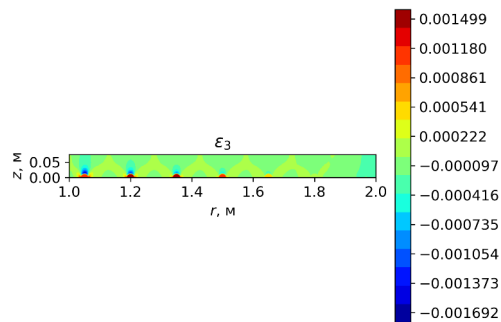
д



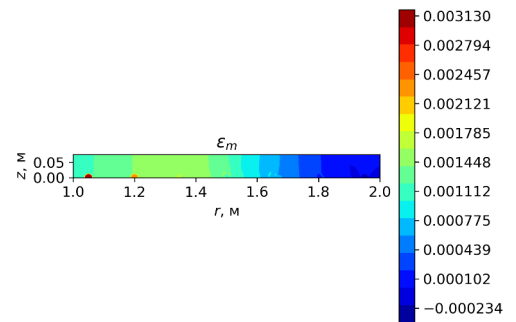
е



ж



з



и

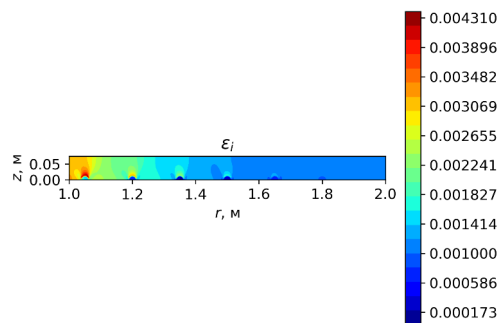
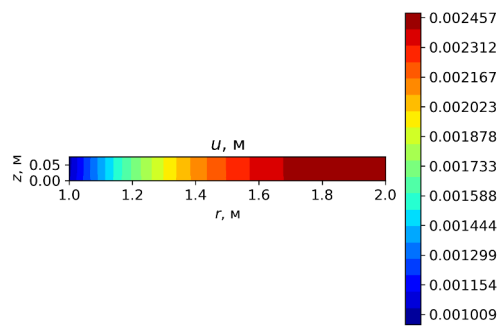
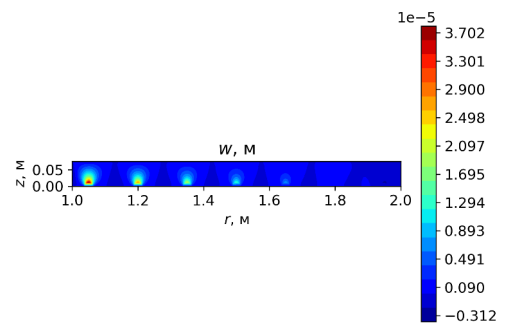


Рисунок 3.16 — Распределение относительной деформации в задаче №2.2

а



б



в

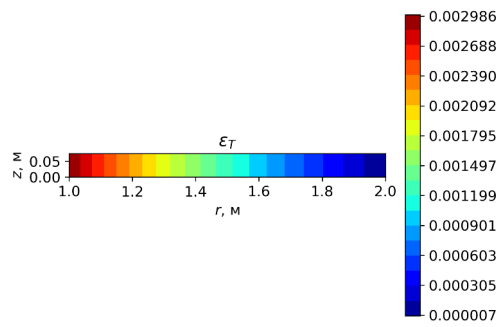
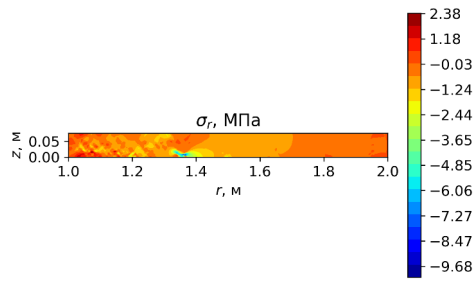
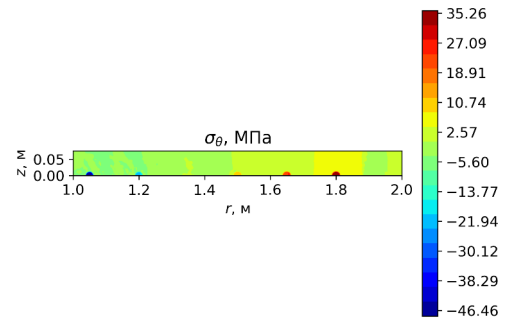


Рисунок 3.17 — Распределение перемещений в задаче №2.2

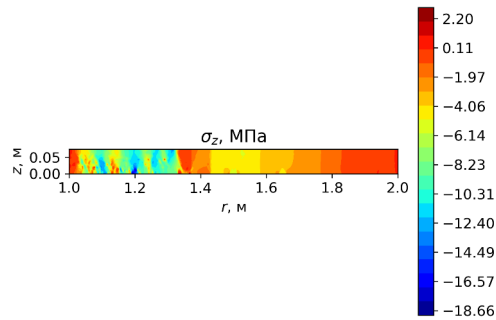
а



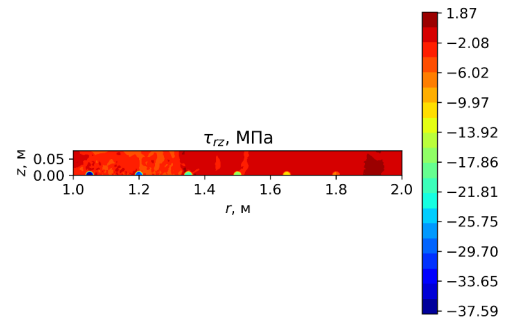
б



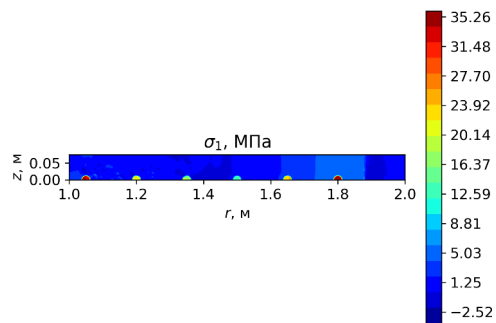
в



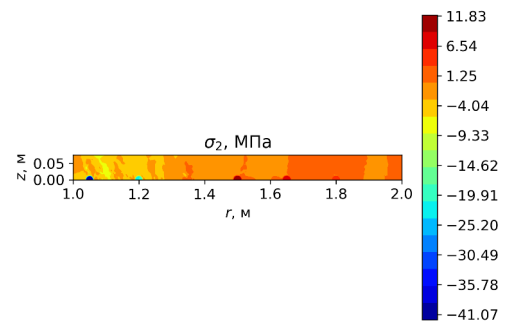
г



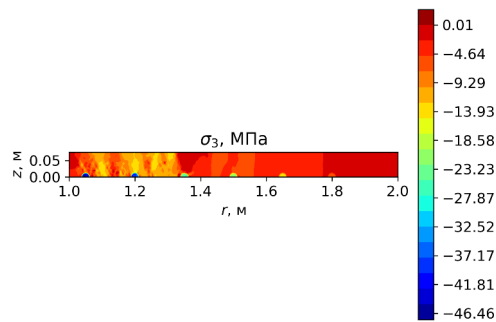
д



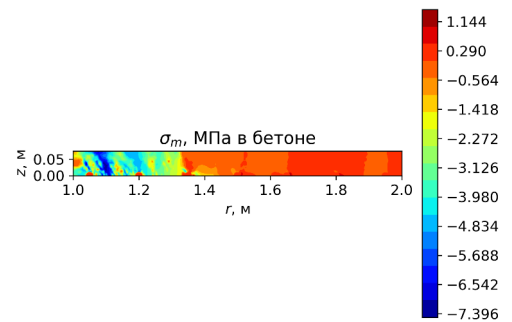
е



ж



з



и

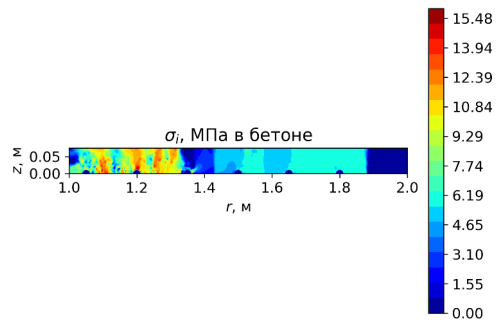
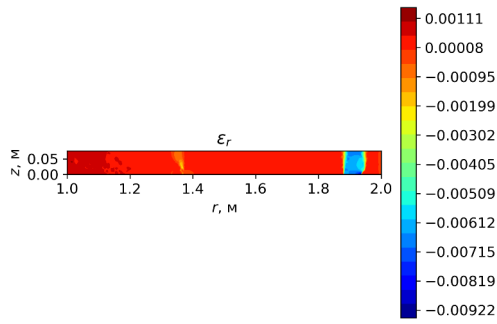
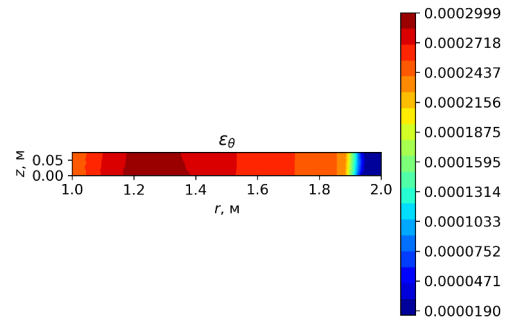


Рисунок 3.18 — Распределение напряжений в задаче №2.3

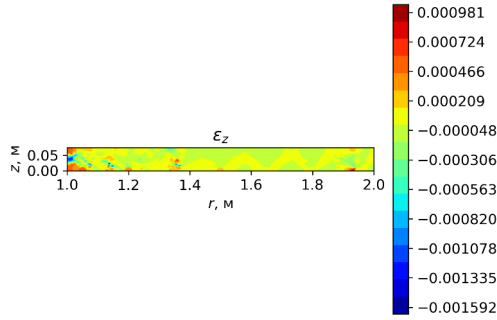
а



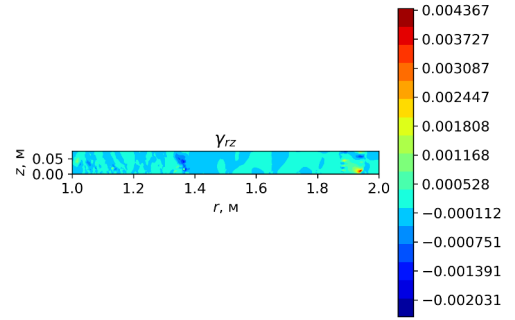
б



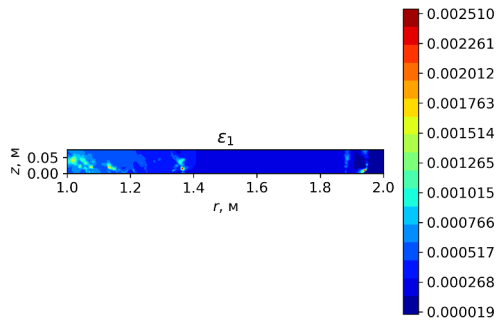
в



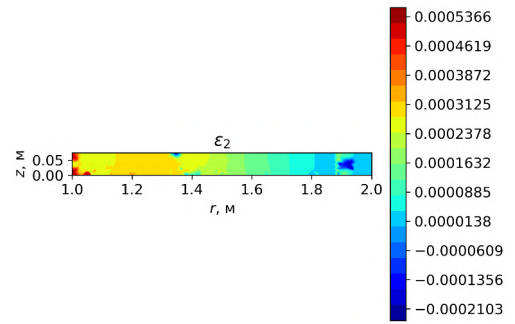
г



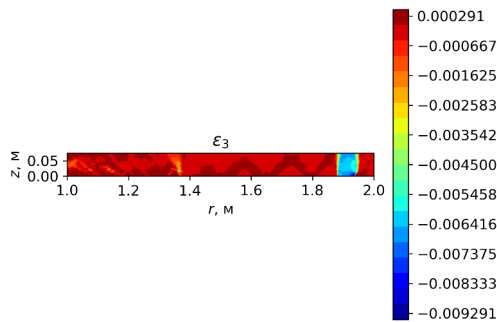
д



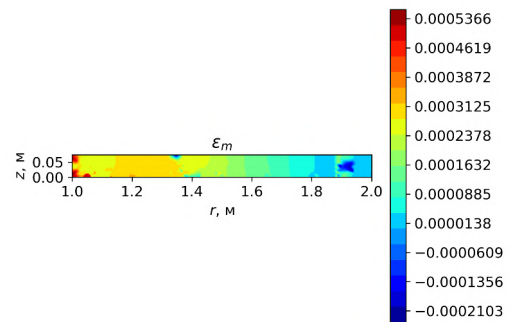
е



ж



з



и

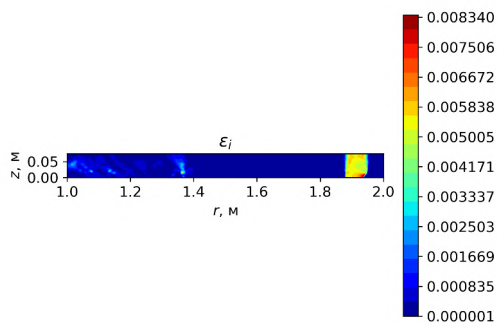
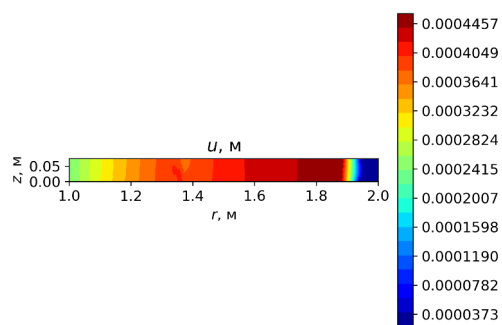
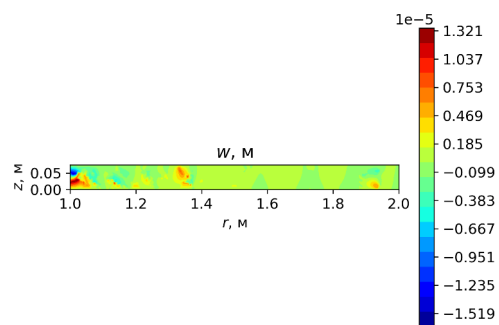


Рисунок 3.19 — Распределение относительной деформации в задаче №2.3

а



б



в

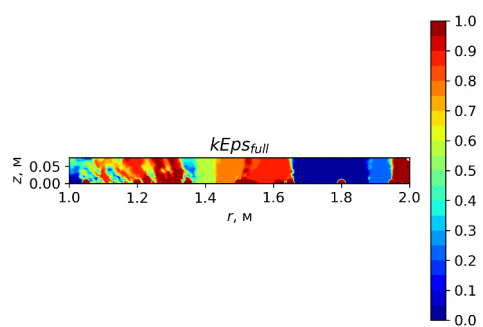
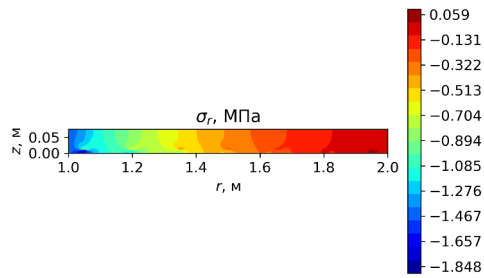
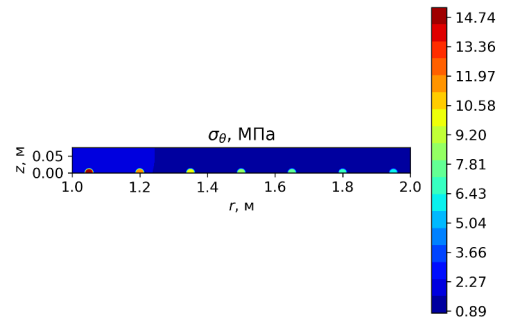


Рисунок 3.20 — Распределение перемещений в задаче №2.3

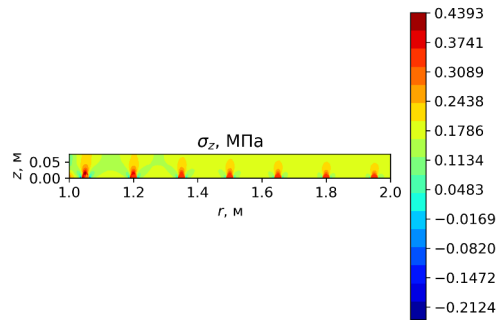
а



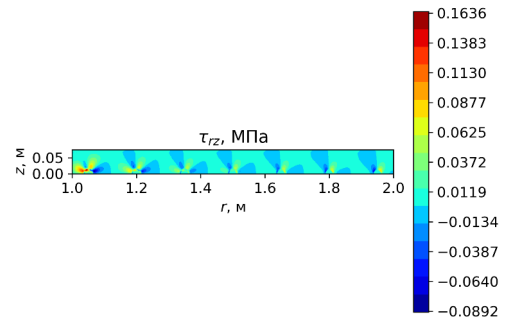
б



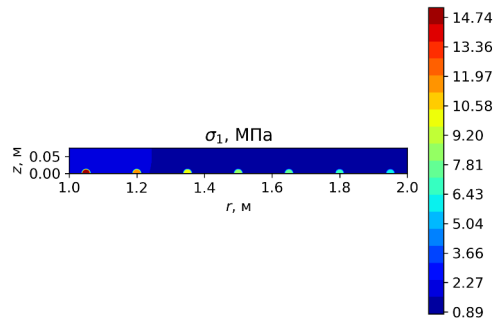
в



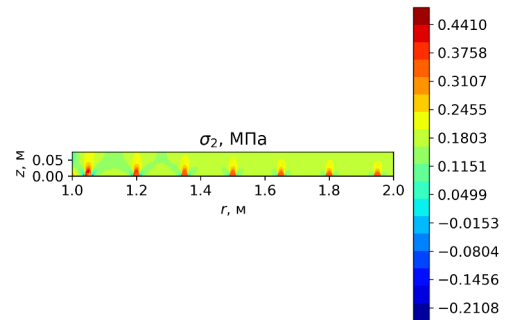
г



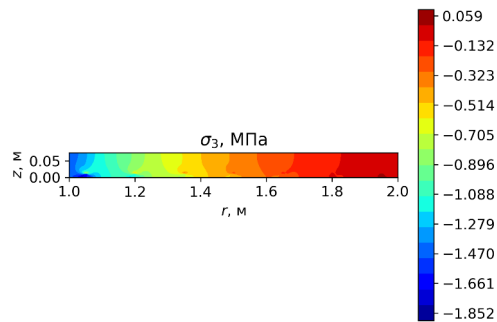
д



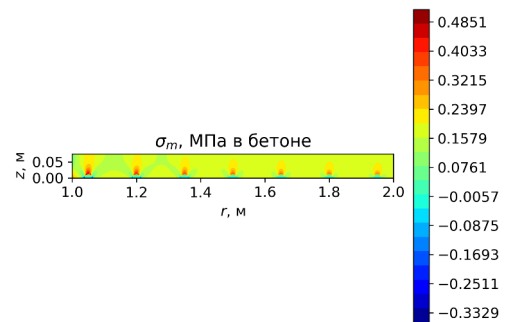
е



ж



з



и

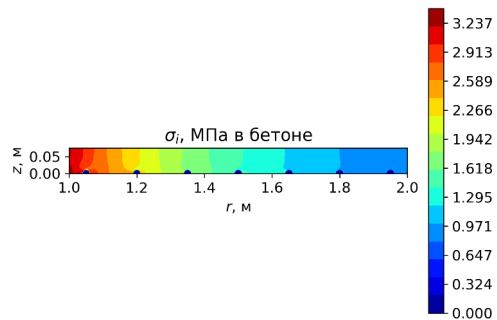
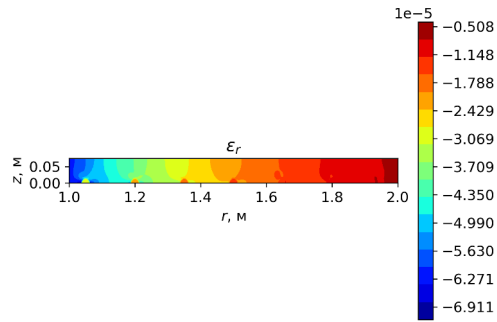
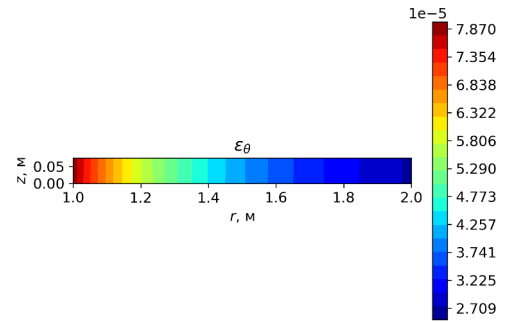


Рисунок 3.21 — Распределение напряжений в задаче №2.4

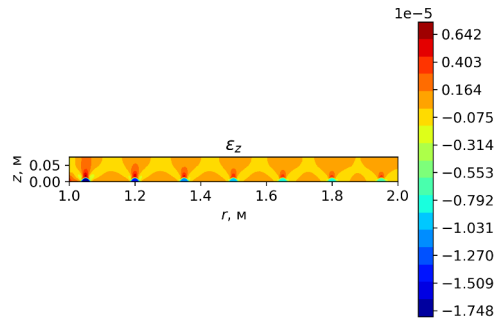
а



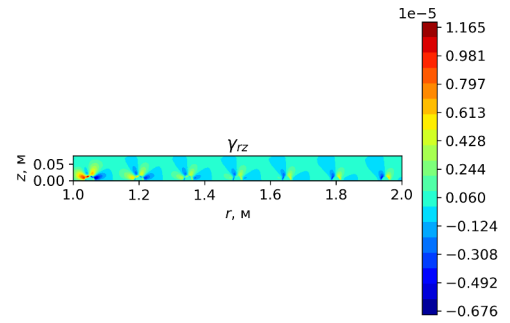
б



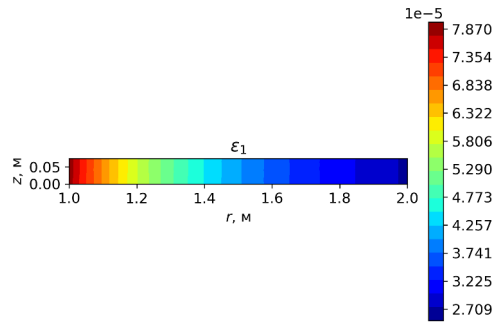
в



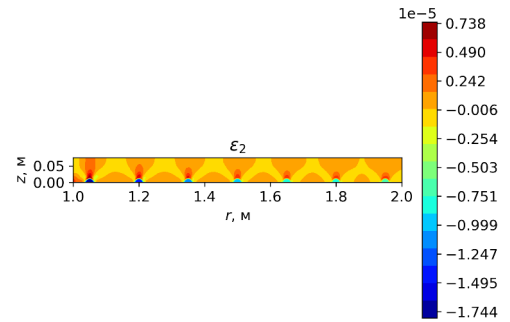
г



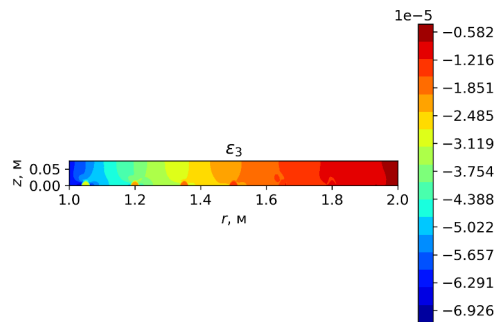
д



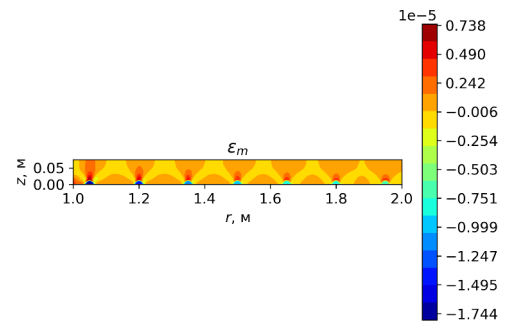
е



ж



з



и

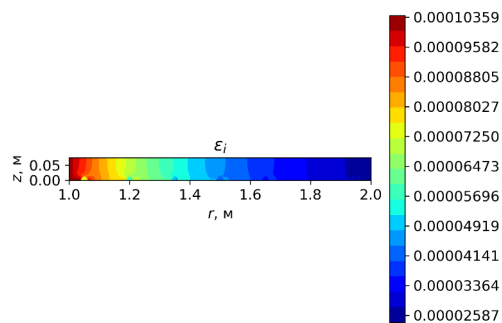
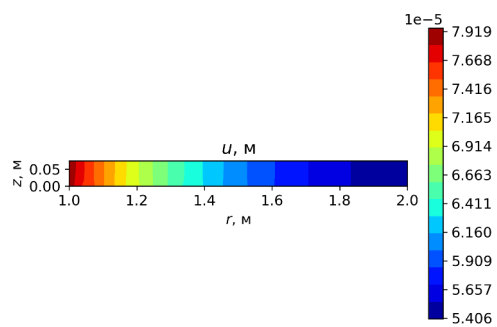
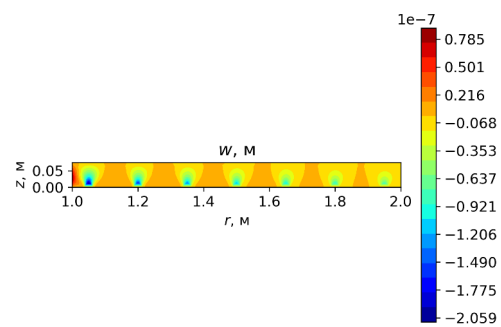


Рисунок 3.22 — Распределение относительной деформации в задаче №2.4

а



б



в

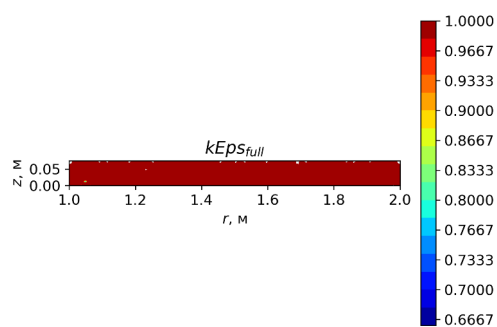
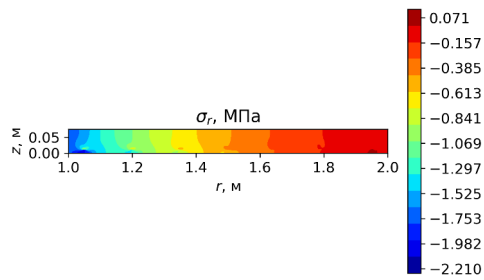
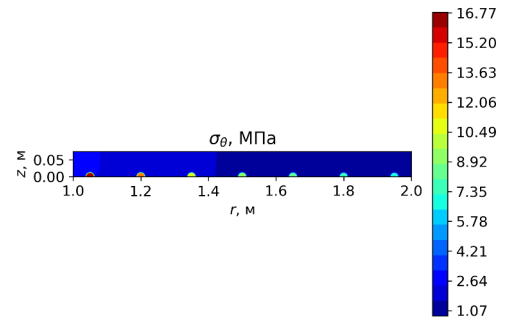


Рисунок 3.23 — Распределение перемещений в задаче №2.4

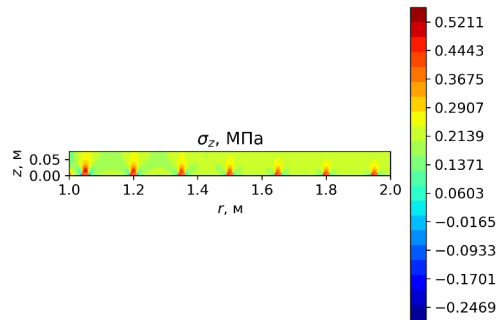
а



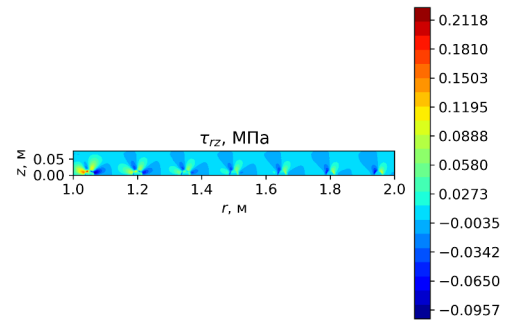
б



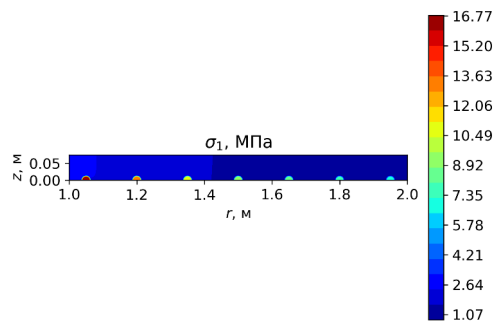
в



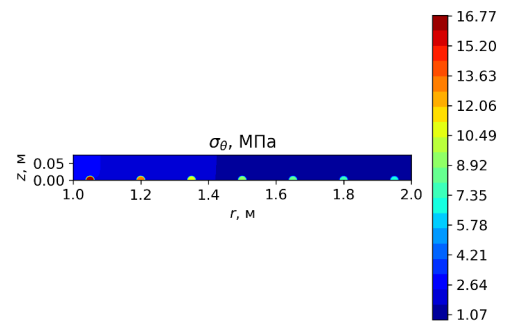
г



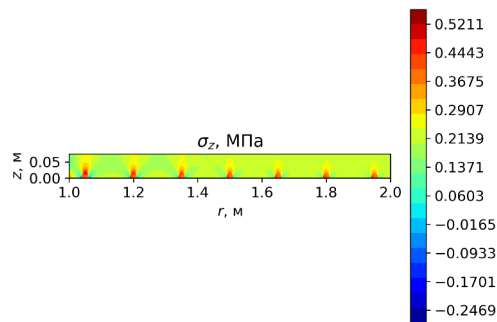
д



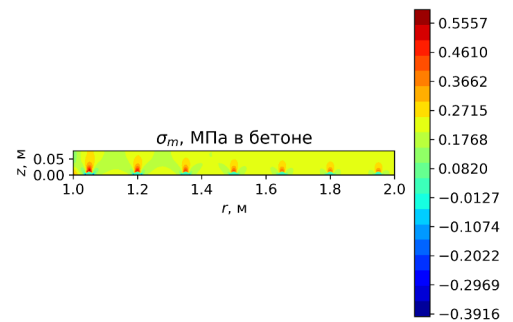
е



ж



з



и

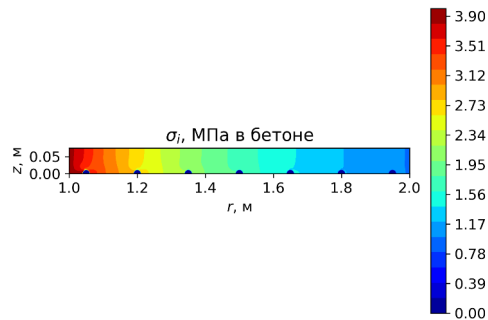
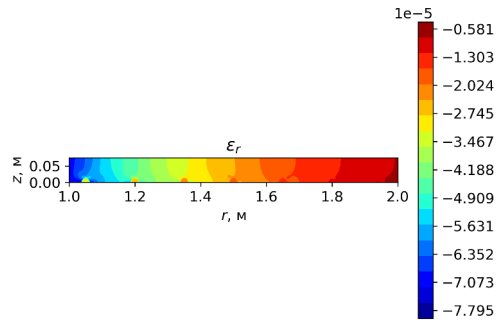
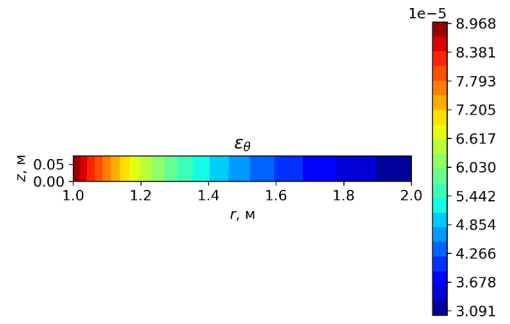


Рисунок 3.24 — Распределение напряжений в задаче №2.5

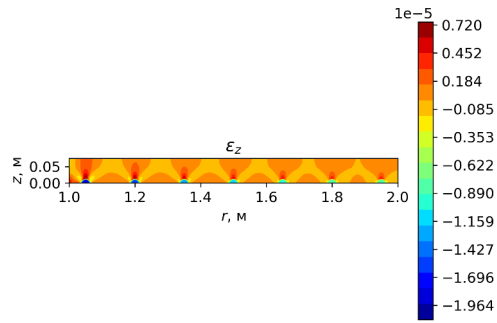
а



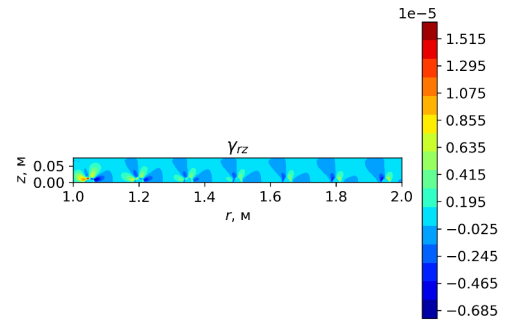
б



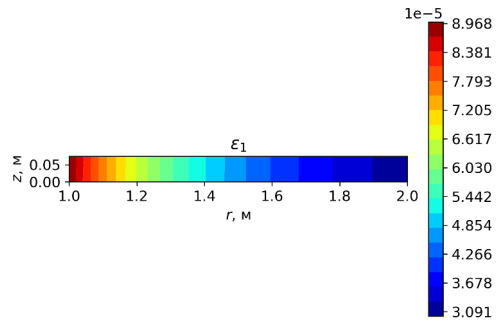
в



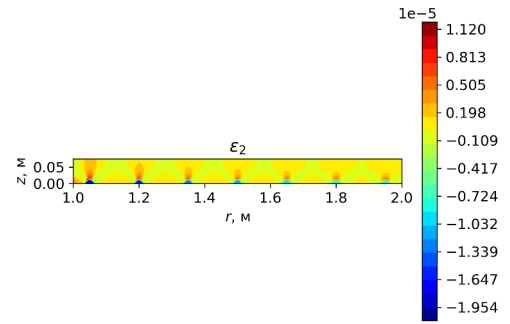
г



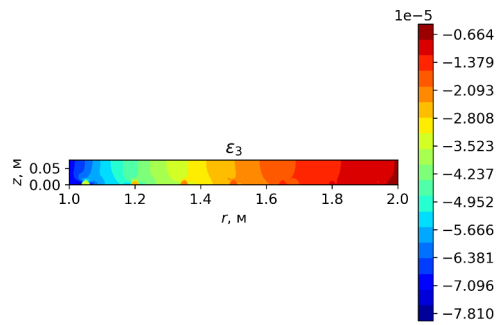
д



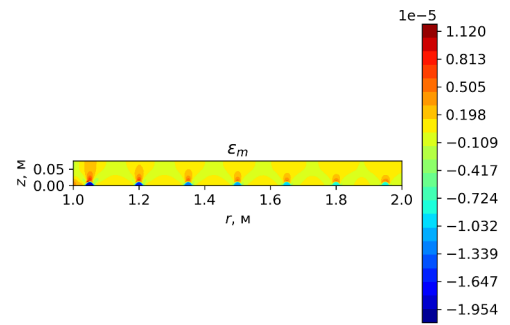
е



ж



з



и

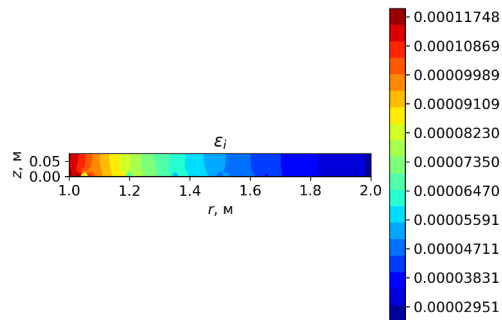


Рисунок 3.25 — Распределение относительной деформации в задаче №2.5

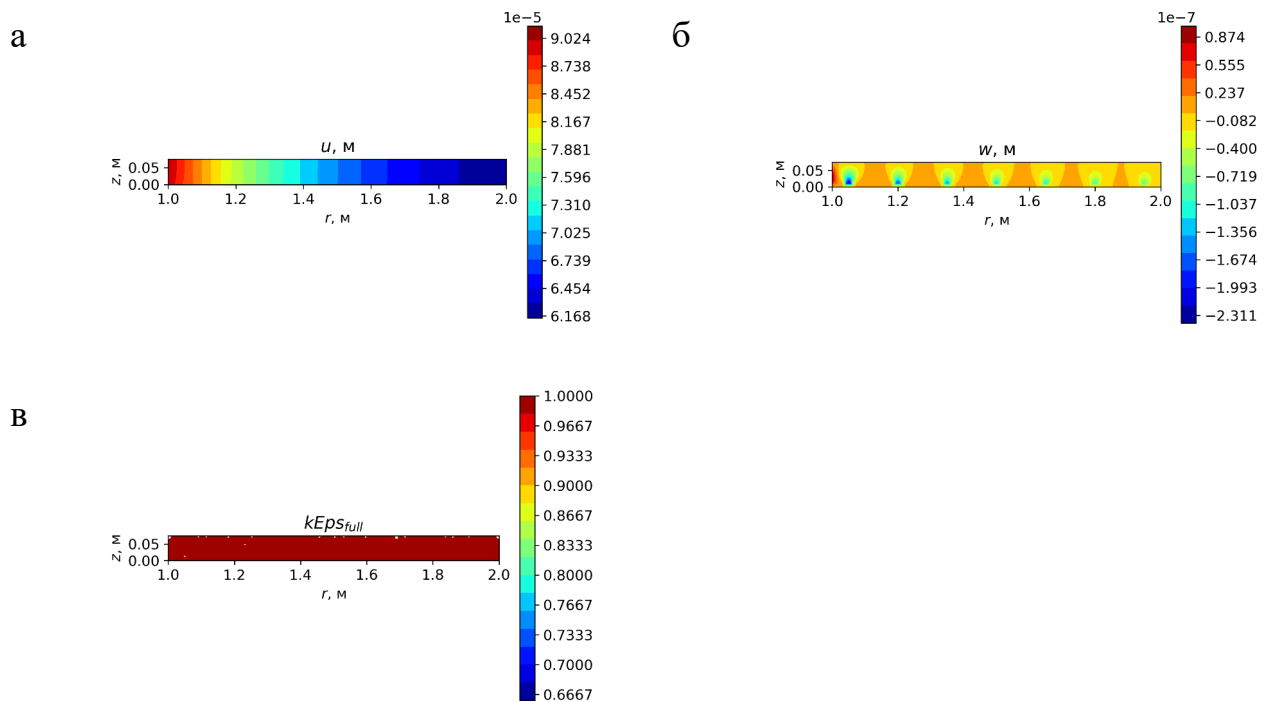


Рисунок 3.26 — Распределение перемещений в задаче №2.5

3.5. Выводы по главе 3

Проведённое моделирование показало существенное расхождение в расчётах железобетонных конструкций при однородной постановке задачи, при неоднородной, и при учёте работы конструкции согласно кривой деформирования и учёта появления растянутых зон.

При использованном соотношении внешнего и внутреннего радиусов конструкции

$$\frac{R_a - R_b}{R_b} = \frac{2R - 1R}{2R} = 0.5$$

развитие температурных деформаций во всей толще носит преобладающий характер, при котором развиваются значительные растягивающие напряжения и материал, работа которого на растяжение и сжатие существенно различается, на подобие бетона, должен разрушаться даже при значительном армировании конструкции.

Глава 4. Изменение напряжённо-деформированного состояния в железобетонном цилиндре с учётом температурного нагружения и преднапряжения арматурных стержней

В настоящей главе рассматриваются железобетонные конструкции с преднапрягаемой арматурой или внешней стальной оболочки.

Учёт преднапряжения происходит при помощи задания компоненты σ_{ps} в векторе нагрузки (1.50)

$$\sigma_{ps} = \begin{bmatrix} \sigma_{ps,r} \\ \sigma_{ps,\theta} \\ \sigma_{ps,z} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

При этом в осесимметричной задаче преднапряжение может происходить в различных направлениях, но в последующих задачах под преднапряжением понимают только одну компоненту в окружном направлении θ , т. е.

$$\sigma_{ps} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{ps,\theta} = \sigma_{ps} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Поскольку после снятия нагрузки, вызывающей преднапряжение, материал стремится сжаться, то напряжения преднапряжения имеют знак «минус».

4.1. Железобетонная оболочка с внутренней преднапряжённой арматурой.

Задача №3

Проводится моделирование толстостенной железобетонной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом $R_A = 0.4$ м и внешним $R_B = 0.5$ м.

Соотношение внешнего и внутреннего радиусов конструкции составляет

$$\frac{R_a - R_b}{R_b} = \frac{0.5 \text{ м} - 0.4 \text{ м}}{0.5 \text{ м}} = 0.2.$$

Учитывается изменение соотношения между деформациями и напряжениями для конкретного класса бетона, определяемого согласно методикам, приведён-

ным в главе 2. За основу были взяты соотношения соотношения на основе формулы Сарджина, приведённые в параграфе 2.2.1.

Конечно-элементная сетка задачи №3 представлена на рисунке 4.1. Тёмно-жёлтым цветом представлены конечные элементы, моделирующие бетон, бирюзовым — арматуру. На схеме для простоты восприятия приведена грубая сетка, при непосредственном расчёте использован более частый шаг: для бетона — сетка, максимальным размером не более $d/5$, для арматуры — не более $d/20$, где d — диаметр арматурного стержня принятый в расчёте $d=2.0$ см. Шаг между арматурными стержнями принят $h_s=15$ см, как в осевом направлении z . В силу симметрии рассматривается участок по высоте в половину шага арматуры в осевом направлении, т. е. $h_s/2=7.5$ см. Защитный слой бетона принят 2.5 см от внешней поверхности.

Процент армирования сечения по площади равен

$$\mu_s = \frac{A_s}{A_b} \cdot 100\% = \frac{\frac{\pi \cdot (2.0 \text{ см})^2}{4}}{10 \text{ см} \cdot 15 \text{ см} - \frac{\pi \cdot (2.0 \text{ см})^2}{4}} \cdot 100\% = 3.11\%. \quad (4.3)$$

Коэффициент линейного температурного расширения материала и для бетона, и для стали принят $\alpha=10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Модуль деформации арматуры принят $E_s=2.06 \cdot 10^5$ МПа постоянным и от температуры не изменяется. Коэффициент Пуассона бетона $\nu=0.2$, арматуры $\nu=0.3$.

При работе метода последовательных приближений во время корректировки коэффициентов, определяющих значения модуля упругости, задано предельное число шагов итерации 20, что вполне достаточно для обеспечения точности в коэффициенте на двух соседних шагах не более $\delta=0.0001$.

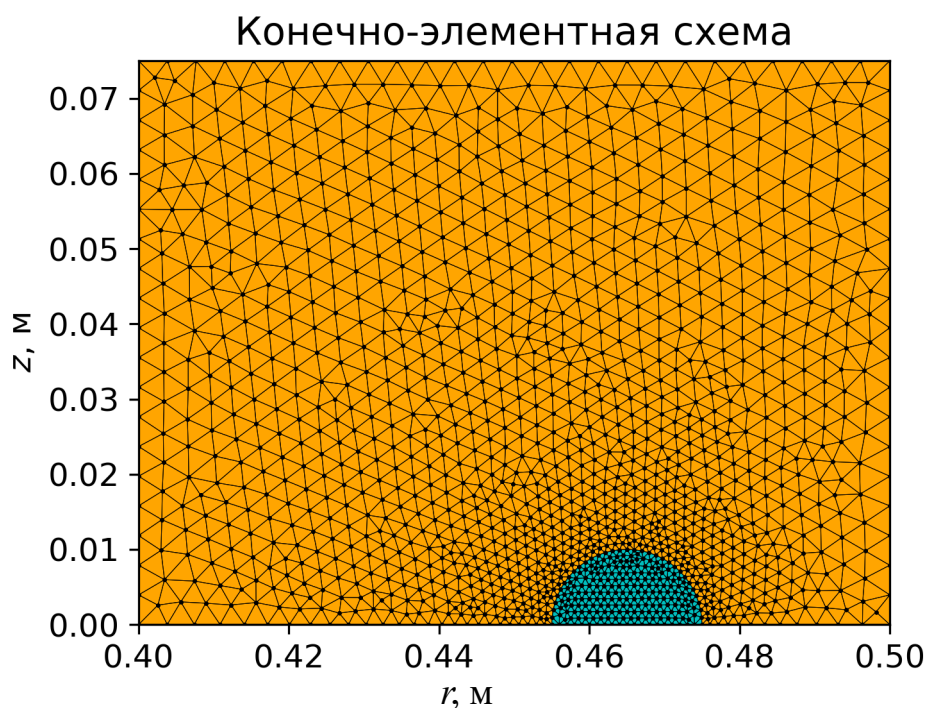


Рисунок 4.1 — Конечно-элементная сетка
задачи №3

4.1.1. Задача 3.1

Задача моделирует работу конструкции без преднапряжения $\sigma_{sp}=0$ арматурных стержней.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует. На внутреннюю поверхность действует сжимающее напряжение $P_a=0.55$ МПа.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0)=31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1})=14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0)=0.4514$;

- коэффициент Пуассона: $\nu=0.2$;
- прочность на сжатие: $R=28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t=2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.2–4.4 (страницы 107–109).

Анализ распределения осевого напряжения σ_z (рисунок 4.2,в), касательного напряжения τ_{rz} (рисунок 4.2,г), главного напряжения σ_2 (рисунок 4.2,е), среднего напряжения σ_m (рисунок 4.2,з) показывает, что значительные растягивающие напряжения возникают в области контакта бетона у верхней части арматурных стержней, при этом сам бетон, согласно коэффициенту k_ϵ (рисунок 4.4,в) по сжатию нагружен незначительной с минимальным отношением $E(\epsilon_i)/E(\epsilon \rightarrow 0)=0.986$. При этом на наклонных гранях арматуры наблюдается наибольшее перерезывающее напряжение.

Некоторое повышение сжимающего давления $P_a=0.55$ МПа приводит к развитию напряжений, превышающих предельное значение $R_t=2.264$ МПа для выбранного класса бетона.

Следовательно, можно сказать, что в данной постановке наибольшее допустимое внутреннее давление составляет $P_a=0.55$ МПа ≈ 5.5 ат, а разрушение происходит не от достижения бетоном своей предельной несущей способности, а от появления зон растяжения.

4.1.2. Задача 3.2

Задача моделирует работу конструкции с учётом преднапряжения $\sigma_{sp}=-265$ МПа арматурных стержней, но без наличия внутреннего давления $P_a=0$ и температурного перепад $\Delta T=0$.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — со-

гласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.5–4.7 (страницы 110–112).

Анализ распределения осевого напряжения σ_r (рисунок 4.5,а), показал интенсивное обжатие бетона на границе стыка бетона и арматуры, обращённой к внутренней поверхности цилиндра, на уровне $\sigma_r = -3.640$ МПа, и растяжение бетона на границе стыка бетона и арматуры, обращённой к внешней поверхности цилиндра, на уровне $\sigma_r = 1.889$ МПа. Среднее напряжение при этом показывает преимущественное сжатое состояние по всему телу (рисунок 4.5,з). Касательные напряжения достигают своего максимума у верхней точке контакта арматуры и бетона и достигают значения $\tau_{rz} = 2.298$ МПа. Сам бетон, согласно коэффициенту k_ε (рисунок 4.7,в), по сжатию нагружен с минимальным отношением $E(\varepsilon_i)/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.906$. Согласно окружным напряжения σ_θ (рисунок 4.5,б) напряжение в арматуре упало с уровня при преднапряжения $\sigma_{sp} = -265$ МПа до $\sigma_\theta = -233.1$ МПа благодаря обжатию бетона и развитию некоторых деформаций.

В данной постановке наибольшее допустимое преднапряжение составляет $[\sigma_{sp}] = -265$ МПа, превышение которого приводит к потере конструкцией своей несущей способности, о чём будет сказано в следующей задаче.

4.1.3. Задача 3.3

Задача моделирует работу конструкции в момент начала разрушения при превышении уровня преднапряжения $\sigma_{sp} = -270 \text{ МПа} < [\sigma_{sp}] = -265 \text{ МПа}$ арматурных стержней, но без наличия внутреннего давления $P_a = 0$ и температурного перепад $\Delta T = 0$.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0 \text{ МПа}$;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2 \text{ МПа}$;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80 \text{ МПа}$;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264 \text{ МПа}$.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.8–4.10 (страницы 113–115).

Коэффициент k_ε (рисунок 4.10,в) показывает, что зона разрушения находится на границе стыка бетона и арматуры, обращённой к внешней поверхности цилиндра, в точке, где радиальное напряжение превышает предел прочности бетона на растяжение $\sigma_r = 2.549 \text{ МПа} > R_t = 2.264 \text{ МПа}$, при этом наибольшие касательные напряжения $\tau_{rz} = 2.504 \text{ МПа}$ достигают своего максимума у верхней точке контакта арматуры и бетона, однако, среднее напряжение здесь показывают сжатие. О разрушении бетона в этой области говорит и радиальная компонента деформации ε_r (рисунок 4.9,а).

4.1.4. Задача 3.4

Задача моделирует работу конструкции с учётом преднапряжения $\sigma_{sp} = -250$ МПа арматурных стержней, но без температурного перепада $\Delta T = 0$; производится поиск наибольшего значения внутреннего давления, при котором конструкция сохраняет свою эксплуатационную способность.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.11–4.13 (страницы 116–118).

Установлено, что предельное внутреннее усилие, при котором сохраняется эксплуатационная способность конструкции, составляет $P_a = 1.1$ МПа. Картина распределения напряжений и деформаций существенно не изменяется по сравнению с задачами №3.1–3.3.

Таким образом, использование преднапряжения $\sigma_{sp} = -250$ МПа по сравнению с задачей без преднапряжения арматуры $\sigma_{sp} = 0$, приводит к повышению несущей способности с $P_a = 0.55$ МПа до $P_a = 1.1$ МПа. При этом разрушение материала происходит из-за появления зон с растянутым бетоном.

4.1.5. Задача 3.5

Задача моделирует работу конструкции без преднапряжения $\sigma_{sp}=0$ арматурных стержней, но при наличии температурного нагружения $T_a=50^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности до $T_b=0^\circ\text{C}$ на внешней; давление на внутреннюю и внешнюю поверхности отсутствует.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4.

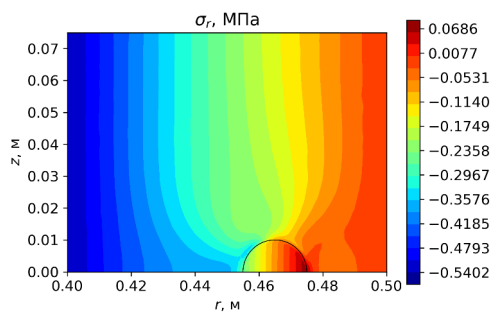
Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0)=31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1})=14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0)=0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu=0.2$;
- прочность на сжатие: $R=28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t=2.264$ МПа.

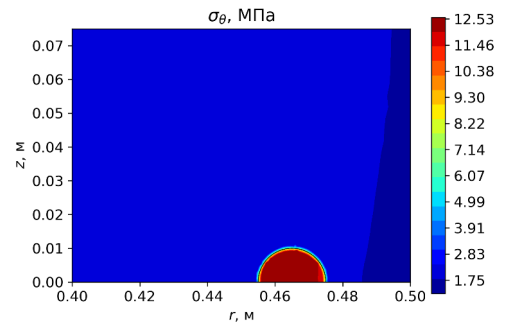
Результаты расчёта приведены на рисунках 4.14–4.16 (страницы 119–121).

Как и ранее, в граве 3.4, температурные деформации вызывают значительный рост напряжений, даже при снижении толщины бетонной части с 1.0 м до 0.1 м. При этом арматурные стержни препятствуют свободному росту деформаций, в результате на внутренней поверхности цилиндра возникают значительные сжимающие напряжения, вблизи внешней поверхности — растягивающие. Кроме того, бетон над арматурным стержнем стремится сместиться в сторону внешней поверхности, что так же вызывает появление растянутых зон. Рисунок 4.16,в отчётливо показывает области, где будет происходить разрушение бетона.

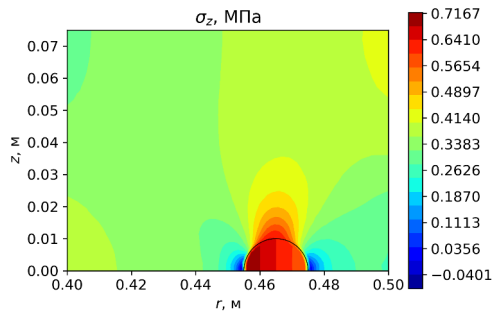
а



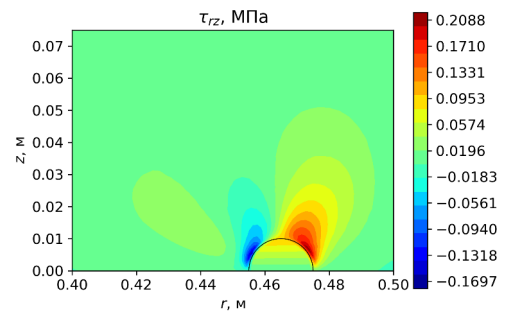
б



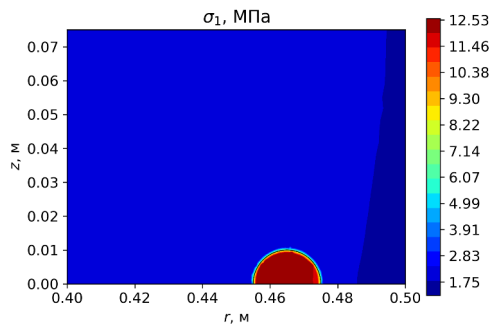
в



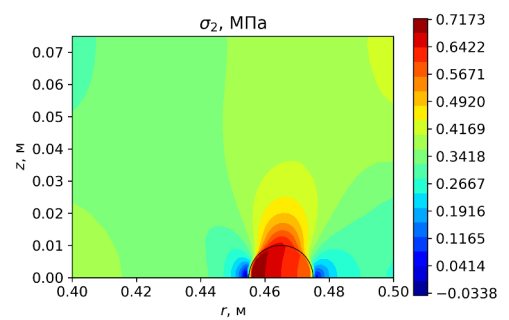
г



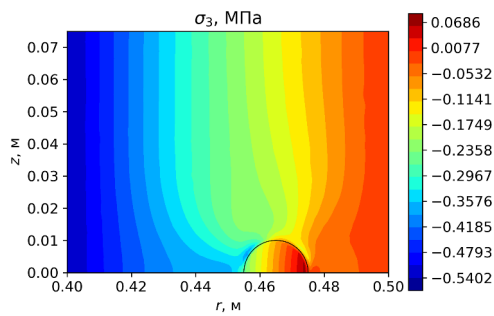
д



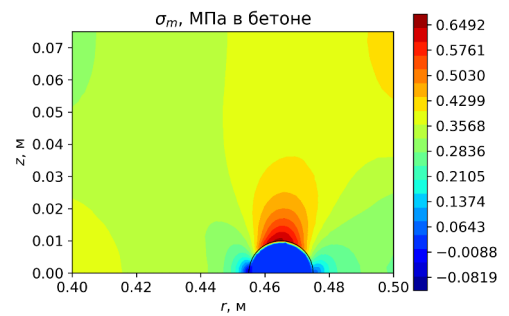
е



ж



з



и

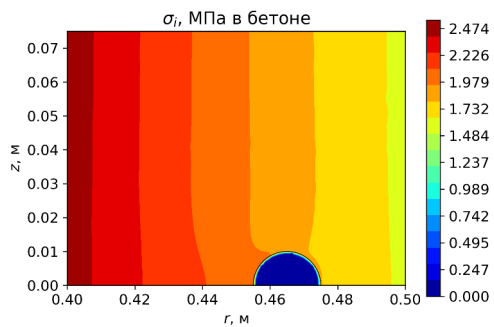


Рисунок 4.2 — Распределение напряжений в задаче №3.1

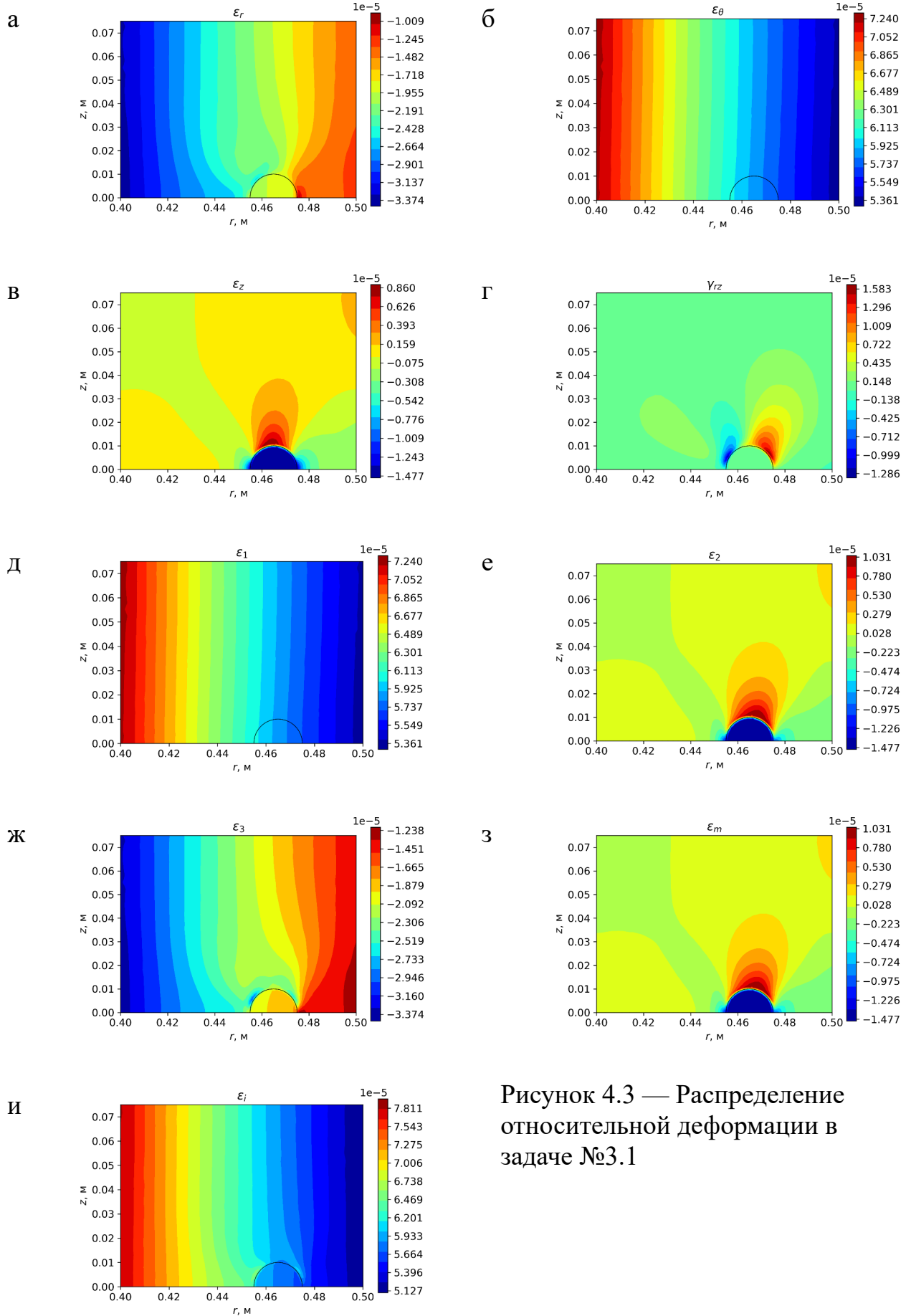


Рисунок 4.3 — Распределение относительной деформации в задаче №3.1

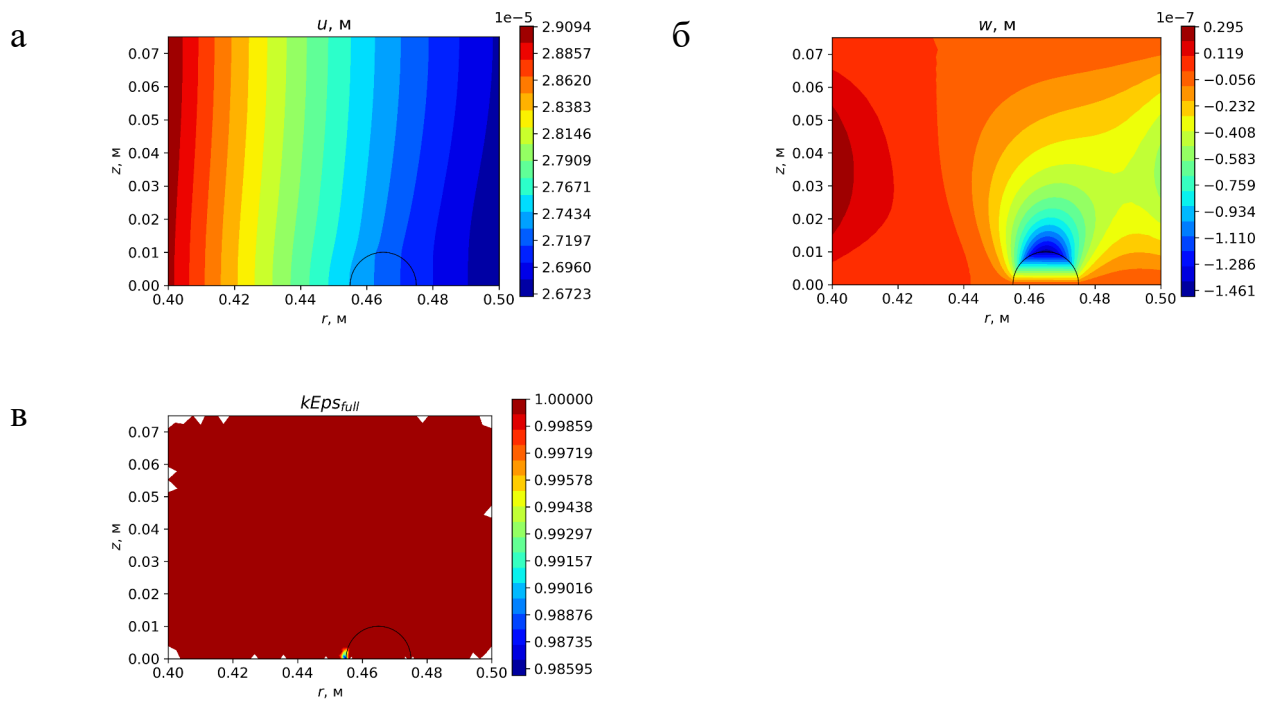
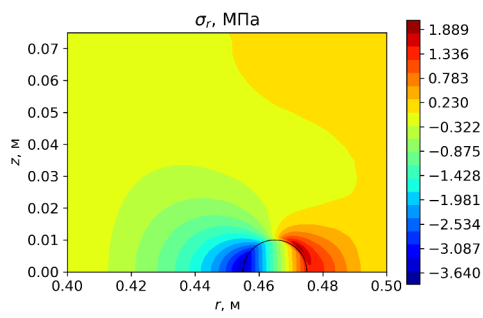
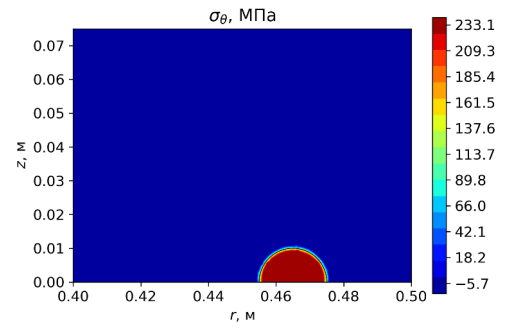


Рисунок 4.4 — Распределение перемещений в задаче №3.1

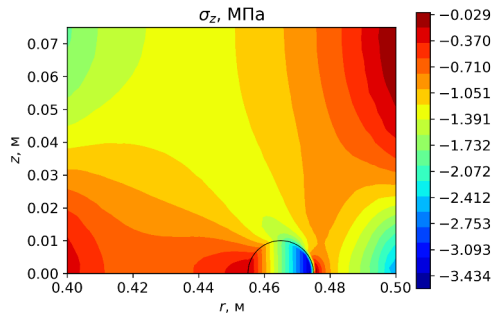
а



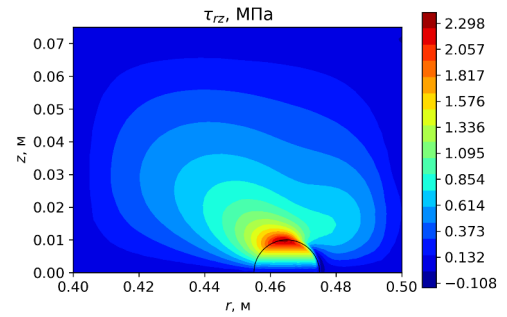
б



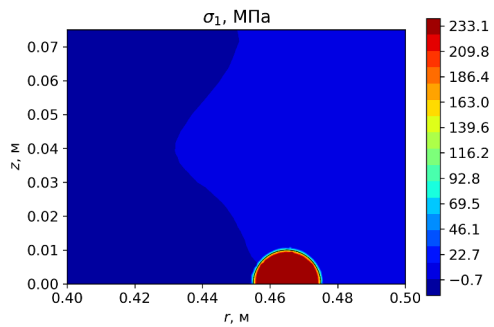
в



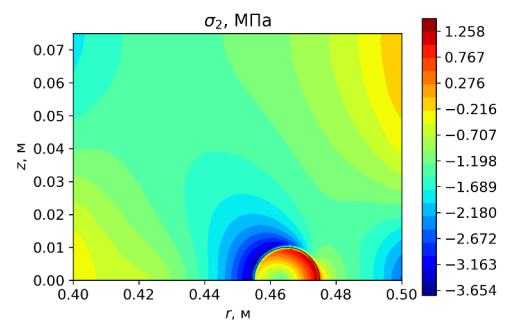
г



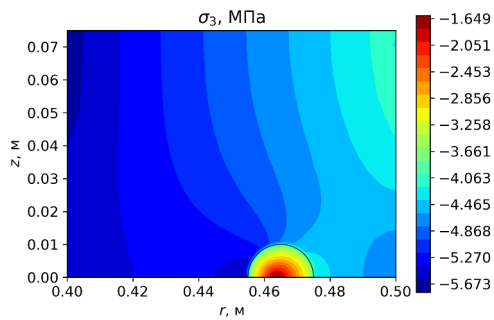
д



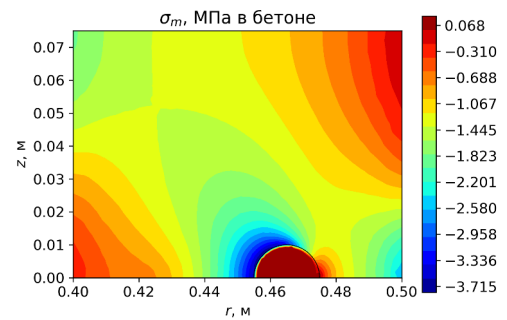
е



ж



з



и

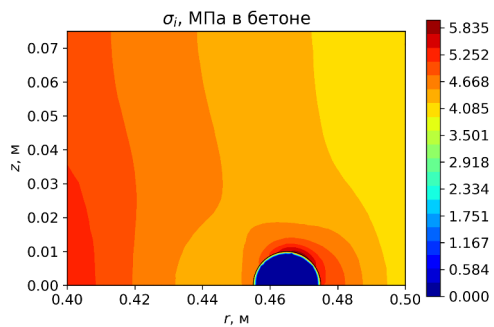
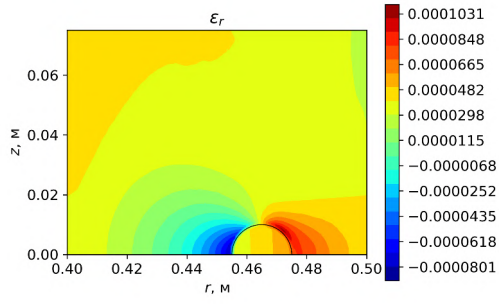
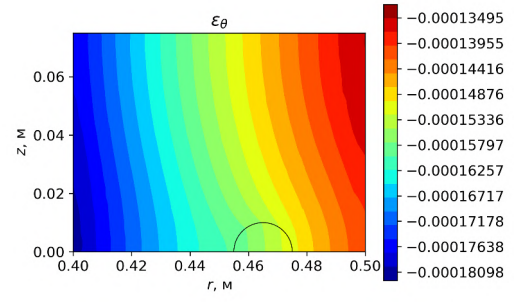


Рисунок 4.5 — Распределение напряжений в задаче №3.2

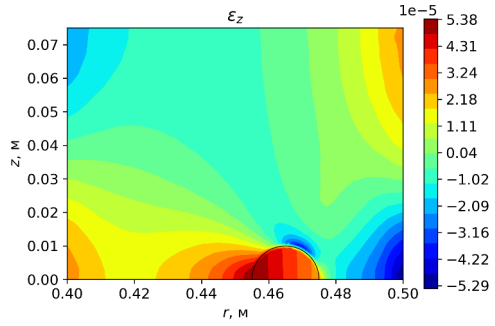
а



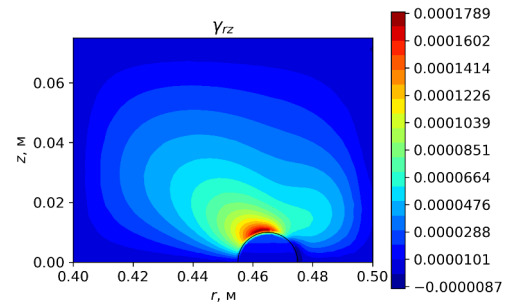
б



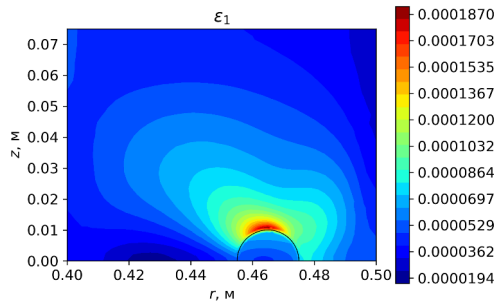
в



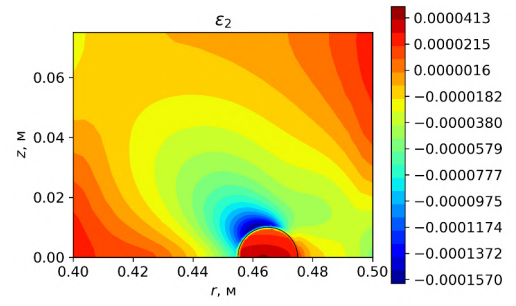
г



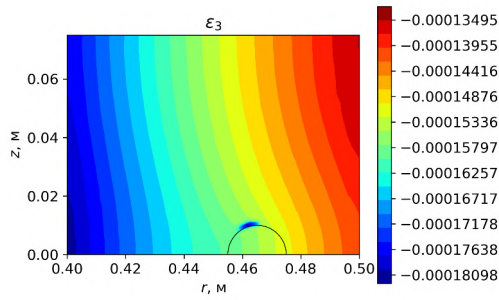
д



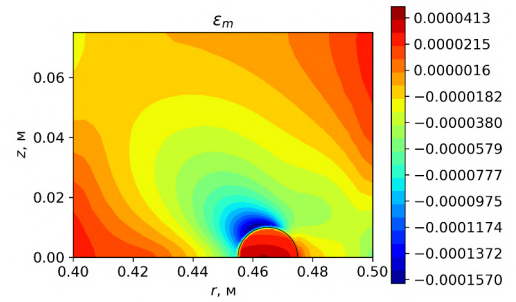
е



ж



з



и

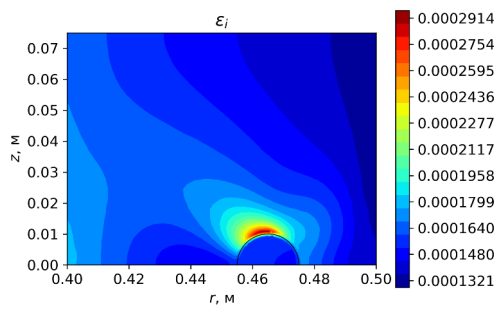


Рисунок 4.6 — Распределение относительной деформации в задаче №3.2

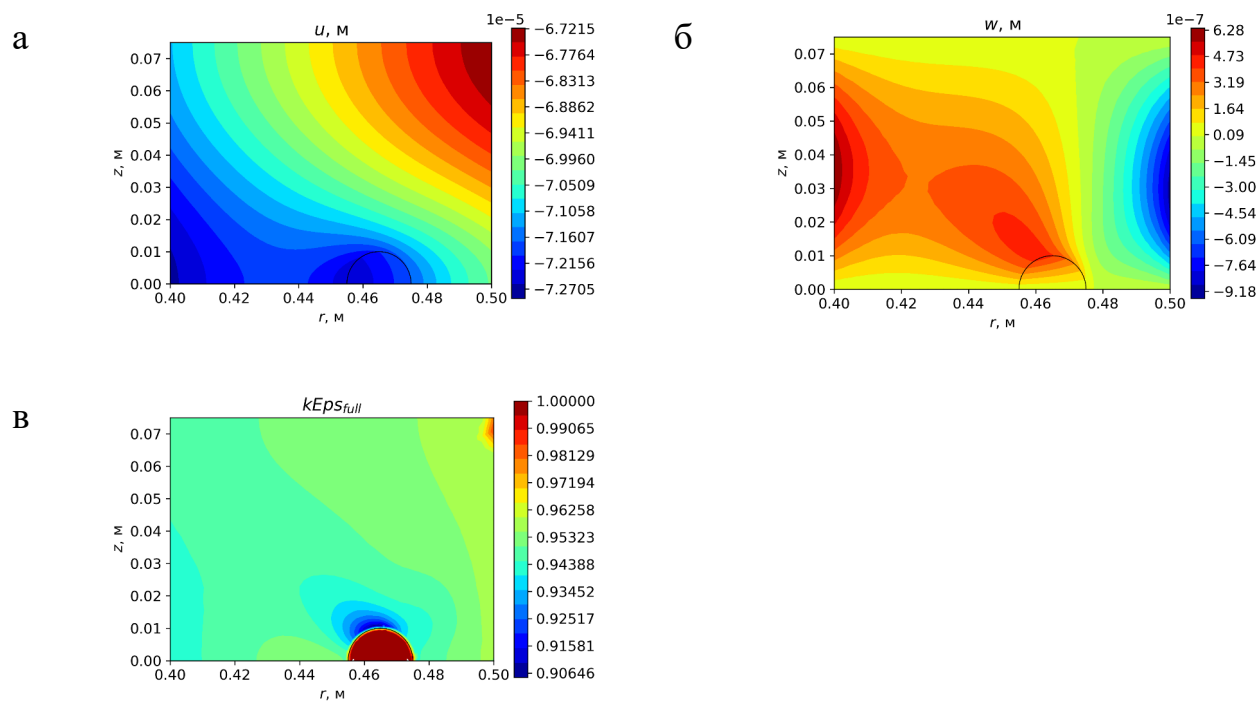
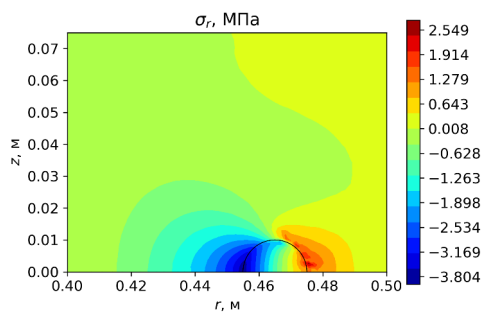
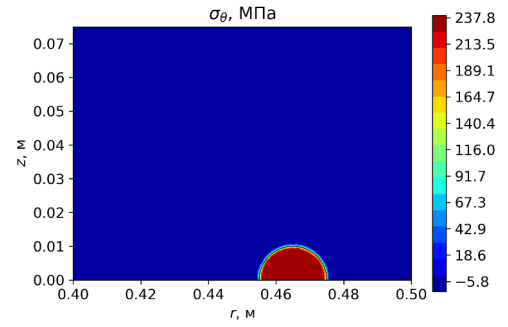


Рисунок 4.7 — Распределение перемещений в задаче №3.2

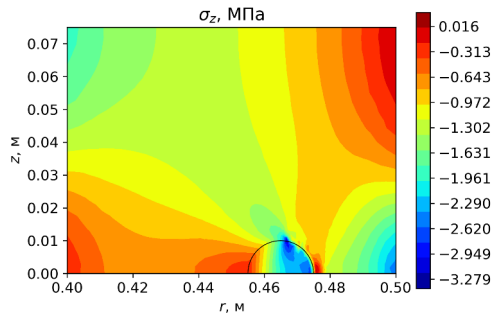
а



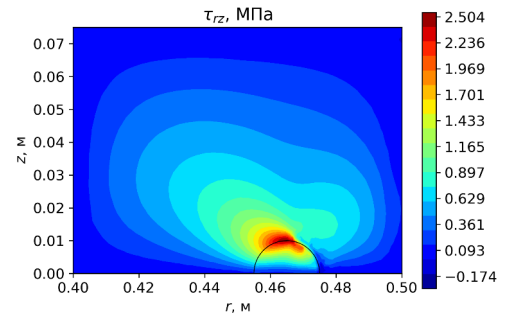
б



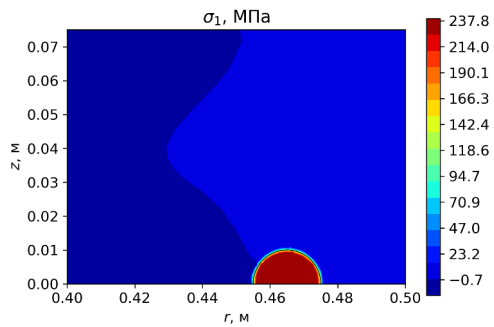
в



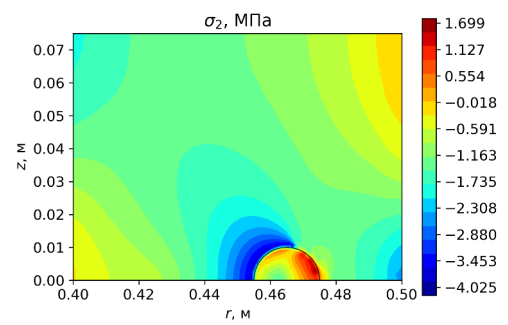
г



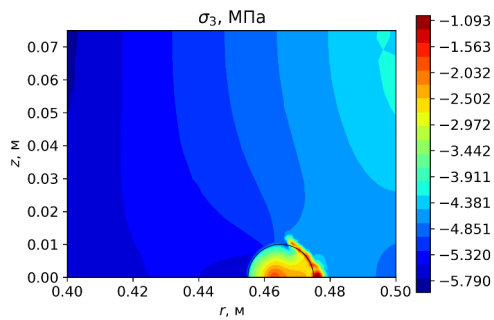
д



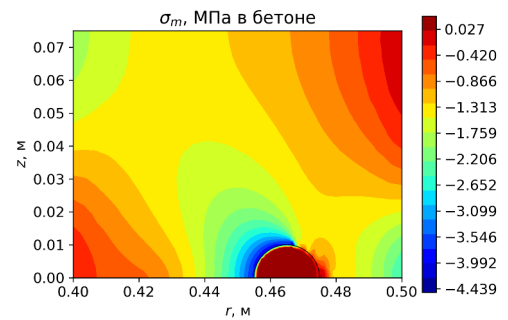
е



ж



з



и

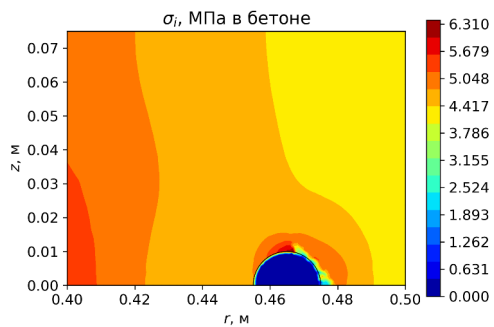


Рисунок 4.8 — Распределение напряжений в задаче №3.3

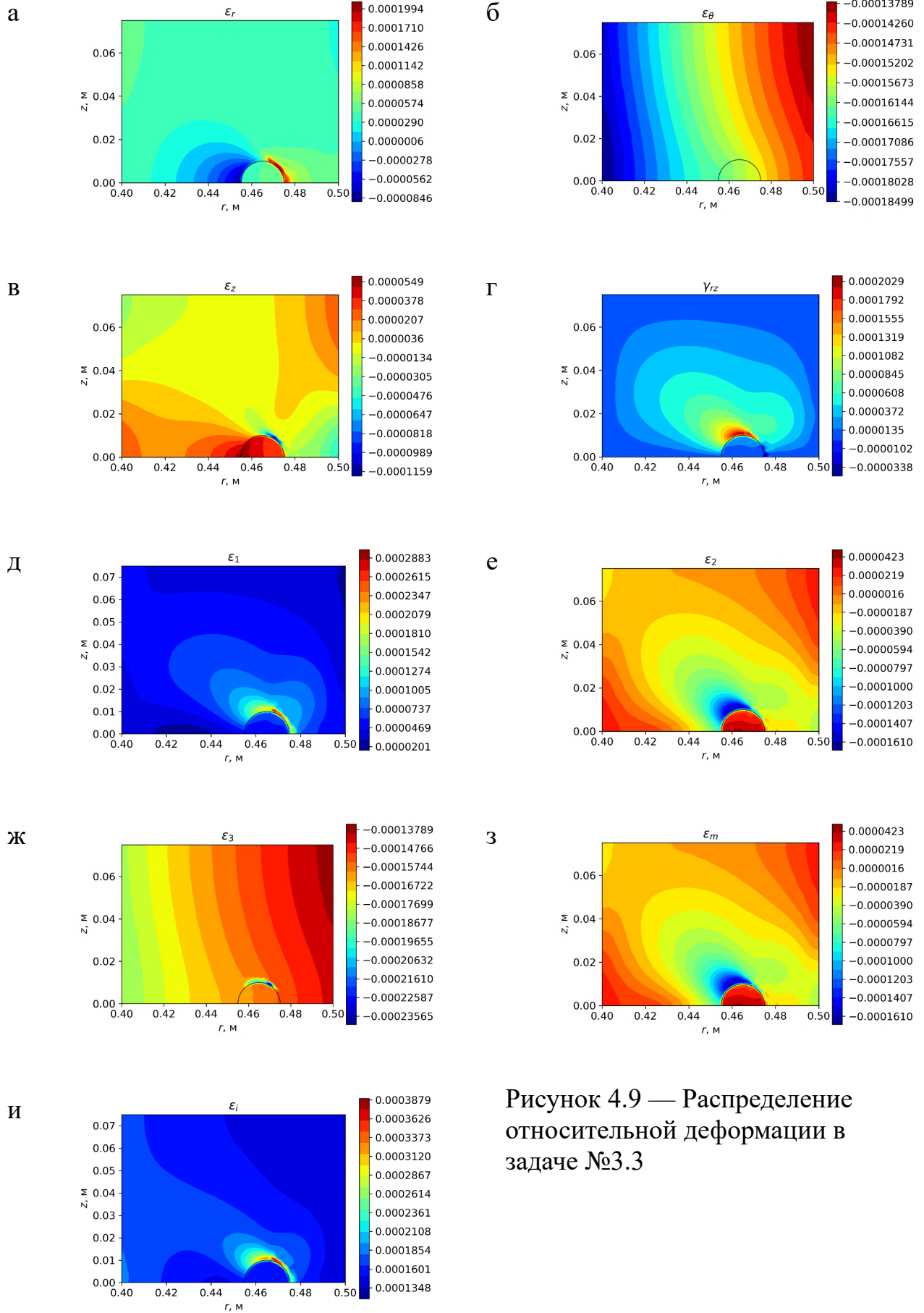


Рисунок 4.9 — Распределение относительной деформации в задаче №3.3

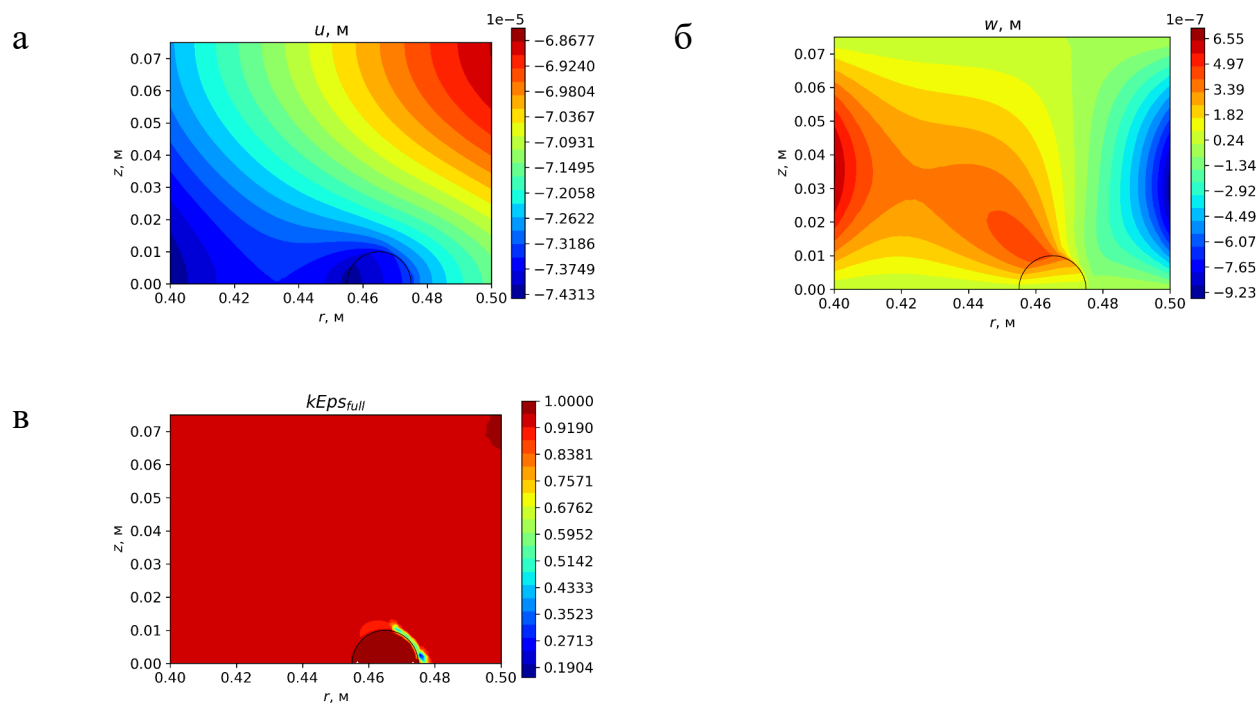
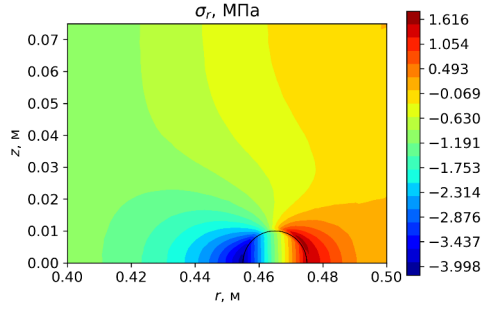
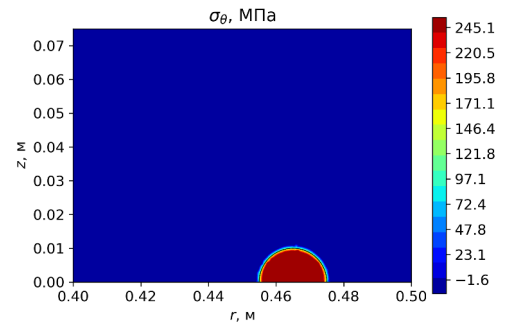


Рисунок 4.10 — Распределение перемещений в задаче №3.3

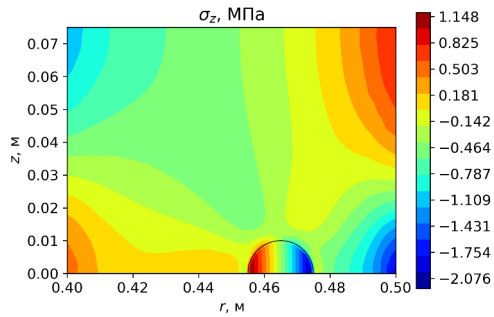
а



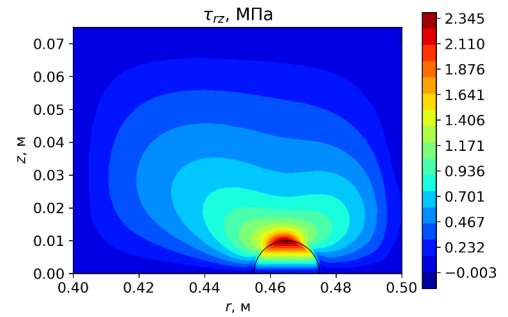
б



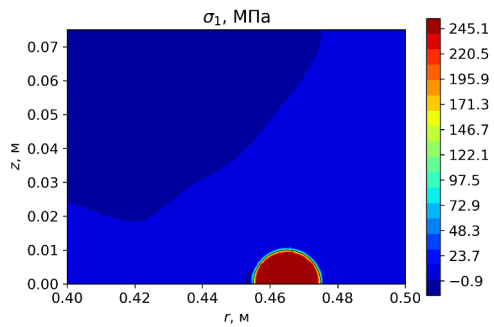
в



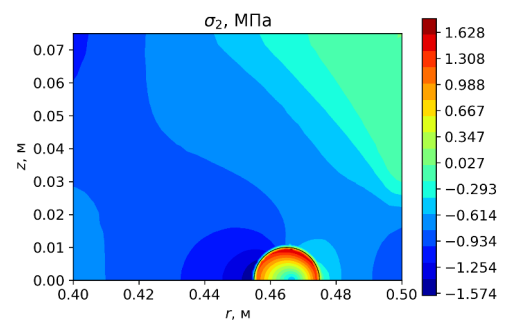
г



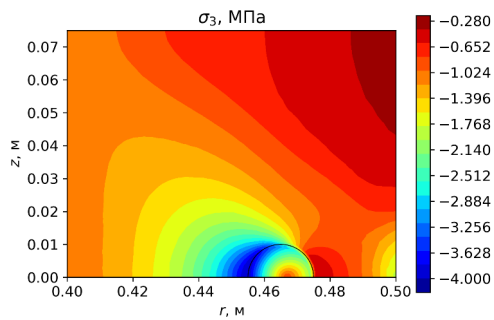
д



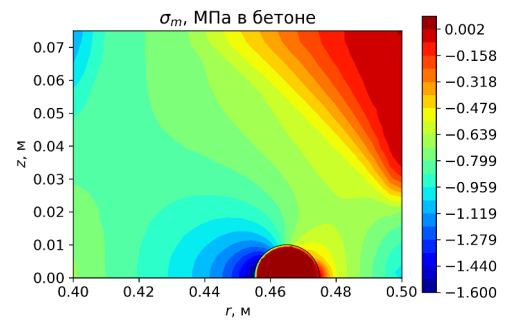
е



ж



з



и

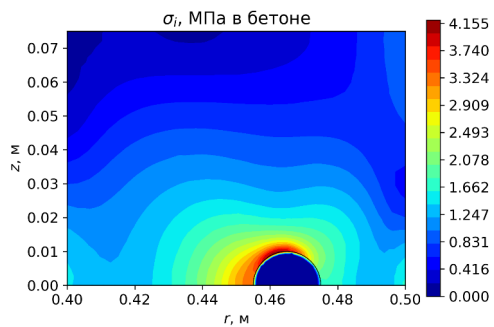
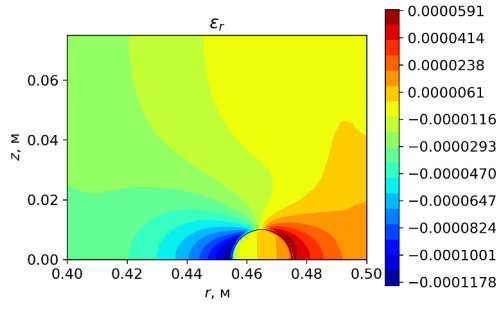
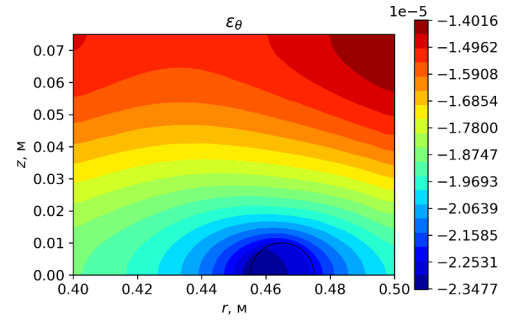


Рисунок 4.11 — Распределение напряжений в задаче №3.4

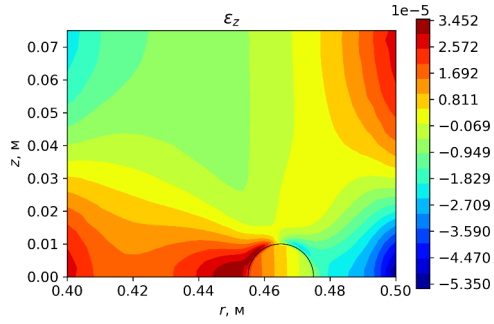
а



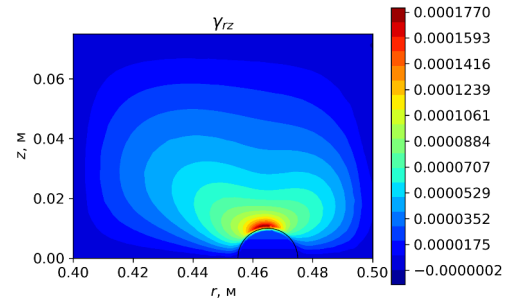
б



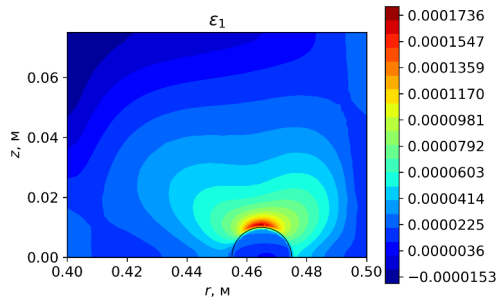
в



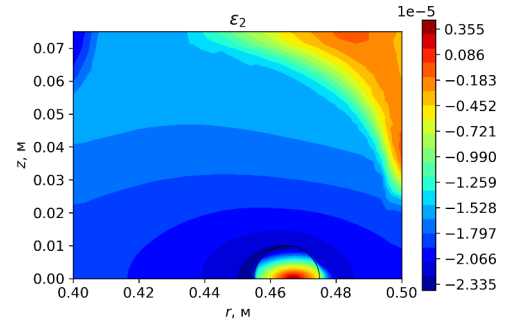
г



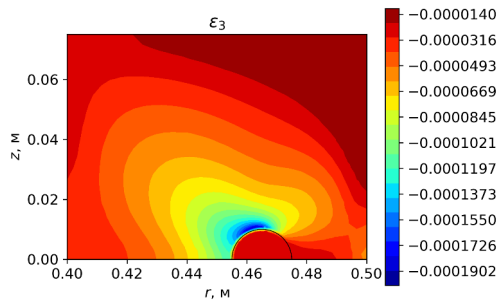
д



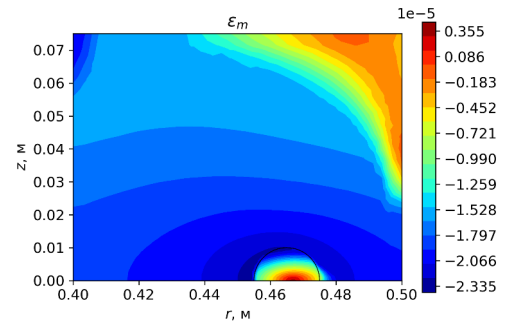
е



ж



з



и

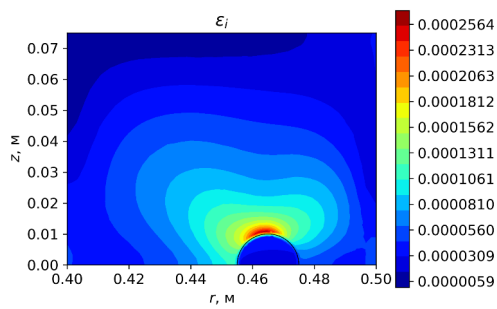


Рисунок 4.12 — Распределение относительной деформации в задаче №3.4

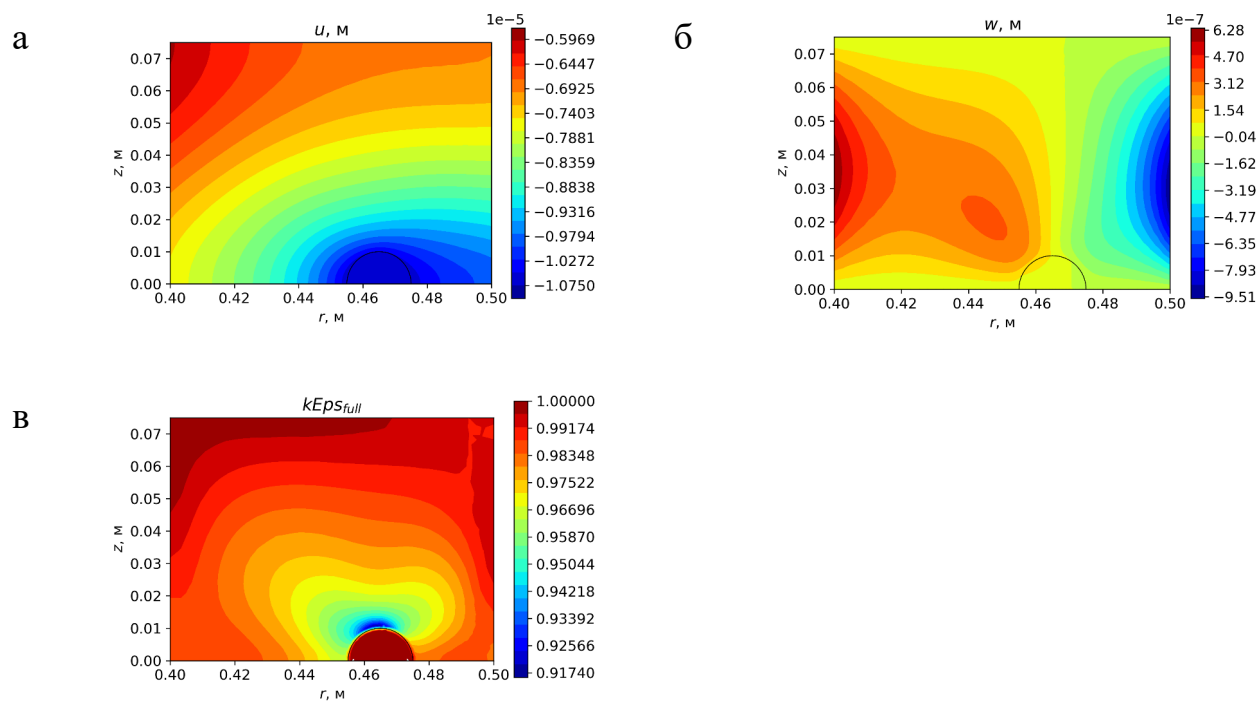
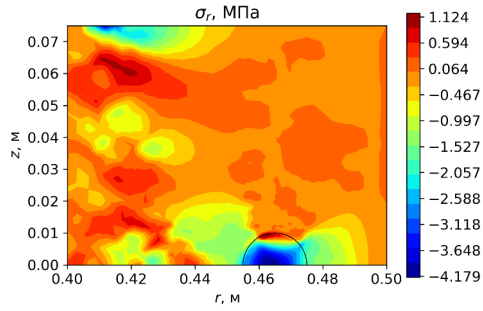
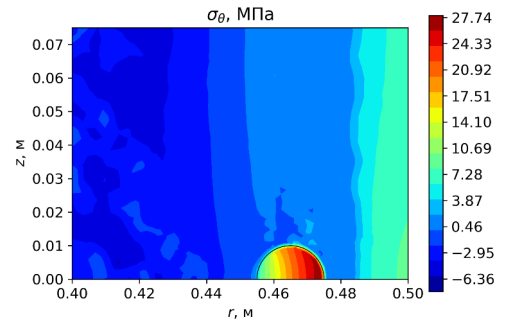


Рисунок 4.13 — Распределение перемещений в задаче №3.4

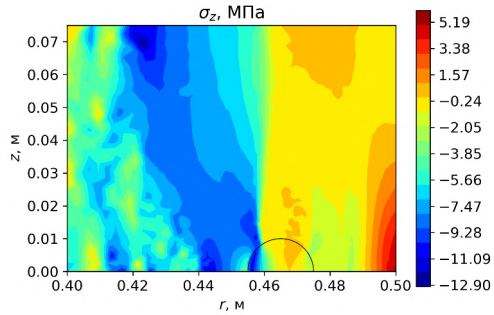
а



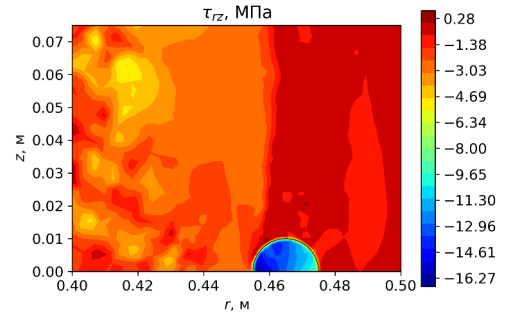
б



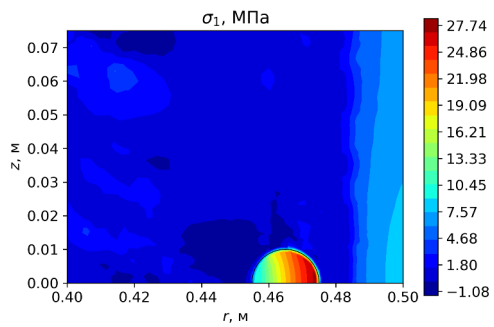
в



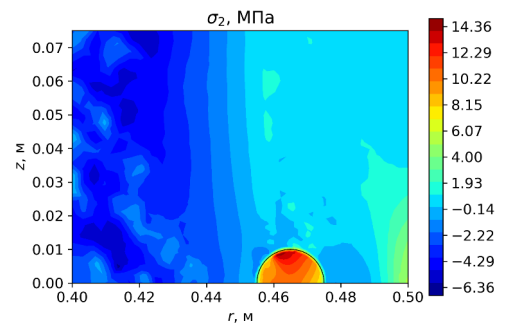
г



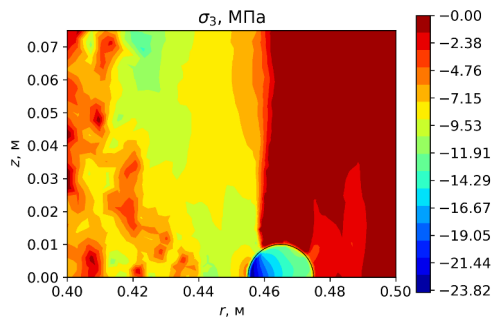
д



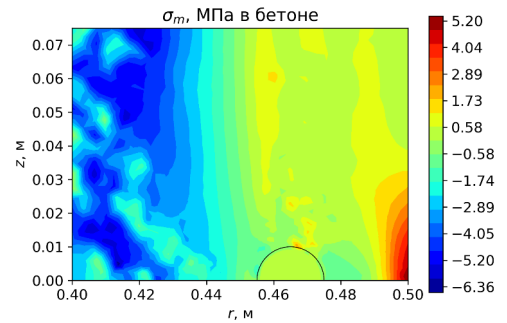
е



ж



з



и

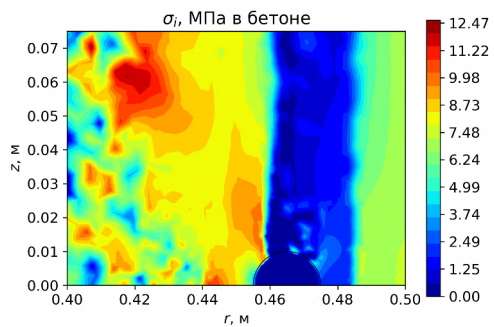
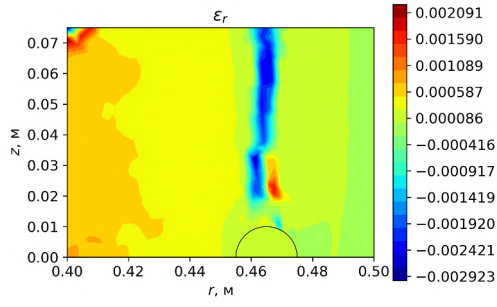
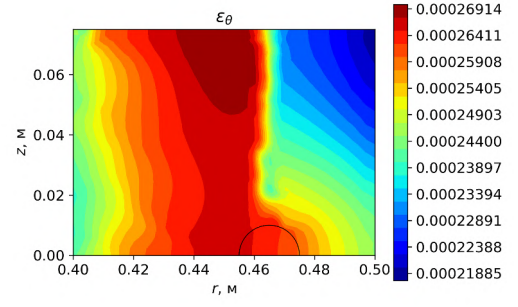


Рисунок 4.14 — Распределение напряжений в задаче №3.5

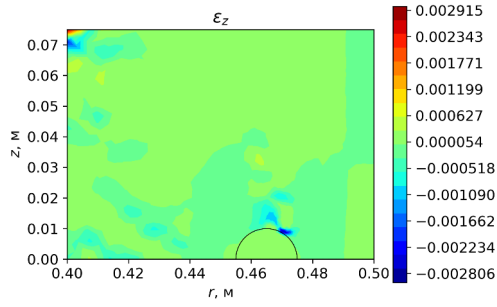
а



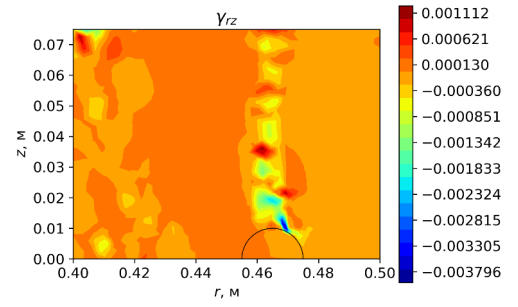
б



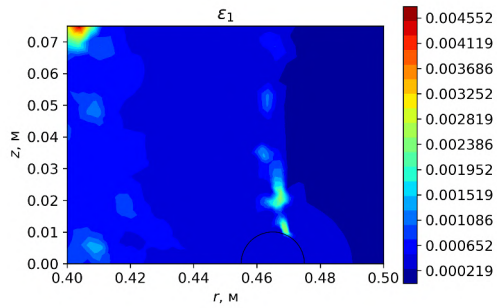
в



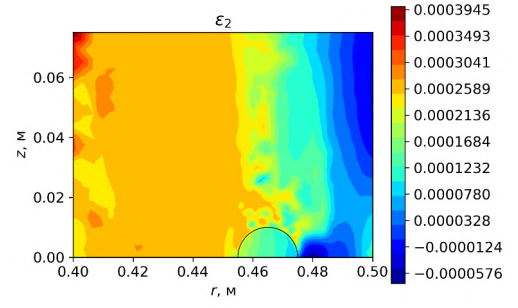
г



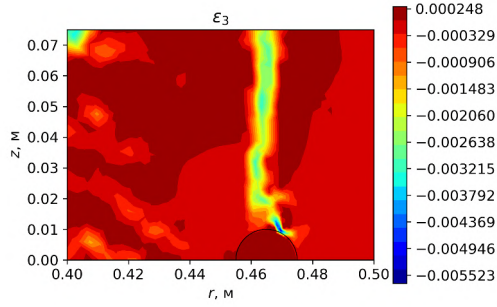
д



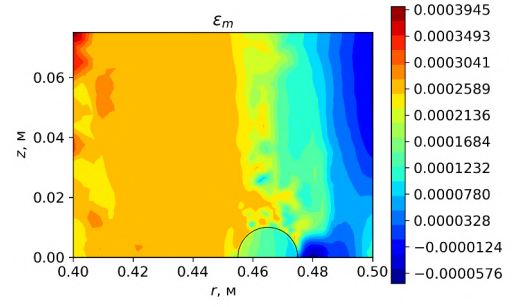
е



ж



з



и

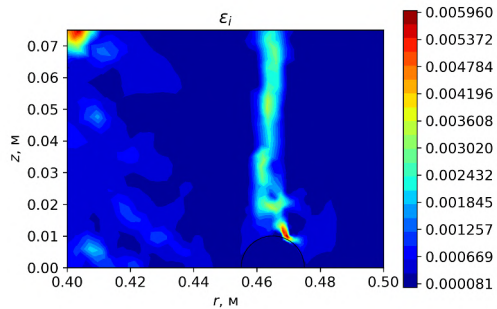


Рисунок 4.15 — Распределение относительной деформации в задаче №3.5

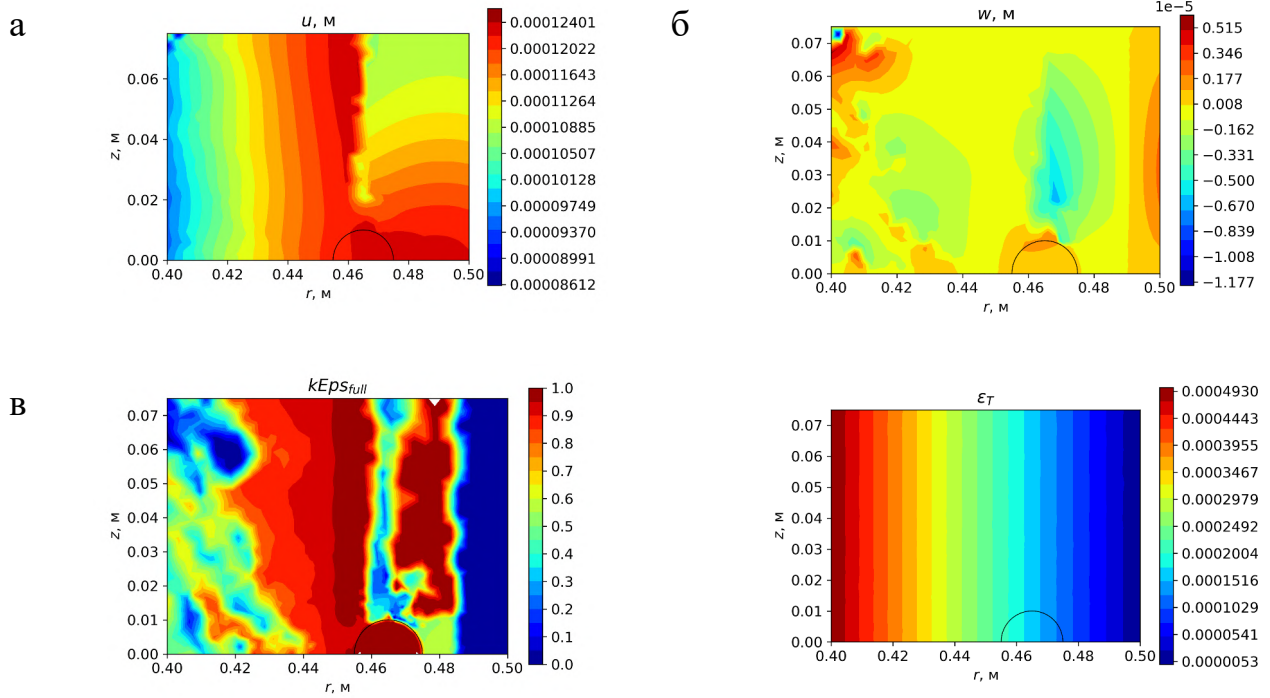


Рисунок 4.16 — Распределение перемещений в задаче №3.5

4.2. Железобетонная оболочка с внешней стальной преднапряжённой арматурой. Сравнение с существующими решениями. Задача №4

В работе [40] приводится решение прямой задачи для предварительно напряжённого железобетонного цилиндра с внешним армированием, представляющим собой обмотку арматурой по внешней поверхности (рисунок 4.17). Постановка задачи: внутренний радиус $R_A=1.0$ м, внешний $R_B=2$ м, давление на внутреннюю поверхность цилиндра $P_a=10$ МПа, модуль упругости бетона $E_b=2.16 \cdot 10^4$ МПа, модуль упругости арматуры $E_s=2.0 \cdot 10^5$ МПа, уровень преднапряжения $\sigma_{sp}=500$ МПа. Диаметр арматуры напрямую указан не был, но принимался процент армирования $\mu_s=0.01$. Пусть шаг между стержнями арматуры $h_s=20.0$ см, тогда для обеспечения принятого процента армирования требуется диаметр арматурного стержня

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot h_s \cdot b}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \text{ см} \cdot 100 \text{ см}}{\pi}} = 5.046 \text{ см} \approx 5 \text{ см}. \quad (4.4)$$

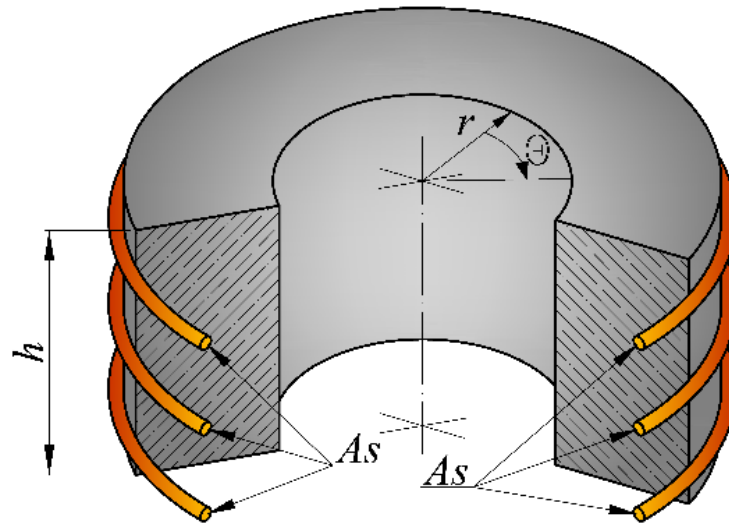


Рисунок 4.17 — К армированию бетонного цилиндра в работе [40]

В реальности стальная арматура будет вдавливаться в бетон и для полноценного моделирования необходимо контролировать взаимное перемещение узлов, поскольку в месте контакта арматуры и бетона будет возникать бесконечно большое напряжение и возможно пересечение несвязанных между собой конечно-элементных сеток, принадлежащих бетону и арматуре, было принято решение упростить модель, заменив арматуру на прямоугольный хомут высотой 5 см и шириной 4 см (в силу симметрии половина конечно-элементной схемы представлена на рисунке 4.18).

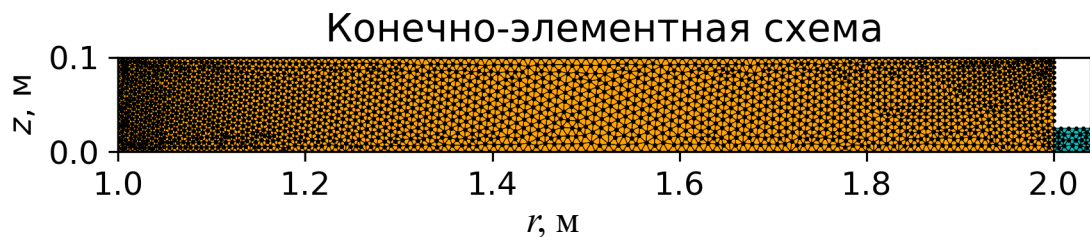


Рисунок 4.18 — Конечно-элементная сетка задачи №4

Тогда процент армирования по площади составляет

$$\mu_s = \frac{A_s}{A_b} = \frac{5 \text{ см} \cdot 4 \text{ см}}{100 \text{ см} \cdot 20 \text{ см}} = 0.01, \quad (4.5)$$

что по проценту армирования полностью соответствует задаче, рассматриваемой в работе [40].

На внутреннюю поверхность так же прикладывается давление $P_a = 10$ МПа, хомут имеет преднапряжение $\sigma_{sp} = -500$ МПа.

Задача моделирует работу конструкции с учётом преднапряжения $\sigma_{sp} = 500$ МПа арматурных стержней, но без температурного перепада $\Delta T = 0$; производится поиск наибольшего значения внутреннего давления, при котором конструкция сохраняет свою эксплуатационную способность.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; возможное разрушение бетона не моделируется.

Параметры бетона:

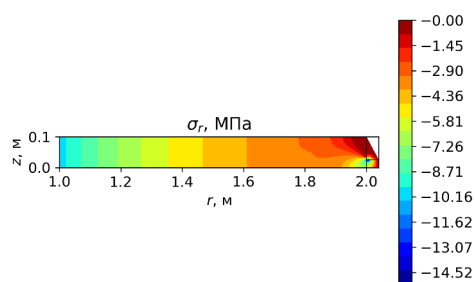
- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа; на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.19–4.21 (страницы 124–126).

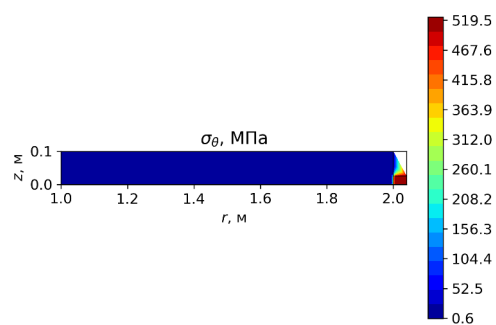
В работе [40] утверждается, что при заданном армировании в бетоне не возникает растягивающих окружных напряжений, однако реальная эпюра окружных напряжений на рисунке 4.19,б показывает, что практически всё сечение оказывается растянутым ($\min(\sigma_{b,\theta}) = 0.326$ МПа; $\max(\sigma_{b,\theta}) = 8.667$ МПа). Анализ использования бетона по несущей способности показал, что коэффициент k_ε меняется до уровня 0.803.

Таким образом, при расчёте материала необходимо проводить непосредственное моделирование; численно-аналитическое решение, использованное в работе [40], даёт сильно искажённую картину.

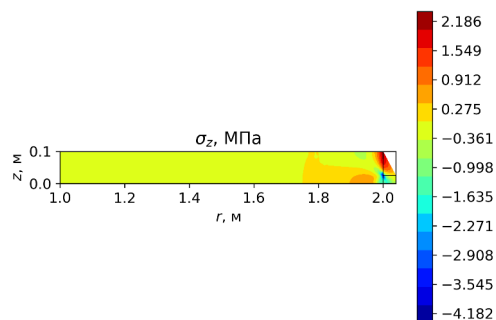
а



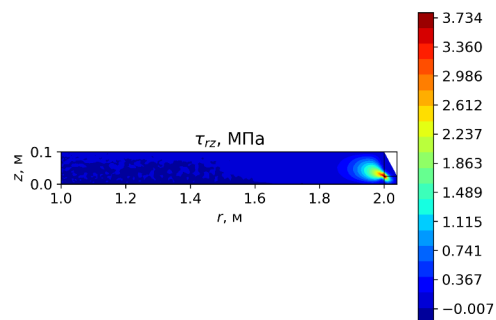
б



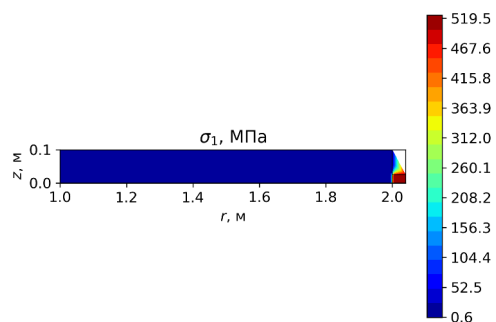
в



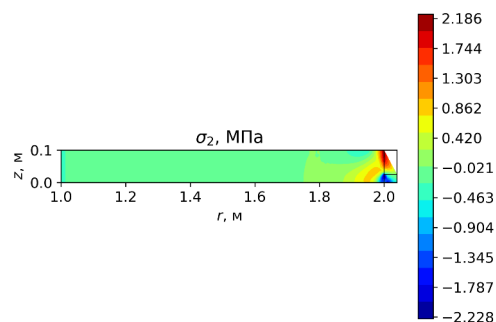
г



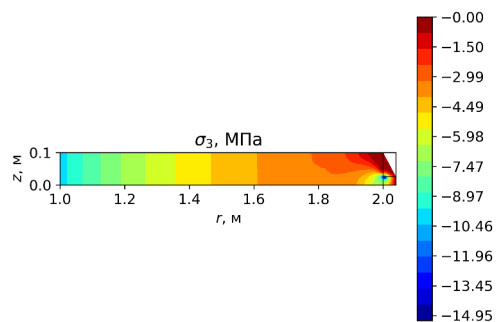
д



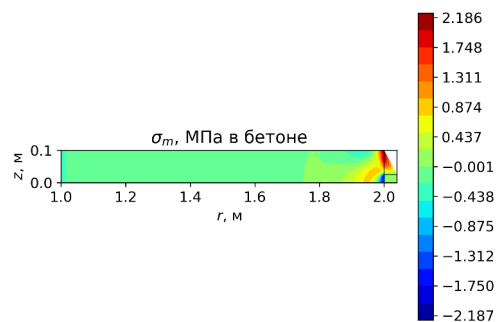
е



ж



з



и

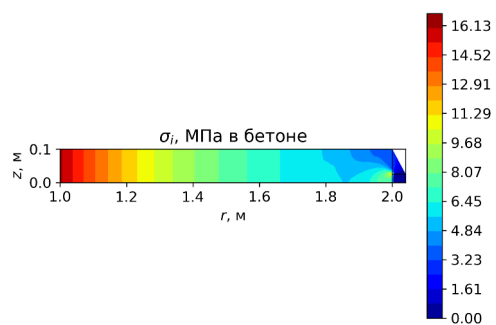
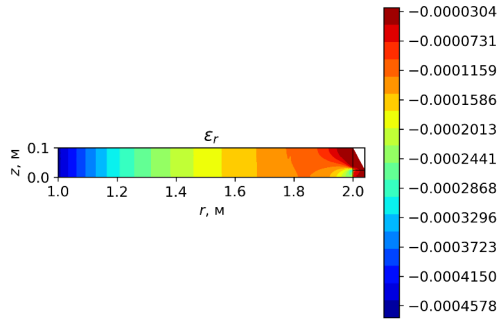
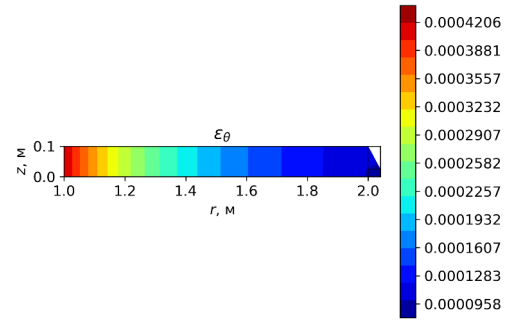


Рисунок 4.19 — Распределение напряжений в задаче №4

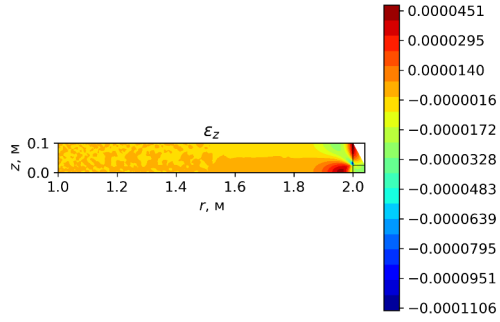
а



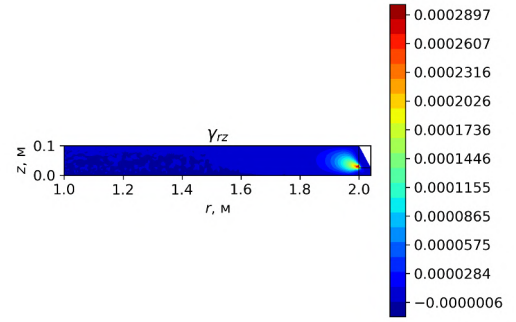
б



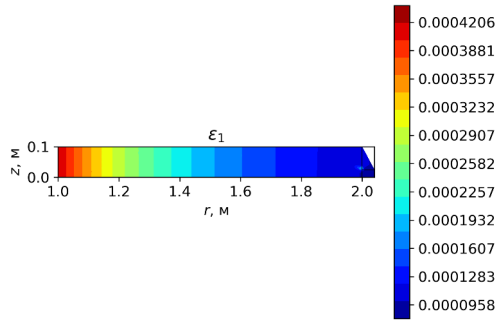
в



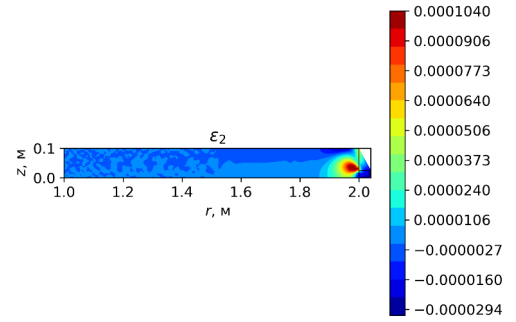
г



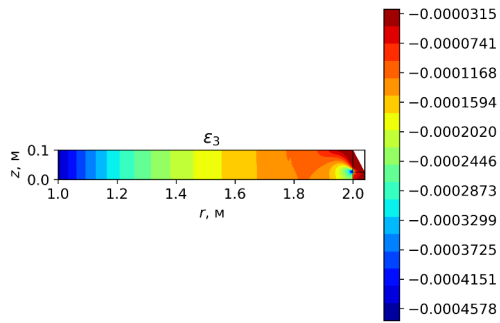
д



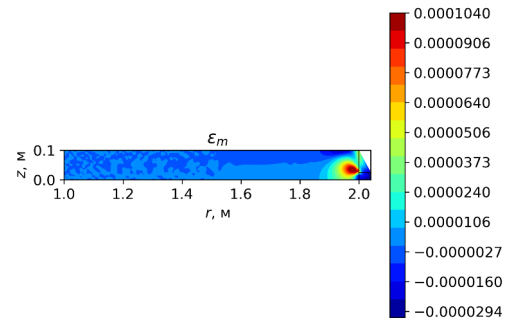
е



ж



з



и

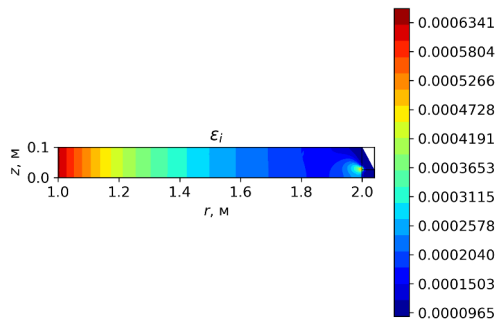


Рисунок 4.20 — Распределение относительной деформации в задаче №4

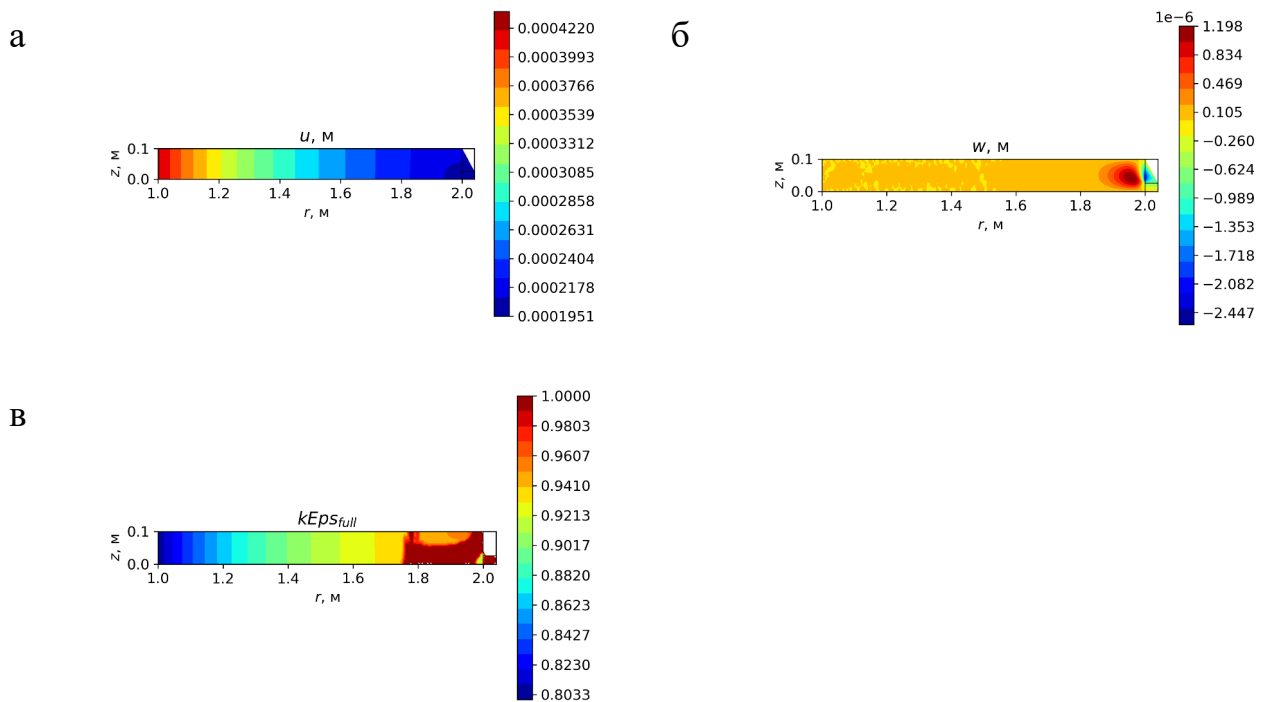


Рисунок 4.21 — Распределение перемещений в задаче №4

4.3. Железобетонный цилиндр с внешней стальной преднапряжённой оболочкой. Задача №5

Проводится моделирование толстостенной железобетонной цилиндрической оболочки с внутренним радиусом $R_A=0.4$ м и внешним $R_B=0.5$ м, т. е. подобно рассматриваемой в параграфе 4.1.

Учитывается изменение соотношения между деформациями и напряжениями для конкретного класса бетона, определяемого согласно методикам, приведённым в главе 2. За основу были взяты соотношения на основе формулы Сарджина, приведённые в параграфе 2.2.1.

Конечно-элементная сетка задачи №5 представлена на рисунке 4.22. Тёмно-жёлтым цветом представлены конечные элементы, моделирующие бетон, бирюзовым — внешний преднапрягаемый стальной хомут. На схеме для простоты восприятия приведена грубая сетка, при непосредственном расчёте использован более частый шаг: для бетона — сетка, максимальным размером не более $h_s/5$, для хомута — не более $b_s/5$, где h_s — шаг между центрами хомутов $h_s=20$ см, b_s —

ширина хомута $b_s = 0.5$ см. Высота хомута принята в 0.8 от шага $0.8 h_s = 16$ см. В силу симметрии рассматривается участок по высоте в половину шага арматуры в осевом направлении, т. е. $h_s/2 = 10.0$ см.

Процент армирования сечения по площади равен

$$\mu_s = \frac{A_s}{A_b} \cdot 100\% = \frac{0.5 \text{ см} \cdot 16 \text{ см}}{10 \text{ см} \cdot 20 \text{ см}} = 4.0\%. \quad (4.6)$$

Коэффициент линейного температурного расширения материала и для бетона, и для стали принят $\alpha = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$. Модуль деформации арматуры принят $E_s = 2.06 \cdot 10^5$ МПа постоянным и от температуры не изменяется. Коэффициент Пуассона бетона $\nu = 0.2$, арматуры $\nu = 0.3$.

При работе метода последовательных приближений во время корректировки коэффициентов, определяющих значения модуля упругости, задано предельное число шагов итерации 20, что вполне достаточно для обеспечения точности в коэффициенте на двух соседних шагах не более $\delta = 0.0001$.

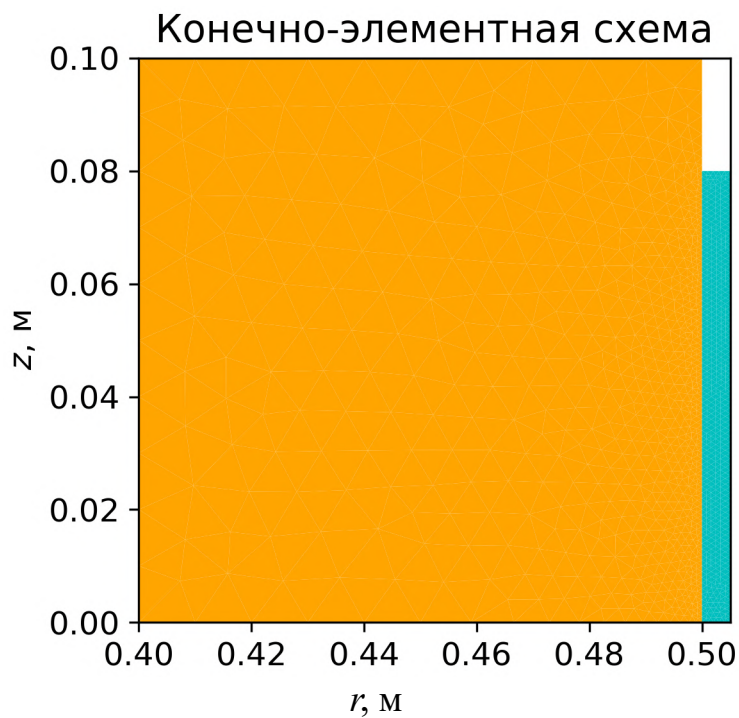


Рисунок 4.22 — Конечно-элементная сетка задачи №5

4.3.1. Задача 5.1

Задача моделирует работу конструкции без преднапряжения $\sigma_{sp}=0$ хомута.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4; температурный перепад на внешней и внутренней поверхностях отсутствует. На внутреннюю поверхность действует сжимающее напряжение $P_a=0.6$ МПа.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0)=31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1})=14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0)=0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu=0.2$;
- прочность на сжатие: $R=28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t=2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.23–4.25 (страницы 131–133).

Бетон, согласно коэффициенту k_ε (рисунок 4.4,в), работает практически на пределе в точке стыка открытой поверхности бетона и хомута с минимальным отношением $E(\varepsilon_i)/E(\varepsilon \rightarrow 0)=0.667$. Так же в этом месте ярко выделяются средняя деформация ε_m и интенсивность деформации ε_i и среднее напряжение $\sigma_m=2.088$ МПа, которое по величине близко к прочности бетона на растяжение $R_t=2.264$ МПа, а главное напряжение $\sigma_2=2.339$ МПа даже превышает его.

Резюмируя, в данной постановке наибольшее допустимое внутреннее давление составляет $P_a=0.6$ МПа ≈ 6 ат.

4.3.2. Задача 5.2

Задача моделирует работу конструкции с преднапряжением $\sigma_{sp} = -250$ МПа хомута, и при наличии температурного нагружения $T_a = 40$ °С на внутренней поверхности, $T_b = 0$ °С на внешней; давление на внутреннюю и внешнюю поверхности отсутствует.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.26–4.28 (страницы 134–136).

В данном случае хомут отлично сдерживает весь бетонный массив от расширения, создавая значительное усилие обжатия. При этом основные напряжения $\sigma_\theta = -17.50$ МПа и $\sigma_z = -13.49$ МПа возникают на внутренней поверхности в связи с температурным расширением материала и невозможностью развития деформаций, кроме как обратно, к центру цилиндра. Об этом же говорит и развитие перемещений $u = -7.860 \cdot 10^{-5}$ м на внутренней поверхности.

Резюмируя, в данной постановке разрушение наступает при температурном градиенте 40 градусов, при развитии наибольших сжимающих напряжений на

внутренней поверхности цилиндра. Модуль упругости при этом снижает своё значение до уровня 0.8101 от первоначального.

4.3.3. Задача 5.3

Задача моделирует работу конструкции с преднапряжением $\sigma_{sp} = -250$ МПа хомута, внутреннем давлении $P_a = -1.2$ МПа и при наличии температурного нагружения $T_a = 40^\circ\text{C}$ на внутренней поверхности, $T_b = 0^\circ\text{C}$ на внешней.

Неоднородная постановка: модуль упругости бетона изменяется, зависимость от температуры определяется через соотношение (3.1), модуль деформации для каждого конечного элемента через понижающий коэффициент при помощи выражения (3.2), зависимость от напряжённо-деформированного состояния — согласно методике из п.2.4.

Параметры бетона:

- класс В40
- начальный модуль упругости $E(\varepsilon \rightarrow 0) = 31668.0$ МПа;
- предельный секущий модуль упругости $E(\varepsilon_{c1}) = 14296.2$ МПа;
- отношение модуля деформации в максимальной точке по напряжениям к его начальному значению равно $E(\varepsilon_{c1})/E(\varepsilon \rightarrow 0) = 0.4514$;
- коэффициент Пуассона: $\nu = 0.2$;
- прочность на сжатие: $R = 28.80$ МПа;
- прочность на растяжение: $R_t = 2.264$ МПа.

Результаты расчёта приведены на рисунках 4.29–4.31 (страницы 137–139).

Как было показано в прошлой задаче №5.2, температурное поле и ограничение перемещений преднапряжённым хомутом сильно изменяют картину напряжённо-деформированного состояния. При этом несущая способность конструкции повышается с $P_a = 0.6$ МПа ≈ 6 ат для задачи №5.1 до $P_a = 1.2$ МПа ≈ 12 ат. Модуль упругости при этом снижает своё значение до уровня 0.8599 от первоначального на внутренней поверхности цилиндра, разрушение материала от возникновения растягивающих напряжений при этом не происходит.

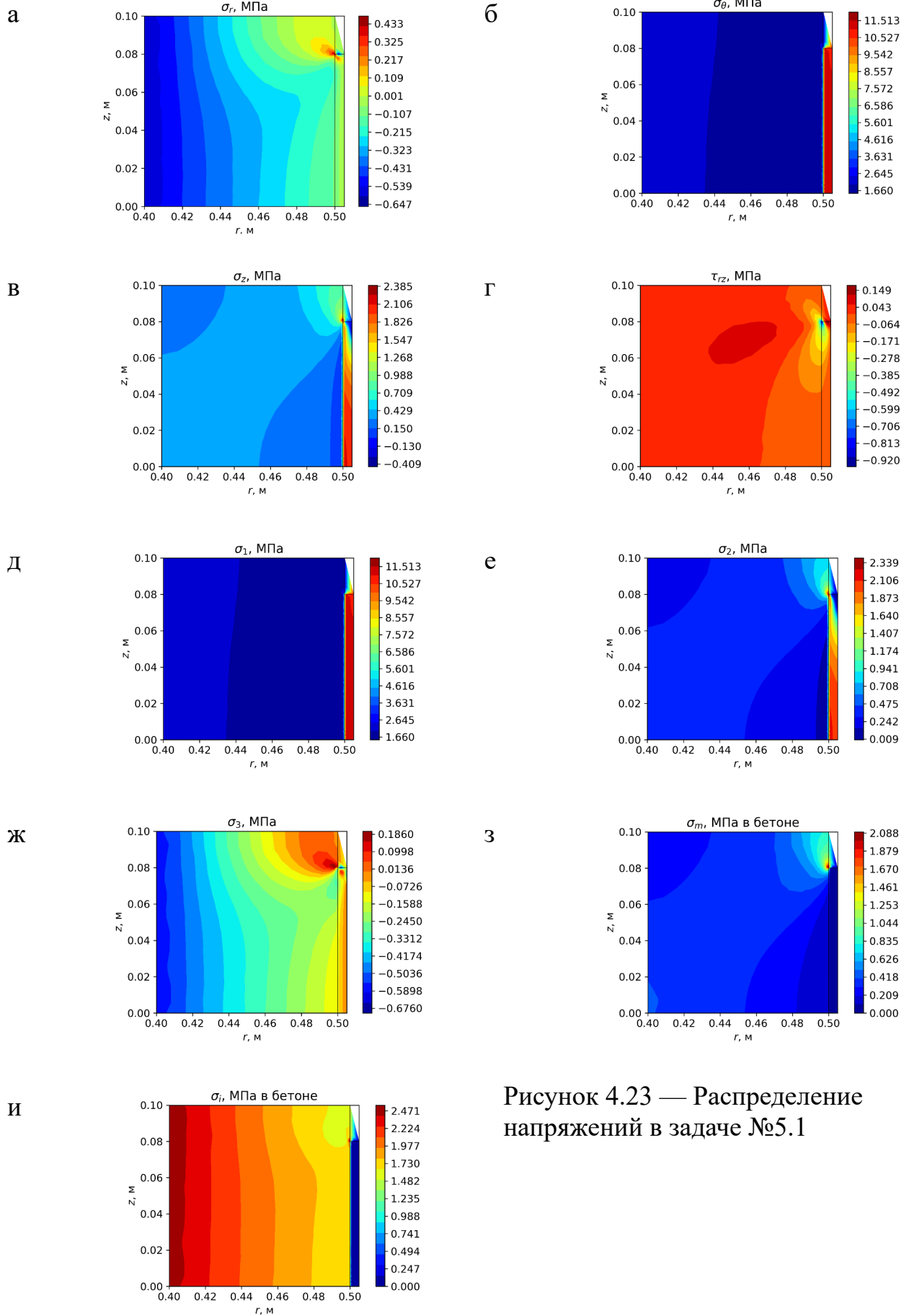


Рисунок 4.23 — Распределение напряжений в задаче №5.1

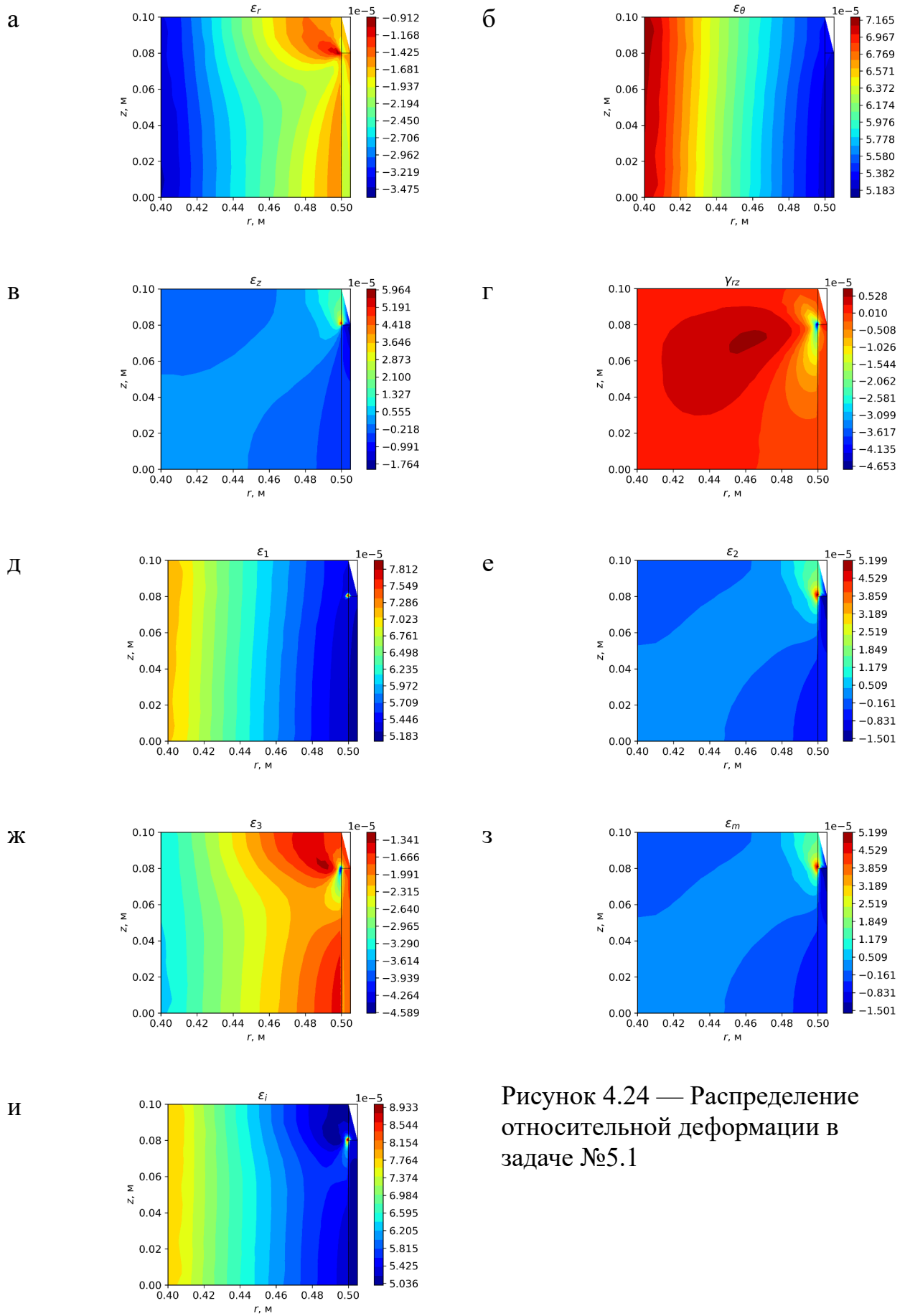
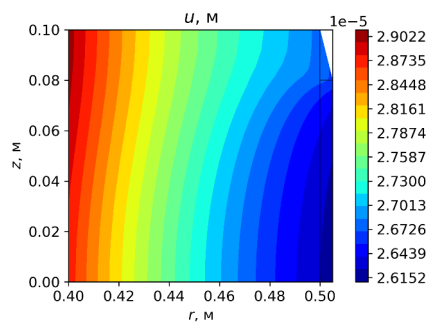
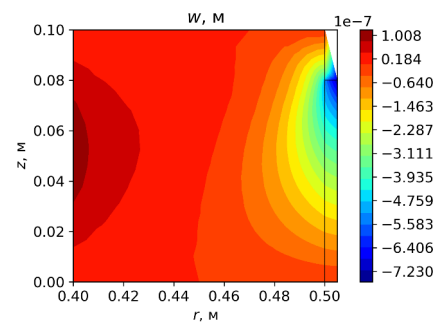


Рисунок 4.24 — Распределение относительной деформации в задаче №5.1

а



б



в

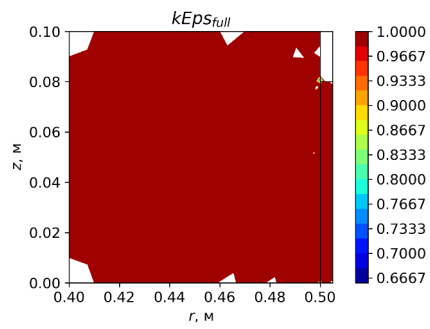
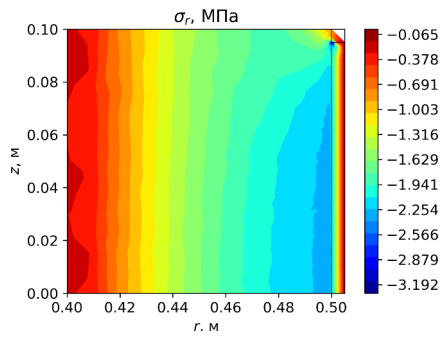
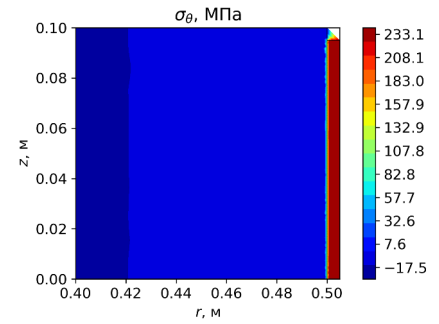


Рисунок 4.25 — Распределение перемещений в задаче №5.1

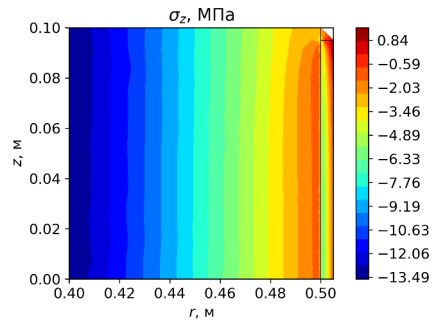
а



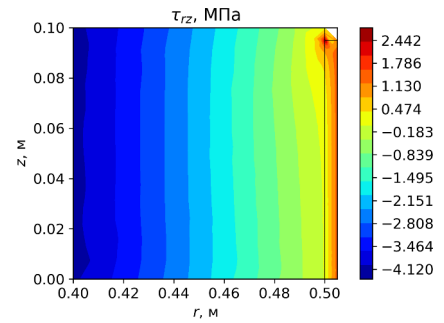
б



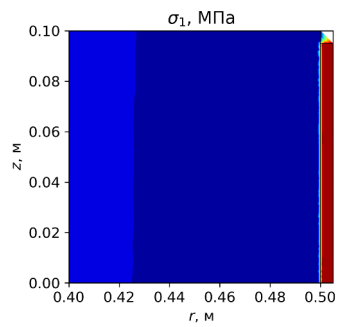
в



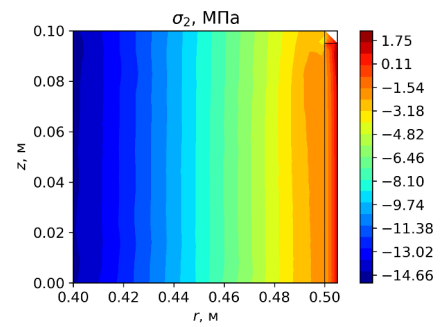
г



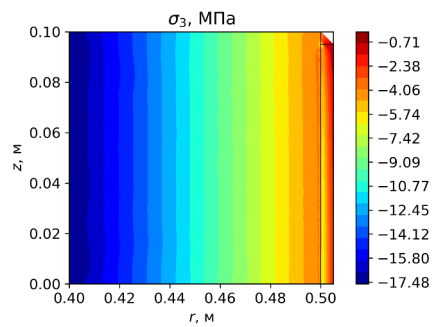
д



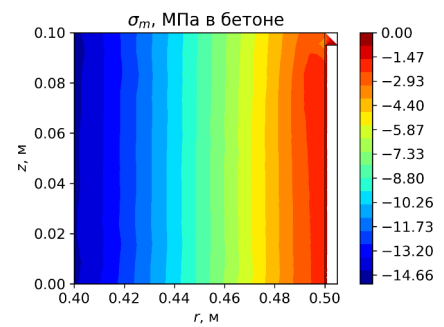
е



ж



з



и

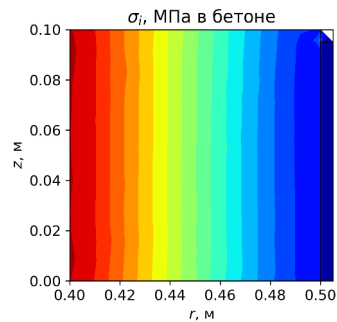


Рисунок 4.26 — Распределение напряжений в задаче №5.2

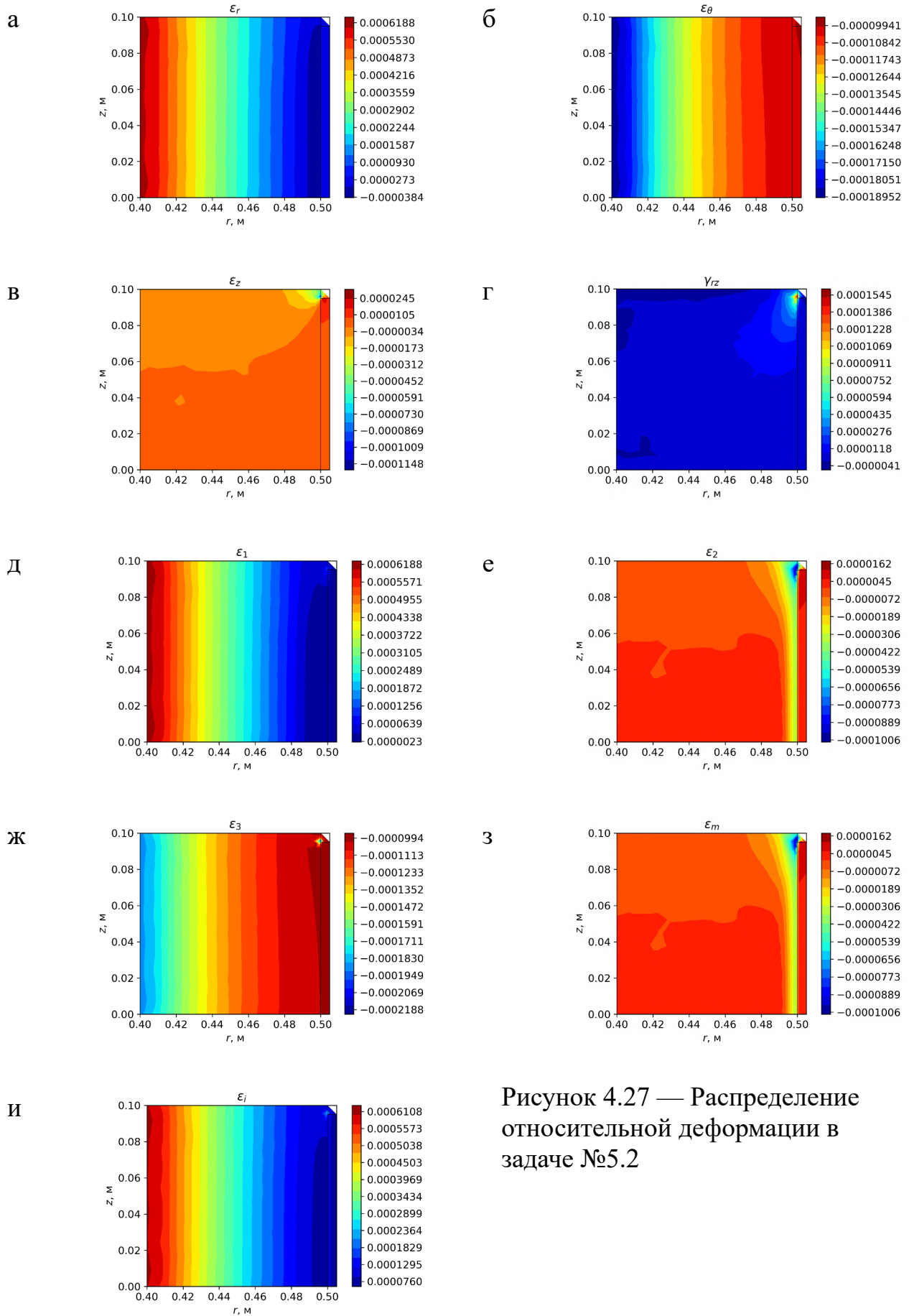


Рисунок 4.27 — Распределение относительной деформации в задаче №5.2

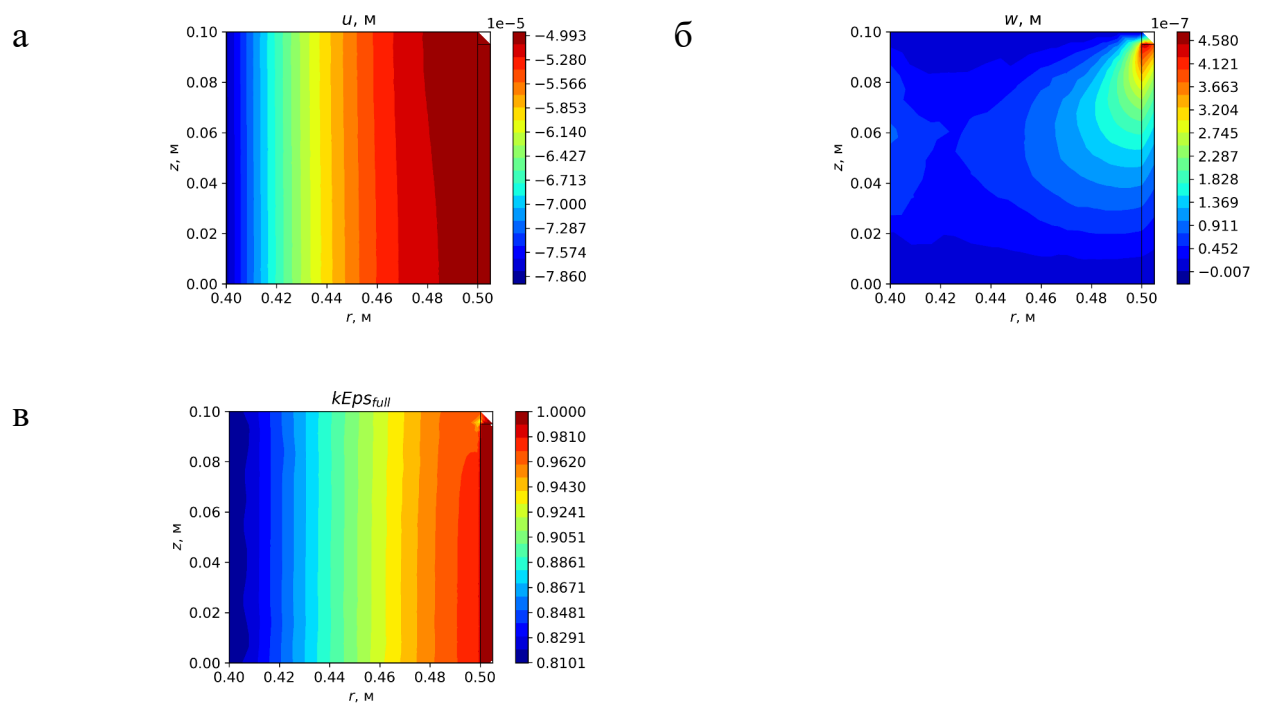


Рисунок 4.28 — Распределение перемещений в задаче №5.2

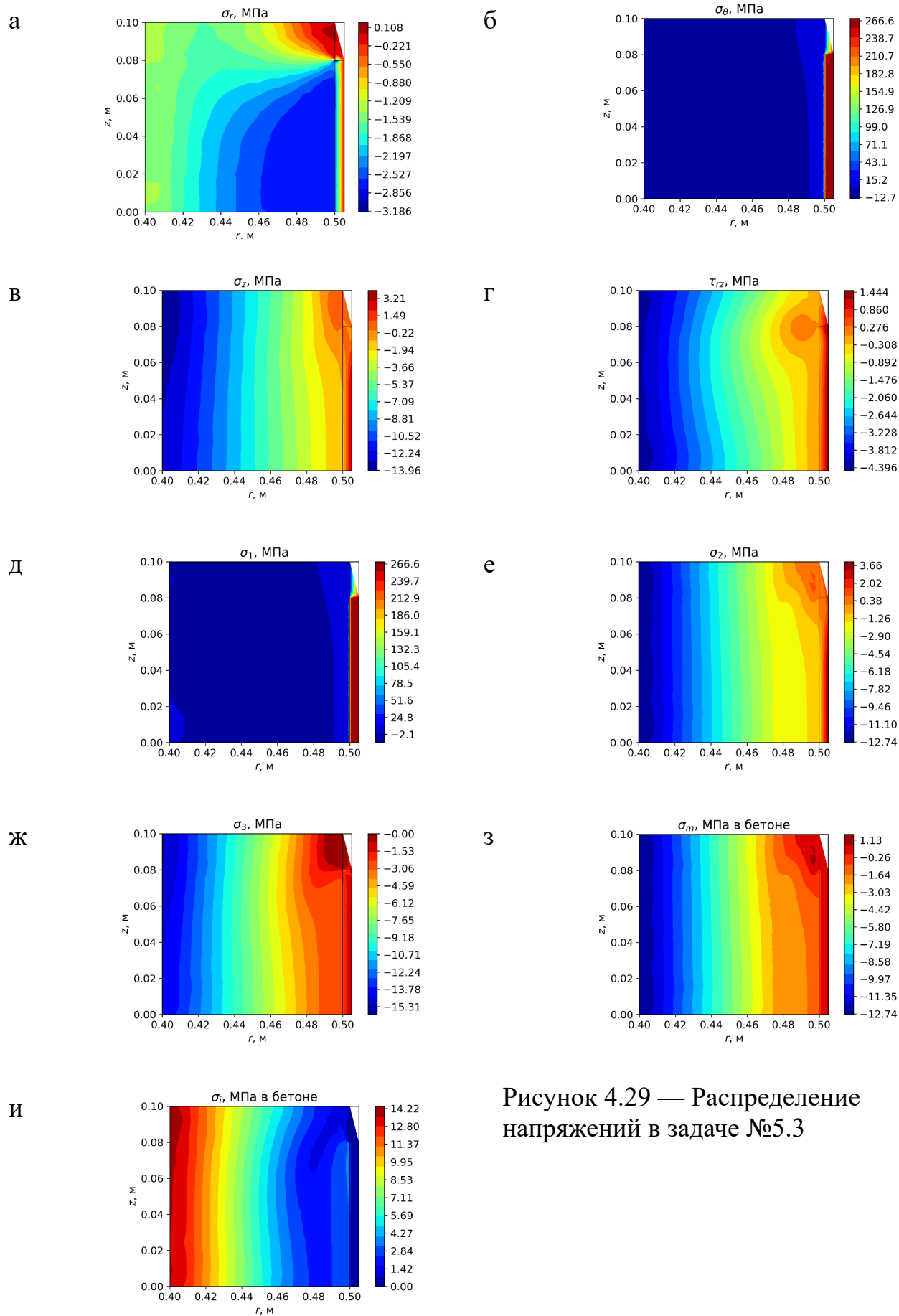
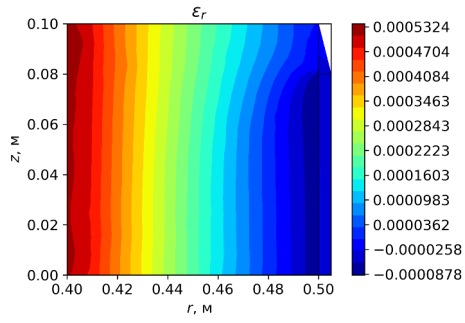
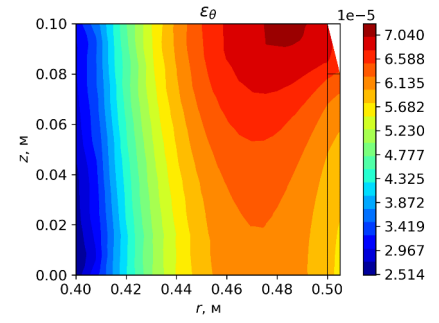


Рисунок 4.29 — Распределение напряжений в задаче №5.3

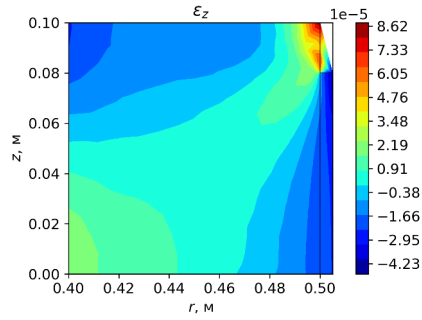
а



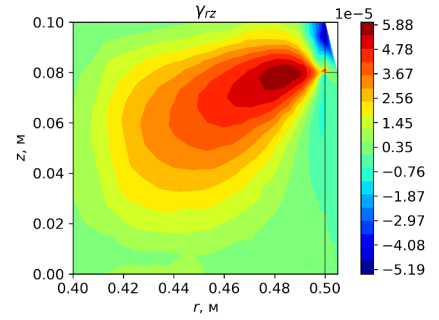
б



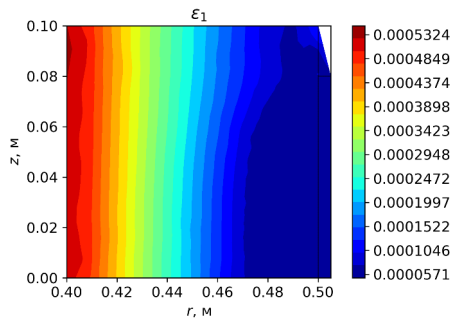
в



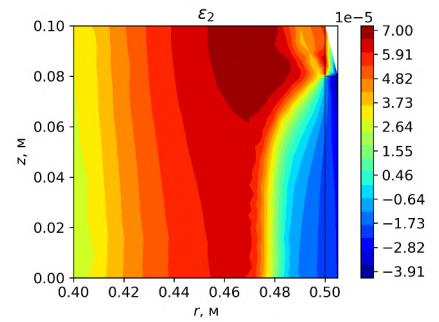
г



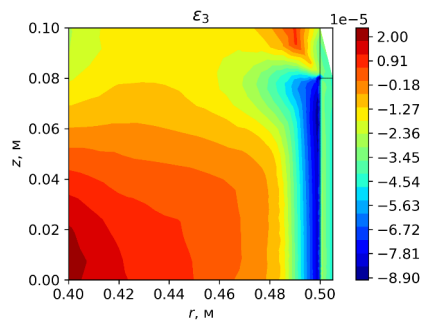
д



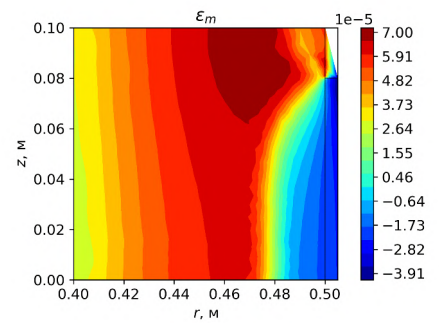
е



ж



з



и

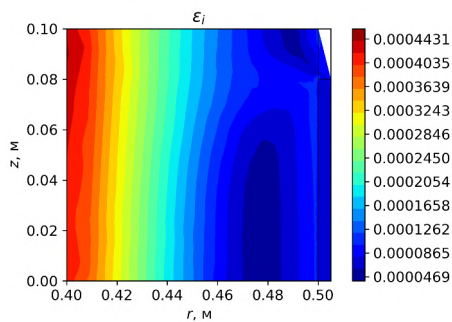


Рисунок 4.30 — Распределение относительной деформации в задаче №5.3

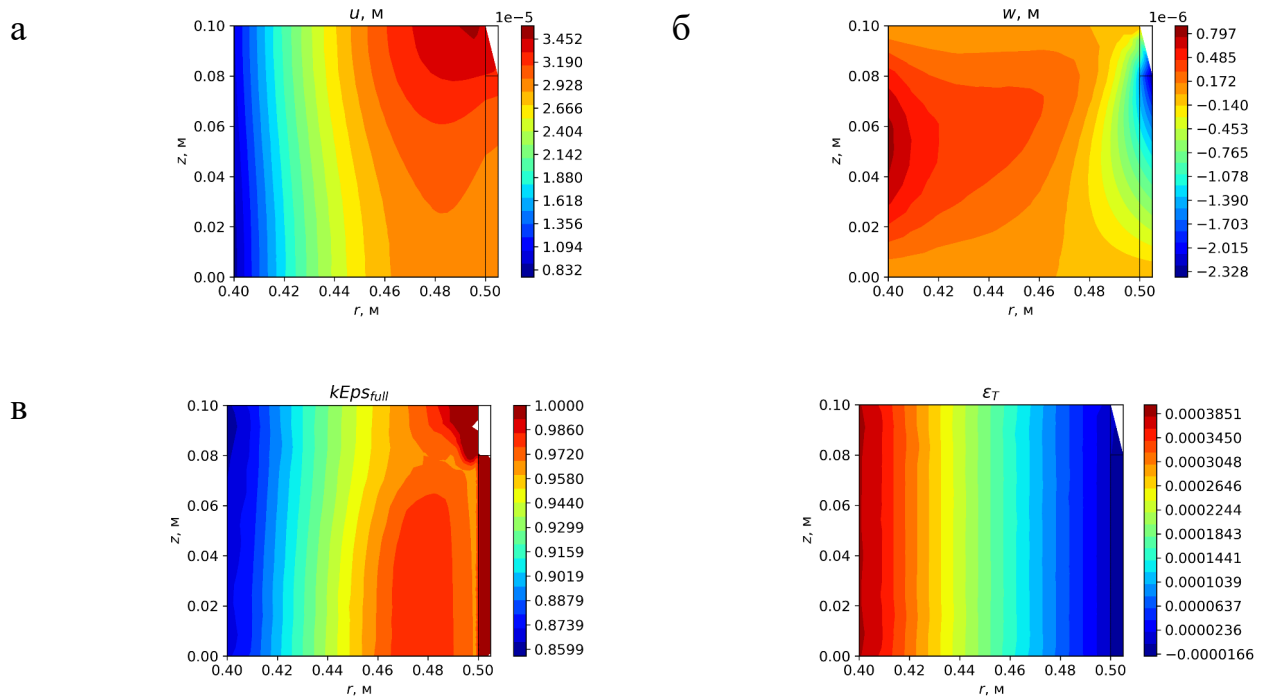


Рисунок 4.31 — Распределение перемещений в задаче №5.3

4.4. Итоги по главе 4

Проведённое моделирование задач №3–№5 показало:

1. В задаче №3 использование преднапряжённой арматуры: технологически сложно изготовление подобной конструкции; не даёт существенного преимущества в работе конструкции по несущей способности. Разрушение конструкции происходит во внешних слоях бетона, развитие расширения в которых никак не ограничено.
2. В задаче №4 показано, что напряжённо-деформированное состояние, возникающее в толстостенном цилиндре с внешним армированием, весьма сложно. Использование численно-аналитических решений даёт весьма грубую оценку, не учитывающую реальное распределение напряжений и деформаций.
3. В задаче №5 показано, что использование преднапряжённого хомута на цилиндре носит весьма неожиданный эффект. При наличии температурного поля, меняющегося от большего значения, на внутренней поверхности, к меньшему, на внешней поверхности, может увеличить несущую способность по внутреннему давлению в 2 раза.

Заключение

Основные выводы и результаты:

1. Построены теоретические кривые деформирования бетона для линейного напряжённого состояния на основе различных теорий и нормативных документов и проведено сопоставление с некоторыми реальными экспериментальными данными, взятыми из открытых источников в различных диссертационных работах. Кривая по Еврокоду наиболее хорошо согласуется с экспериментальными данными, имеет минимальные отклонения по значениям максимального напряжения. Однако, значения относительной продольной деформации в точках с наибольшим напряжением чаще дают лучшее согласование теоретических кривых на основе свода правил и теории Г. А. Гениева. Объяснить это можно тем, что данные на основе свода правил имеют несколько меньшие цифры по допускаемым значениям максимального напряжения в пользу дополнительного запаса прочности готового изделия, что наиболее подходит для построения математических моделей, максимально полно согласующихся с опытными данными.

2. Предложена и реализована в расчётных модулях методика учёта изменения модуля деформации бетона при объёмном напряжённом состоянии. Модель учитывает возникновение ослабленных зон, что позволяет оценивать возможное разрушение конструкции. Для конструкций, работающих в ограниченной среде, учёт изменения свойств бетона как от напряжённо-деформированного состояния, так и от температурного поля, может давать снижение напряжений до трёх раз.

3. Реализована на основе метода конечных-элементов в среде Anaconda на языке Python методика определения напряжённо-деформированного состояния железобетонной оболочки при непосредственном учёте арматуры, в отличие от «традиционного размазывания» последней по сечению, а также выполнена валидация с известными решениями других авторов. Показано, что разрушение конструкции часто происходит не из-за исчерпания несущей способности бетона, а из-за перераспределения напряжённо-деформированного состояния в конструкции, что приводит к образованию областей с растягивающими напряжениями.

4. Доказана нецелесообразность использования внутренней преднапрягаемой арматуры путём моделирования работы толстостенной цилиндрической железобетонной оболочки в различных условиях нагружения. Представлено, что разрушение начинается в первую очередь с внешней поверхности цилиндра, где внутренний слой бетона ничем не ограничен от развития растягивающих напряжений и деформаций.

5. Выявлено существенное развитие зон концентрации напряжений и появление ослабленных зон при непосредственном моделировании совместной работы бетона и преднапрягаемой стальной оболочки. Моделирование показало, что наличие предварительно напряженной стальной обоймы может иметь не столько существенный положительный эффект, однако наличие температурного градиента в пределах 40 градусов может, меняющегося от большего значения, на внутренней поверхности, к меньшему, на внешней поверхности, может увеличить несущую способность конструкции по внутреннему давлению в 2 раза.

Перспективы исследования

В настоящей работе рассмотрены только элементы конструкции, имеющие осевую симметрию. Дальнейшие исследования могут быть направлены на решение задачи точного определения температурных полей и напряжений при возведении массивных монолитных конструкций в трехмерной постановке, учёте развития деформаций ползучести в связующем, появлении усадочных деформации при твердении бетона в начальный период времени. Армирование в настоящей работе моделируется в окружном направлении, необходимо разработать методики учёта арматуры в радиальном и осевом направлениях. Данная работа даёт примерную работу конструкций, не опираясь на теории прочности, существующие для бетона — работа бетона на сжатие принята лишь по восходящей кривой деформирования.

Разработка собственных программных модулей позволяет уйти от не-кой ограниченности универсальных программных комплексов, независимо рассмотрении множества факторов, влияющих на физико-механические параметры материала, при произвольных законах их изменения.

Список литературы

1. Алейников, С. М. Пространственная контактная задача для жесткого фундамента на упругом неоднородном основании / С. М. Алейников // Изв. вузов. Сер. строительство. — 1993. — №2. — С. 52-59.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: Учебное пособие / А.В.Александров, В.Д.Потапов. — М.: Высш. шк., 1990. — 400 с.
3. Андреев, В. И. Оптимизация неоднородной толстостенной сферической оболочки, находящейся в температурном поле / В. И. Андреев, С. В. Булушев // Вестник МГСУ. — 2012. — №12. — С. 40-46.
4. Андреев, В. И. Моделирование равнонапряженного цилиндра, подверженного силовым и температурным нагрузкам / В. И. Андреев, А. С. Минаева // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. — 2011. — №7(1). — С. 71_75.
5. Андреев, В. И. Оптимизация по прочности толстостенных оболочек / В. И. Андреев, И. А. Потехин. — М.: МГСУ, 2011. — 86 с.
6. Андреев, В. И. Упругое и упруго-пластическое равновесие толстостенных цилиндрических и сферических непрерывно-неоднородных тел: Спец. 01.02.03 — Строительная механика: Дисс. . . . д-ра. техн. наук. — М., 1985. — 427 с.
7. Андреев, В. И. О равнопрочных и равнонапряженных конструкциях / В. И. Андреев, И. А. Потехин // Сб. тр. Вятч. гос. арх.-строт. ун-т. — 2007. — №1. — С. 84-90.
8. Андреев, В. И. О способе создания оптимальных строительных конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел / В. И. Андреев, И. А. Потехин // Вестник строит. наук. Курск. — 2007. — №9. — С. 48-52.
9. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография / В.И.Андреев. — М.: Издательство АСВ, 2002. — 288 с.
10. Байков, В. Н. Общий случай расчёта прочности элементов по нормальным сечениям / В. Н. Байков, М. И. Додонов, Б. С. Расторгуев и др. // Бетон и желе-

- зобетон. — 1987. — №5. — С. 16-18.
11. Бондаренко, В. М. Модели в теориях деформации и разрушения строительных материалов / В. М. Бондаренко, В. С. Федоров // Academia. Архитектура и строительство. — 2013. — №2. — С. 103-105.
 12. Боровских, А. В. Теория силового сопротивления сжатых железобетонных конструкций / А. В. Боровских, В. Г. Назаренко. — М.: Отдел информационно-издательской деятельности РААСН, 2000. — 112 с.
 13. Бородачев, А. Н. Взаимодействие жесткого фундамента с неоднородным упругим основанием / А. Н. Бородачев // Изв. вузов. Сер. строительство и архит.. — 1985. — №10. — С. 38-41.
 14. Вержбицкий, В. М. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения / В. М. Вержбицкий. — М.: Высшая школа, 2001. — 382 с.
 15. Ву, Н. Т. Вариант теории пластичности бетона применительно к статикодинамическому режиму деформирования / Н.Т.Ву, Н.В.Федорова // Строительство и реконструкция. — 2022. — №6. — С. 116-127.
 16. Гениев, Г. А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А.Гениев, В.Н.Киссюк, Г.А.Тюпин. — М.: Стройиздат, 1974. — 316 с.
 17. Гениев, Г. А. Прочность и деформативность железобетонных конструкций при запроектных воздействиях / Г. А. Гениев, В. И. Колчунов, Н. В. Ключева, А. И. Никулин, К. П. Пятикрестовский. — М.: Издательство АСВ, 2004. — 216 с.
 18. Голышев, А. Б. К разработке прикладной теории расчёта железобетонных конструкций / А. Б. Голышев, В. Я. Бачинский // Бетон и железобетон. — 1985. — №6. — С. 16-19=8.
 19. Ершов, В. И. Действие распределённой нагрузки на нелинейно-деформируемое полупространство / В. И. Ершов // Изв. вузов. Сер. строительство. — 1994. — №1. — С. 25-29.
 20. Журавлева, А. В. Аналитическое решение задачи равновесия составного радиально-неоднородного цилиндра / А. В. Журавлева // Изв. вузов. Сер. машиностроение. — 1997. — №7-9. — С. 44-49.

21. Журавлева, Т. А. О расчете балок на сплошном упругом основании с кусочно-линейной характеристикой / Т. А. Журавлева // Изв. вузов. Сер. машиностроение. — 1982. — №1. — С. 3-7.
22. Звездов, А. И. Расчёт прочности железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил по новым нормативным документам / А. И. Звездов, А. С. Залесов, Т. А. Мухамедиев, Е. А. Чистяков // Бетон и железобетон. — 2002. — №2. — С. 21-25.
23. Золочевский, А. А. Методика расчета нелинейно-упругого деформирования оболочек из материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию / А. А. Золочевский, С. В. Дамасевич // Изв. вузов. Сер. машиностроение. — 1990. — №5. — С. 30-34.
24. Ингульцов, В. Л. К расчету толстостенной неоднородной ортотропной трубы при осесимметричном нагружении / В. Л. Ингульцов, В. С. Черномаз // Строительная механика и расчет сооружений. — 1983. — №6. — С. 22-24.
25. Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона / Н. И. Карпенко. — М.: Стройиздат, 1996. — 416 с.
26. Карпенко, Н. И. К построению методики расчёта стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов / Н. И. Карпенко, Т. А. Мухамедиев, М. А. Сапожников // В кн.: Совершенствование методов расчёта статически неопределимых железобетонных конструкций. — 1987. — №1. — С. 4-24.
27. КМК 2.03.01-96. Бетонные и железобетонные конструкции // М. — 1998.
28. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1970. — 307 с.
29. Колчин, Г. Б. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель / Г. Б. Колчин, Э. А. Фаверман. — Кишинев: Штиинца, 1977. — 148 с.
30. Колчин, Г. Б. Теория упругости неоднородных тел. Библиографический указатель / Г. Б. Колчин, Э. А. Фаверман. — Кишинев: Штиинца, . — 248 с.
31. Колчунов, В. И. Физическая суть сопротивления бетона и железобетона от дислокаций до трещин / В.И.Колчунов // Строительство и реконструкция. —

2022. — №4 (102). — С. 15-33. — DOI: 10.33979/2073-7416-2022-102-4-15-33.
32. Литвинов, С. В. Нелинейная ползучесть неоднородных многослойных цилиндров и сфер: Спец. 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела: Дисс. . . . канд. техн. наук. — М., 2010. — 200 с.
 33. Литвинов, С. В. Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учётом нелинейной ползучести / С. В. Литвинов, С. Б. Языев, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2010. — №1. — С. 128-132.
 34. Ломакин, В. А. Теория упругости неоднородных тел / В. А. Ломакин. — М.: Изд-во МГУ, 1967. — 367 с.
 35. Медянкин, М. Д. Деформирование бетона при статико-динамическом нагружении железобетонных конструкций: дисс. . . . канд. техн. наук: 2.1.1 / Медянкин Михаил Дмитриевич. — М., 2021. — 163 с.
 36. Михлин, С. Г. Плоская задача теории упругости / С. Г. Михлин // Труды сейсм. ин-та АН СССР. — 1935. — №65. — С. 84.
 37. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. — М.: Наука, 1966. — 432 с.
 38. Мкртчян, А. М. О коэффициенте призмной прочности высокопрочных бетонов / А.М.Мкртчян, В.Н.Аксенов // Инженерный вестник Дона. — 2013. — №3 (26). — С. 126.
 39. Мкртчян, А. М. Железобетонные колонны из высокопрочного бетона на материалах республики Армения: дисс. . . . канд. техн. наук: 05.23.01 / Мкртчян Аксель Мгерович. — Ростов-н/Д, 2013. — 180 с.
 40. Муханов, А. В. Оптимизация строительных конструкций на основе численного и аналитического решения задач механики неоднородных тел: Спец. 05.23.01 — Строительные конструкции, здания и сооружения, 05.13.17 — Строительная механика: Дисс. . . . канд. техн. наук. — Ростов-н/Д, 2013. — 121 с.
 41. Назаров, Г. И. К кручению неоднородного стержня прямоугольной формы / Г. И. Назаров, А. А. Пусков // Изв. вузов. Сер. строительство. — 1993. — №2. — С. 35-39.

42. Ортега, Д. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Д. Ортега, У. Пул. — М.: Наука, 1986. — 295 с.
43. Подстригач, Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
44. Потехин, И. А. О моделировании равнонапряжённого цилиндра на основе энергетической теории прочности / И. А. Потехин // Сб. тр. Кострома: КГ-СХА. — 2009. — №2. — С. 72-74.
45. Потехин, И. А. Способ оптимизации конструкций на основе решения обратных задач теории упругости неоднородных тел: Спец. 05.23.17 — Строительная механика: Дисс. . . . канд. техн. наук. — М., 2009. — 142 с.
46. Радайкин, О. М. Развитие теории диаграммного метода расчёта стержневых элементов из армированного бетона: Спец. 2.1.1. Строительная конструкции, здания и сооружения: Дисс. . . . д-ра. техн. наук. — Казань, 2023. — 471 с.
47. Расторгуев, Б. С. Упрощённая методика получения диаграмм деформирования стержневых элементов в стадии с трещинами / Б. С. Расторгуев // Бетон и железобетон. — 1993. — №3. — С. 16-19.
48. Самарский, А. А. Введение в теорию разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1973. — 552 с.
49. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 115 с.
50. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности / В.И.Самуль. — М.: "Высш. школа", 1970. — 288 с.
51. Смоллов, А. В. Напряжённо-деформированное состояние неоднородных упругих цилиндров под действием силовых и температурных нагрузок: Спец. 01.02.03 — Строительная механика: Дисс. . . . канд. техн. наук. — М., 1987. — 184 с.
52. Снитко, Н. К. О действии сосредоточенной силы на неоднородное упругое полупространство / Н. К. Снитко // Строительная механика и расчет сооружений. — 1980. — №2. — С. 76-78.

53. СП 27.13330.2011. СНиП 2.03.04-81. Бетонные и железобетонные конструкции, предназначенные для работы в условиях воздействия повышенных и высоких температур // Министерство регионального развития Российской Федерации. — 2011.
54. СП 63.13330.2018. СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения // Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации. — 2019.
55. СП РК EN 1992-1-1:2004/2011. Свод правил республики Казахстан: проектирование железобетонных конструкций // Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. Комитет по делам строительства и жилищно-коммунального Министерства национальной экономики Республики Казахстан. — 2016.
56. Стренг, Д. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Д. Фикс. — М.: Мир, 1980. — 315 с.
57. Таинг, Б. Совершенствование методики расчёта железобетонных элементов с учётом нормирования опорных точек диаграмм деформирования материалов: дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Таинг Буннаритх. — Ростов-н/Д, 2004. — 226 с.
58. Тимошенко, С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1975. — 575 с.
59. ТКП TN 1992-1-1-2009 (02250). Еврокод 2: Проектирование железобетонных конструкций // Часть 1-1. Общие правила и правила для зданий. Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь. — 2010.
60. Трошин, В. Г. Контактное взаимодействие силовых элементов тонкостенных конструкций с нелинейно упругим основанием / В. Г. Трошин // Строительная механика и расчет сооружений. — 1988. — №6. — С. 34-37.
61. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.
62. Фёдоров, В. С. Расчётные модели деформирования железобетонных конструкций с пространственными трещинами / В. С. Фёдоров, В. Л. Колчу-

- нов, А. А. Покусаев, Н. В. Наумов // Научный журнал строительства и архитектуры. — 2019. — №4. — С. 11-28.
63. Фёдоров, В. С. Противопожарная защита зданий. Конструктивные и планировочные решения / В. С. Федоров, В. И. Колчунов, В. Е. Левитский. — М.: АСВ, 2013. — 175 с.
 64. Хайер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Не жесткие задачи / Э. Хайер. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
 65. Чепурненко, А. С. Построение модели равнонапряженного цилиндра на основе теории прочности Мора / А. С. Чепурненко, В. И. Андреев, Б. М. Языев // Вестник МГСУ. — 2013. — №5. — С. 56-61.
 66. Шляхов, С. М. Задача термоупругости для свободного двухслойного нелинейно-деформируемого цилиндра / С. М. Шляхов // Научное обозрение. — 1991. — №4-6. — С. 28-31.
 67. Шляхов, С. М. Осесимметричная контактная задача термоупругости для нелинейно-деформируемого составного диска / С. М. Шляхов, А. В. Серебряков // Изв. вузов. Сер. машиностроение. — 1990. — №5. — С. 28-31.
 68. Шляхов, С. М. Контактная задача термоупругости для двухслойного нелинейно-деформируемого цилиндра при неидеальном термомеханическом контакте / С. М. Шляхов // Изв. вузов. Сер. машиностроение. — 1990. — №6. — С. 12-16.
 69. Языев, Б. М. Особенности релаксационных свойств сетчатых и линейных полимеров и композитов на их основе: Спец. 02.00.06 — Высокомолекулярные соединения: Дисс. . . . д-ра техн. наук. — Нальчик, 2009. — 352 с.
 70. Языев, Б. М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров: Спец. 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела: Дисс. . . . канд. техн. наук. — М., 1990. — 171 с.
 71. ABNT N. B. R. 6118–2003. Norma Brasileira // Projeto de estruturas de concreto—Procedimento (Design of structural concrete-Procedure). Rio de Janeiro. — 2004.
 72. ACI 318M-08. Building code requirements for structural concrete (ACI 318-08) and commentary // American Concrete Institute. — 2008.

73. Andreev, V. I. About one way of optimization of the thick-walled shells / V. I. Andreev // *Applied Mechanics and Materials*. — 2012. — №166-169. — C. 354-358.
74. AS 3600-2001. Australian standard: Concrete structures // *Standards Australia International*. — 2001.
75. GB50010-2002. National Standard of the people's republic of China. Code of Design of Concrete Structures // *Beijing*. — 2002.
76. IS-456-2000. Indian standard. Plain and Reinforced concrete – code of practice (Fourth Revision) // *New Delhi*. — 2000.
77. Standard B. Eurocode 2. Design of concrete structures // *Part 1-1: General rules and rules for buildings*. — 2004.
78. TCXDVN-356-2005. Concrete and reinforced concrete structures // *Design standard*. — 2005.
79. TS 500-2000 (ICS 91.080.40). Turkish Standard. Betonarme yapıların tasarım ve yapım kuralları. Requirements for design and construction of reinforced concrete structures // *Ankara*. — 2000.
80. Vu, N. T. Variant of the deformation diagram of concrete under uniaxial and volumetric stress state / N.T.Vu, N.Fedorova, V.Tyurina, T.Q.Duong // *E3S Web of Conferences*. EDP Sciences. — 2023. — №410. — C. 03012. — DOI: 10.1051/e3sconf/202341003012.

Приложения. Свидетельства программ ЭВМ и свидетельства о внедрении результатов работы

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2024680159**

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):
2024680159

Дата регистрации: **26.08.2024**

Номер и дата поступления заявки:
2024669392 21.08.2024

Дата публикации и номер бюллетеня:
26.08.2024 Бюл. № 9

Контактные реквизиты:
**308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46,
БГТУ им. В.Г. Шухова, отдел создания и
оценки объектов интеллектуальной
собственности Телефон: (4722) 30-99-29,
Факс: (4722) 55-41-61, E-mail:
patent_bstu@mail.ru**

Автор(ы):

**Стеблянко Александр Олегович (RU),
Гомелаури Владислав Геннадьевич (RU),
Кузнецов Владимир Вячеславович (RU),
Чепурненко Антон Сергеевич (RU),
Языев Сердар Батырович (RU),
Языев Батыр Меретович (RU),
Зинькова Виктория Анатольевна (RU),
Сабитов Линар Салихзанович (RU)**

Правообладатель(и):

**федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Белгородский государственный
технологический университет им. В.Г. Шухова»
(RU)**

Название программы для ЭВМ:

**Расчет напряженно-деформированного состояния железобетонных стоек с локальным
предварительным напряжением арматуры**

Реферат:

Программа предназначена для определения напряженно-деформированного состояния гибких внецентренно-сжатых железобетонных колонн прямоугольного сечения с предварительным напряжением на отдельных участках в стадии создания предварительных напряжений и в стадии работы под нагрузкой. Входными параметрами для программы выступают модуль упругости арматуры, размеры поперечного сечения, прочностные и деформативные характеристики бетона, диаметр арматурных стержней и их привязка к центру тяжести поперечного сечения, предел текучести арматурной стали, уровень предварительного напряжения, длина зоны предварительного напряжения, общая длина колонны, величина сжимающей нагрузки, эксцентриситет продольной силы. На выходе программа строит кривую зависимости нагрузки от прогиба и определяет напряжения в бетоне и арматуре для каждого расчетного сечения по длине колонны. ТИП ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК; ОС: Windows.

Язык программирования: **MATLAB**

Объем программы для ЭВМ: **12,5 КБ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**RU2025660313**

**ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

Номер регистрации (свидетельства):
2025660313

Дата регистрации: **23.04.2025**

Номер и дата поступления заявки:
2025617477 04.04.2025

Дата публикации и номер бюллетеня:
23.04.2025 Бюл. № 5

Контактные реквизиты:
**360004, КБР, Нальчик, ул. Чернышевского,
173, ЦПТИ КБГУ**

Автор(ы):

**Хежев Толя Амирович (RU),
Литвинов Степан Викторович (RU),
Ерофеев Владимир Трофимович (RU),
Языев Батыр Меретович (RU),
Кузнецов Владимир Вячеславович (RU),
Тюряхина Татьяна Павловна (RU)**

Правообладатель(и):

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
образования «Кабардино-Балкарский
государственный университет им. Х.М.
Бербекова» (RU)**

Название программы для ЭВМ:

**Расчет остаточного напряжённно-деформированного состояния полимерного цилиндра в процессе
экструзии**

Реферат:

Программа предназначена для определения остаточных напряжений в полимерном цилиндре при (цилиндр, труба) при извлечении изделия из экструдера. Задача решается в двумерной осесимметричной постановке (параметры в окружном направлении не изменяются). Расчет выполняется при помощи метода конечных элементов на основе прямоугольного конечного элемента, полученного непосредственным интегрированием функций формы. В процессе решения определяется изменение температурного поля в процессе экструзии, корректировка физико-механических параметров, как функции от значения температуры, производится расчёт напряжённно-деформированного состояния в квазиупругой постановке. Использование квазиупругого состояния использовано для учёта развития деформаций ползучести материала изделия. Результатом работы программы является определение напряжений, деформаций и перемещений на каждом этапе времени. Тип ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК на базе процессоров Intel/AMD; ОС: Windows; Linux; macOS.

Язык программирования: MATLAB

Объем программы для ЭВМ: 37800 КБ



Руководитель строительного отдела ГК АКСстрой
Индивидуальный предприниматель Акопян В.Ф.
346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;
тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakor@mail.ru.
моб. тел.: 8-908-506-97-99
ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель строительного отдела
ГК АКСстрой
ИП Акопян В.Ф.

 / В. Ф. Акопян

Технический акт внедрения

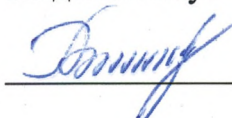
результатов диссертационной работы Кузнецова Владимира Вячеславовича на тему: «Напряжённо-деформированное состояние физически нелинейных неоднородных железобетонных цилиндров» на соискание ученой степени кандидата технических наук

Место внедрения	Ростовская обл., г. Аксай
Предмет внедрения	Пакет прикладных программ на языке Python для определения напряжённо-деформированного состояния в железобетонных изделиях цилиндрической формы
Результаты внедрения	Результаты диссертационной работы В. В. Кузнецова, используются при расчете напряжённо-деформированного состояния железобетонных цилиндрических конструкций, используемых в том числе при производстве ливневых, канализационных колодцев и т.д., испытывающих внешнее давление от грунта и температурные градиенты (тепловые узлы). Учёт распределения напряжений и деформаций, согласно данным, получаемым при использовании пакета программ, позволяет более рационально использовать армирование изделия, что имеет значительный экономический эффект до 1 500 тыс. руб. (один миллион пятьсот тысяч рублей).

Представители заказчика:
директор строительного отдела
ГК АКСстрой
ИП Акопян В.Ф.

 / В. Ф. Акопян

Исполнитель: младший научный
сотрудник лаборатории металлов,
сплавов и композиционных
материалов Комплексного научно-
исследовательского института
им. Х. И. Ибрагимова Российской
академии наук

 / В. В. Кузнецов