МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВО
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения практических работ по дисциплине «Теория графов»
для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02-«Прикладная математика и информатика»

Махачкала 2021

Методические указания для выполнения практических работ по дисциплине «Теория графов» для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02-«Прикладная математика и информатика», Махачкала, ДГТУ, 2021.- 36с.

Методические указания содержат основные требования и рекомендации для выполнения практических работ по дисциплине «Теория графов» для студентов направления 01.03.02- «Прикладная математика и информатика». Методические указания предназначены для студентов направления 01.03.02- «Прикладная математика и информатика» для всех форм и программ обучения. Методические указания содержат решения конкретных задач с помощью основных понятий и теорем теории графов.

Составители:

ст. преподаватель кафедры прикладной математики и информатики, к.э.н. Эседова Г.С.

Рецензенты:

Зав. кафедрой «ПОВТ и АС» ДГТУ, к.э.н., доцент

Т.Г.Айгумов Зав. лаб. «ИТвЭ» ФГБУН ИПГ ДНЦ РАН д.т.н. проф.

Д.Н. Кобзаренко

Печатается согласно постановлению
Ученого совета Дагестанского государственного технического университета
«_______»__________________ 2021г.

Содержание

Лабораторная работа №1

«Основные понятия»

Объектом исследований теории графов является «граф», который определяется следующим образом.

Определение. <u>Графом</u> называется совокупность точек (объектов) и соединяющих их линий (связей). Точки графа при этом называются его <u>вершинами</u>, а связывающие их линии – **<u>рёбрами</u>.**

Пусть в графе имеется N вершин p_n (n=1, 2,…,N) и M рёбер u_m (m= 1,2,…,M). Тогда, подразумевая под P и U множества всех вершин $P=(p_n)$и рёбер $U=(u_m)$, графом называют совокупность этих двух множеств. В этом случае он обозначается символом $\Gamma(P,U)$.

Если для рёбер графа существенно положение соединяемых ими вершин, то он называется ориентированным. В противном случае – **неориентированным**. У **ориентированного** графа, т.е. орграфа или направленного графа, рёбра имеют начало и конец, будем также называть такие рёбра **дугами**.

Рёбра ориентированного графа отмечают двумя буквами, обозначающими точки начала и конца. Аналогичная символика используется, как известно, в векторном исчислении.

Конечный граф. В случае, когда числа вершин N и рёбер M конечны, граф называется конечным.

Смежные вершины и ребра. <u>Смежными</u> называют 2 вершины соеединённые рёбрами, и рёбра, имеющие хотя бы одну общую вершину.

Степень или валентность вершины, правильный или однородный граф. <u>Степенью</u> или <u>валентностью</u> вершины p_n именуют число рёбер, соединяемых ею. Её обозначают символом $\rho(p_n)$. <u>Правильным</u> или <u>однородным</u> r-валентным графом является граф, все вершины которого имеют одинаковую степень, $\rho(p_n)=r$ для всех n.

Правильный нулевой или несвязный граф. <u>Нулевым</u> или <u>несвязным</u> он называется тогда, когда множество U пусто, т.е. когда в графе нет рёбер. В этом случае он состоит из одних вершин $\Gamma(P,\varnothing)=P$.

Полный граф. <u>Полный</u> граф – это граф, каждая пара различных вершин которого связана лишь одним ребром.

Петля, множественные рёбра, простой граф. <u>Петля</u> – линия, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине. **<u>Множественные рёбра</u>** – совокупность нескольких линий, соединяющих одни и те же вершины. **<u>Простым</u>** называется граф, не имеющий петель и множественных рёбер.

Пояснение основных понятий на примере. Для пояснения введённых понятий рассмотрим граф, изображённый на рис. 1 [2].

Обозначим его $\Gamma(P,U)$, полагая $P = (p_n)$ (n= 1,2,…,8) и $U = (u_m)$ (m= 1,2,….,8). Очевидно, в нём $N = 8$ и M=8.

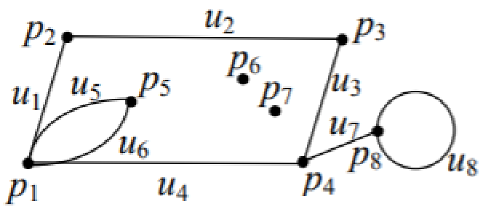


Рис. 1

Примерами смежных вершин здесь могут служить пары точек (p_1 , p_2) и (p_2 , p_3), соединённых рёбрами u_1 и u_2 соответствует. **Смежными** являются и пары рёбер (u_1, u_2) и (u_2, u_3), имеющих общие вершины: p_2 для первой пары и p_3 для второй. Легко подсчитать степени всех вершин графа: $\rho(p1) = 4, \rho(p2) = \rho(p3) = \rho(p5) = 2$, $\rho(p4) = \rho(p8) = 3$, $\rho(p6) = \rho(p7) = 0$..

$\Gamma(P,U)$ содержит три **нулевые** графа.

Г1(р6,∅)=р6 есть точка р6. Г2(р7,∅)=р7 есть точка р7. Г3((р6,р7),∅)=(р6,р7) есть совокупность этих двух точек.

В $\Gamma(P,U)$ имеются **полные** графы, например граф $\Gamma_4(P_1,U_1)$, где $P_1=(p_1,p_4)$, $U_1=(u_4)$. Есть **петля** $\Gamma_5(p_8, u_8)$, **множественное** (двойное) ребро $\Gamma_6((p_1,p_5),(u_5,u_6))$.

Графы можно представить графически или геометрически и аналитически. Граф, изображённый на рис. 1, можно записать $\Gamma(P,U)$ в виде перечня подмножеств $T(p_n)$, где n= 1, 2,…,8:

$T(p_1)=(p_2, p_4, p_5, p_5)$; $T(p_2)=(p_1, p_3)$;

$T(p_3)=(p_2, p_4)$; $T(p_4)=(p_1, p_3, p_8)$;

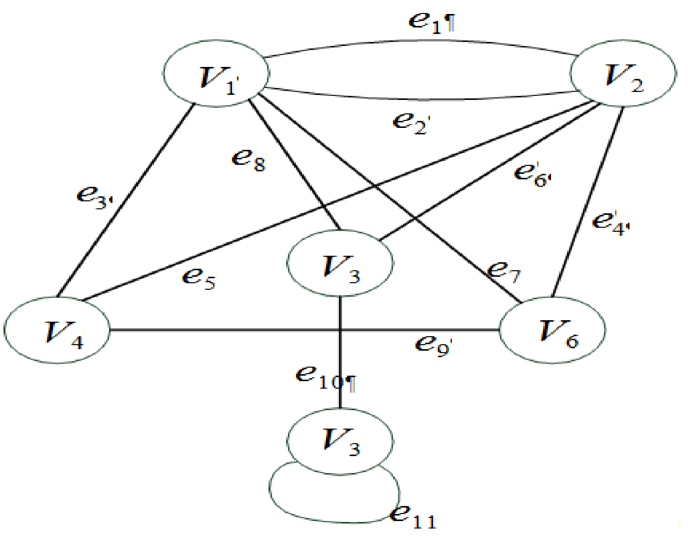
$T(p_5)=(p_1, p_1)$; $T(p_6)=T(p_7)=\square$;

$T(p_8)=(p_4, p_8)$.

Задания для самостоятельного выполнения

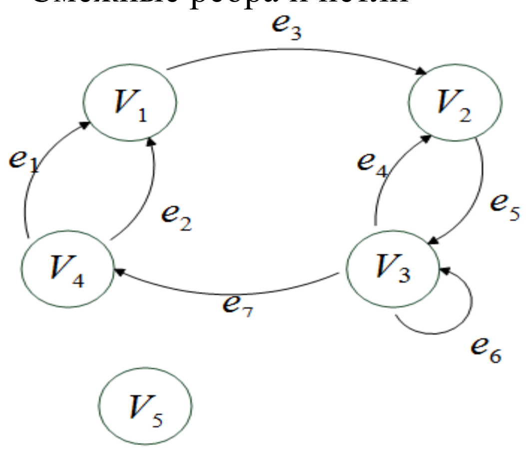
А) для данного графа укажите:

1. Пары смежных вершин.
2. Наличие петель.
3. Пары смежных дуг.
4. Количество вершин нечетной степени.
5. Множественные ребра
6. Смежные ребра и петли



В) Для ориентированного графа укажите:

1. Пары смежных вершин.
2. Наличие петель.
3. Пары смежных дуг.
4. Количество вершин нечетной степени.
5. Множественные ребра
6. Смежные ребра и петли



Контрольные вопросы:

1. Что такое петля?
2. Дайте понятие смежности ребер и дуг?
3. Какие вершины являются четными, нечетными?
4. Какие графы называют ориентированными и неориентированными?
5. Дайте множественных ребер?
6. Какие графы называются полными?
7. Какие графы являются простыми?

Лабораторная работа №2

«Матрицы инцидентности. Понятия смежности и инцидентности».

Понятия смежности и инцидентности. Если вершина p_n является концом ребра u_m (у ребра 2 конца), то говорят, что они (ребро и вершина) инцидентны. В то время как смежность представляет собой отношение между однородными объектами (вершинами или рёбрами или дугами), инцидентность – это отношение между разнородными объектами (вершинами и рёбрами, или вершинами и дугами). При рассмотрении орграфов различают положительную инцидентность (дуга исходит из вершины) и отрицательную инцидентность (дуга заходит в вершину).

Назовём матрицей инцидентности таблицу А, состоящую из N строк (вершины) и M столбцов (рёбра или дуги), в которой:

1) для неориентированного графа

$a_{nm} = 1$, если вершина p_n инцидентна ребру u_m; $a_{nm} = 0$, если вершина p_n не инцидентна ребру u_m;

2) для орграфа

$a_{nm} = 1$, если вершина p_n является началом дуги u_m; $a_{nm} = 0$, если вершина p_n не инцидентна дуге u_m;
$a_{nm} = -1$, если вершина p_n является концом дуги u_m.

Так как ребро (дуга) может соединять одну или две конкретные точки графа, то каждый столбец матрицы инцидентности может содержать одну или две 1 (одну 1, или одну 1 и одну –1). Очевидно, если в m-м столбце имеется одна единица, то u_m является петлёй, если же имеются одинаковые столбцы, то их число определяет кратность множественного ребра. Из определения матрицы инцидентности следует, что она учитывает отдельные точки графа нулевыми строками. В строках может быть любое количество единиц или может вообще их не быть.

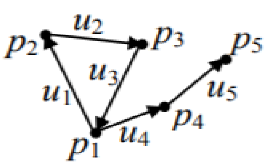
Примеры матриц инцидентности для неориентированного графа и орграфа. Пусть $Г(P,U)$ имеет вид, изображённый на рис. 1. Матрица инцидентности этого графа имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} в \\ е \\ р \\ ш \\ и \\ н \\ ы \end{matrix}$$

$$\text{р ё б р а}$$

Пусть, например, $Г(P,U)$ имеет вид, изображённый на рисунке.

Рядом изображена матрица инцидентности этого орграфа



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

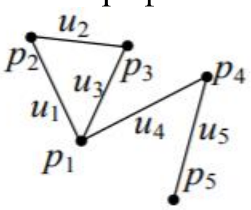
Существуют и другие аналитические способы задания графа, например, через матрицу смежности. Этот способ мы рассмотрим в конце лекции.

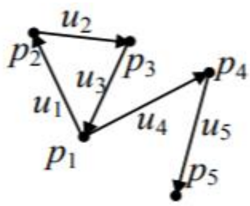
Геометрический способ изображения графа и его восприятие весьма субъективны и в этом отношении изложенные два метода аналитического задания графов абсолютно безупречны: они позволяют легко определить эквивалентные графы.

Матрица смежности. Матрицей смежности вершин графа Г с N вершинами называется матрица A равная $A=(a_{ij})_{N\text{x}N}$, в которой элемент a_{ij} равен числу дуг (рёбер), идущих из p_i в p_j (соединяющих p_i и p_j).

При установлении изоморфизма двух графов по матрицам смежности путём изменения нумерации вершин одного графа надо учитывать, что при этом надо менять не только строки, но и одновременно соответствующие столбцы. Поэтому, по-видимому, непосредственно по матрицам смежности установить изоморфизм графов невозможно.

Задача 1. Построить матрицы смежности для неориентированного и ориентированного графов



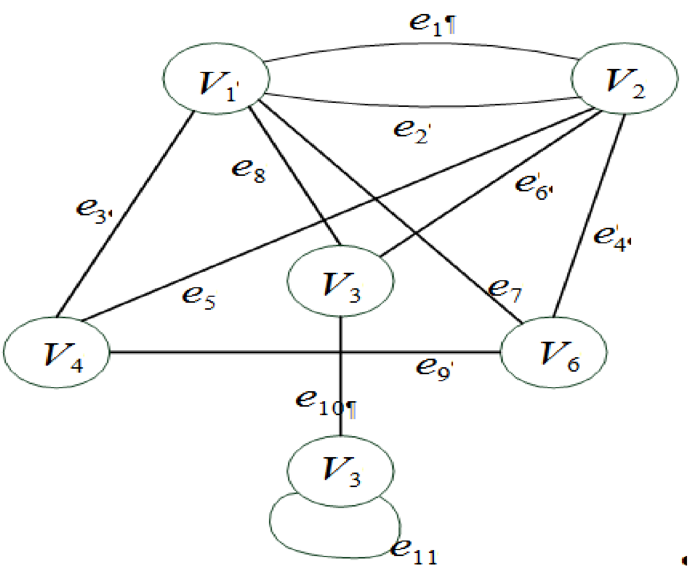


Ответ:

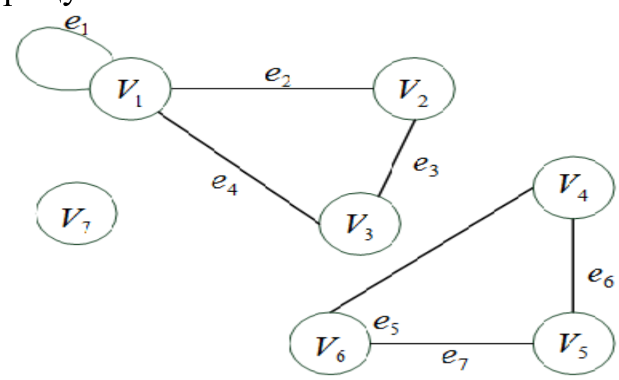
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задания для самостоятельного выполнения

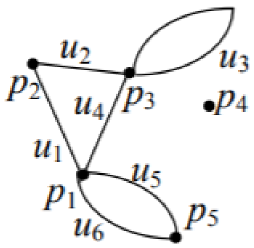
2.1. для данного графа постройте матрицу смежности и матрицу инцидентности:



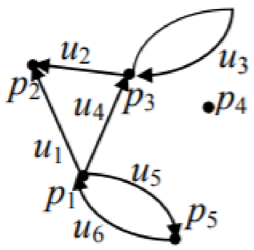
2.2. Для ориентированного графа постройте матрицу инцидентности и матрицу смежности:



2.3. Построить матрицу инцидентности для неориентированного графа:



2.4 Построить матрицу инцидентности для ориентированного графа



2.5 Восстановить геометрическое представление неориентированного графа по матрице инцидентности:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \end{array}$$

2.6 Восстановить геометрическое представление ориентированного графа по матрице инцидентности:

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{matrix} \end{array}$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие матрице инцидентности
2. Дайте понятие матрице смежности
3. Дайте понятие отрицательной инцидентности
4. Дайте понятие положительной инцидентности

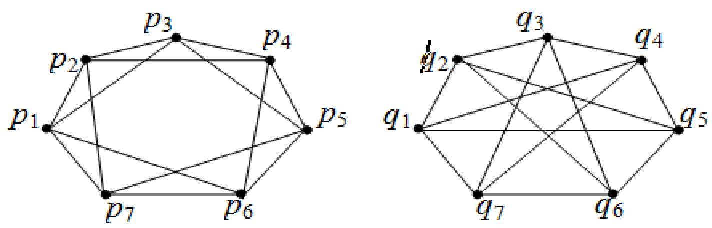
Лабораторная работа №3
«Эквивалентные или изоморфные графы».

2 графа считаются эквивалентными или изоморфными, если, во-первых, у них одинаковые числа вершин и рёбер (дуг), а во-вторых, соответствующие, т.е. имеющие одинаковые номера рёбра (дуги) соединяют соответствующие вершины.

Способ доказательства изоморфизма двух графов с помощью матрицы инцидентности. Чтобы показать, что 2 графа изоморфны, используя матрицы инцидентности, надо, если матрицы не совпадают, перенумеровать вершины и рёбра одного графа, чтобы соответствующая матрица инцидентности стала совпадать с матрицей другого графа. То есть если после перестановки рёбер и столбцов 1-й матрицы она совпадает с другой, то соответствующие графы будут изоморфны.

Принцип изоморфизма. Для того, чтобы показать, что 2 графа изоморфны, изоморфизм из одного в другой должен быть найден. Для того, чтобы показать, что 2 графа неизоморфны, должны быть найдены такие свойства графа, которыми обладает один граф, но не обладает другой.

Пример 3.1: Для двух неориентированных графов, представленных геометрически, показать их изоморфизм, задав соответствующую нумерацию вершин:



Решение. Проверим сначала, что число рёбер совпадает. Причём совпадение должно быть не только по сумме, но и по количеству рёбер у каждой пары вершин сравниваемых графов. То, что число рёбер совпадает, очевидно.

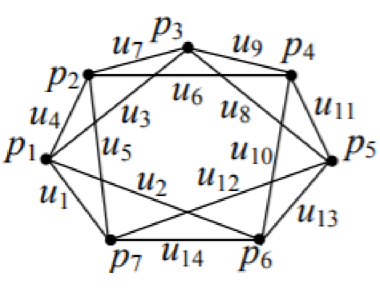
Число рёбер 1-го графа $=\frac{1}{2}\sum \rho_i = \frac{1}{2}(4+4+4+4+4+4+4)=14$.

Число рёбер 2-го графа $=\frac{1}{2}\sum \rho_i = \frac{1}{2}(4+4+4+4+4+4+4)=14$.

Методом подбора находим новую нумерацию вершин 2-го графа, соответствующую вершинам 1-го графа. В качестве p_1 можем взять любую из точек q_i. Пусть $p_1 = q_1$. В качестве p_2 пробуем взять q_2. Так как в первом графе p_1 и p_2 соединены с p_7, а на втором с q_5, то $q_5 = p_7$. Рассуждая подобным образом, приходим к противоречию. Поэтому в качестве p_2 нельзя брать q_2. В конце концов находим, что в качестве p_2 можно взять q_4.

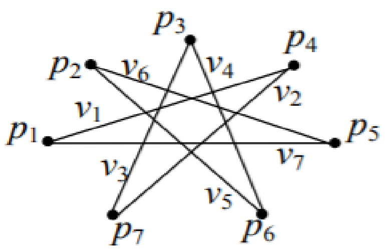
В этом случае соответствие остальных вершин p_i и q_j находится, что показано на рисунке. Кстати, возможен и другой вариант, когда в качестве p_2 берётся q_5. Учитывая, что в качестве p_1 можно было взять 7 вариантов точек, получаем 2x7=14 вариантов перенумерации вершин 2-го графа, показывающих изоморфизм двух графов.

Решение. Изобразим на первом графе рёбра и получим матрицу инцидентности



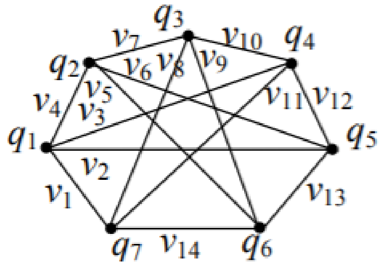
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{array}
\end{array}
$$

Изобразим соответствующий граф-дополнение и получим матрицу инцидентности для него:



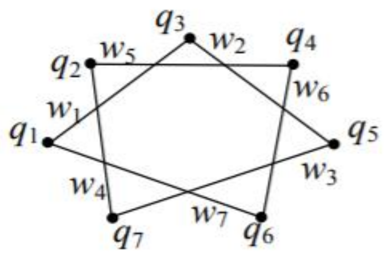
$$A^{доп} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{matrix}$$

Изобразим на втором графе рёбра и получим матрицу инцидентности



$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{matrix}$$

Изобразим соответствующий граф-дополнение и получим матрицуинцидентности для него:

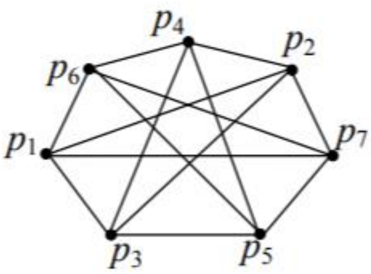


$$B^{доп} = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \end{matrix}$$

Найдём порядок перестановки строк, который переводит эту матрицу $B^{доп}$ в матрицу $B_1^{доп}$, совпадающую с $A^{доп}$. Получили следующее соответствие вершин: $p_1 \to q_1$, $p_2 \to q_4$, $p_3 \to q_7$, $p_4 \to q_3$, $p_5 \to q_6$, $p_6 \to q_2$ и $p_7 \to q_5$.

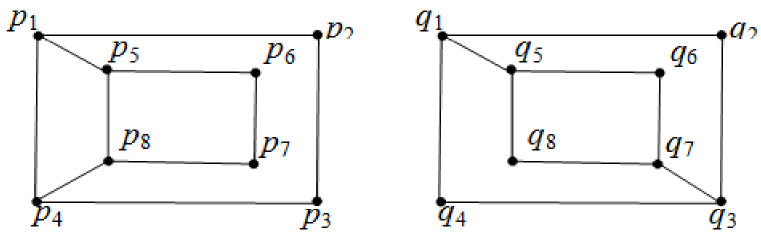
$$B_1^{доп} = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ q_1 \\ q_4 \\ q_7 \\ q_3 \\ q_6 \\ q_2 \\ q_5 \end{matrix}$$

Ответ:

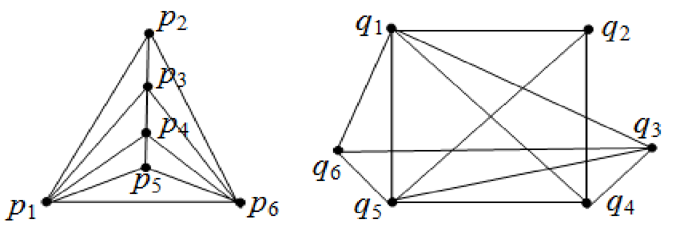


Задания для самостоятельного выполнения:

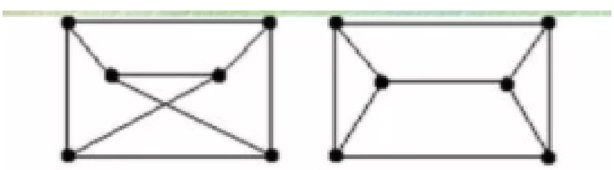
1. Показать, что два неориентированных графа неизоморфны



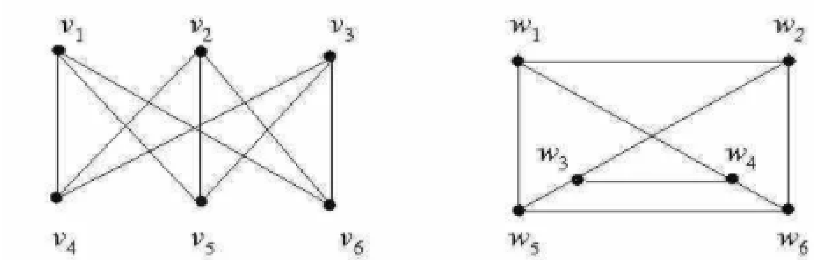
2. для двух неориентированных графов, представленных геометрически, показать их изоморфизм:



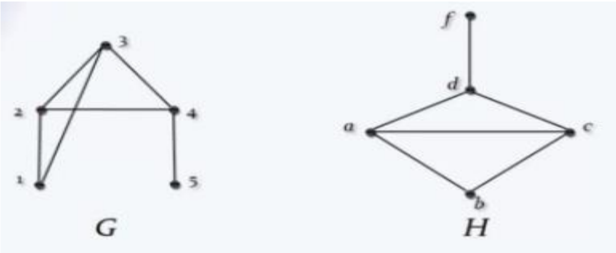
3. Показать, что два неориентированных графа неизоморфны :



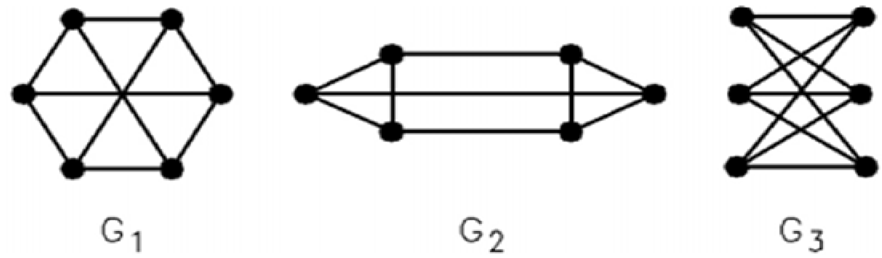
4. Показать, что графы изоморфны:



5. Показать, что графы изоморфны:



6. Какие из графов изоморфны:



7. К Какие из графов изоморфны:

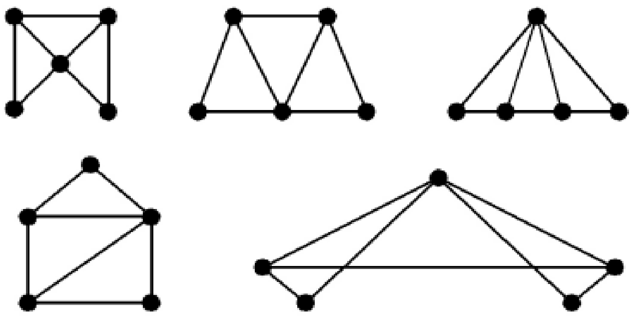


Рис.9.

8. Покажите, что два графа неизоморфны:

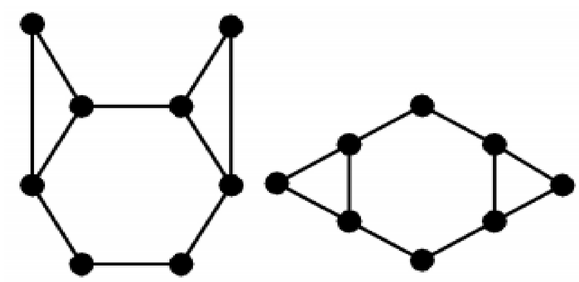
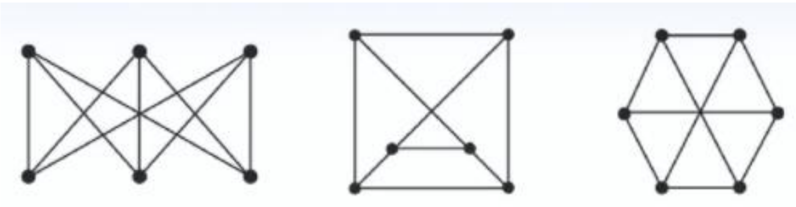


Рис.5.

9. Изоморфны ли графы?

10. Изоморфны ли графы:



Контрольные вопросы:

1. Способ доказательства изоморфизма двух графов с помощью матрицы инцидентности?
2. Дайте понятие изоморфизма?
3. Что такое эквивалентные графы?
4. Принцип изоморфизма?

Лабораторная работа №4
«Подграфы»

Граф G’=(V’,E’) называется *подграфом* графа G=(V,E), если V’V , а E’E. Всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер (при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей ребра).

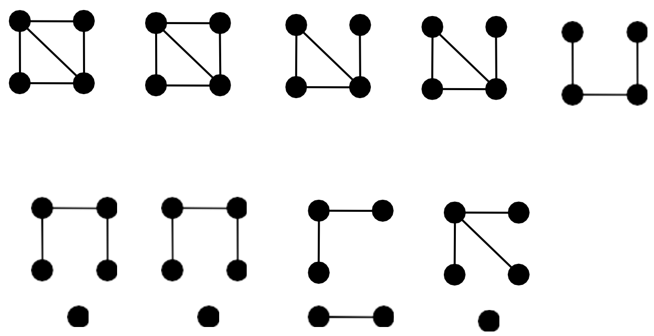
Подграф G’ графа G называется *остовным,* если V’=V. Остовный подграф получается удалением из графа некоторых ребер, вершины же остаются в неприкосновенности.

Порожденный подграф получается из графа удалением некоторых вершин. Все ребра, которые были в графе между оставшимися вершинами, должны сохраниться в подграфе. Говорят, что подграф порождается оставшимися вершинами.

Допустим, имеется граф G с множеством вершин Vi. Удалив вершину i, получаем порожденный подграф G_i. Таким образом, получим n порожденных подграфов G_1, G_2 , Gn, каждый с n-1 вершиной. Допустим, что эти n графов нам известны как абстрактные графы, то есть номера, которые имели вершины этих подграфов в графе , не указаны («стерты»). Спрашивается, можно ли по этим абстрактным графам восстановить граф G (тоже как абстрактный граф)? Очевидно, при n=2 нельзя. Гипотеза, высказанная еще в 1945 г., утверждает, что при n>2 любой граф можно восстановить, то есть набор непомеченных графов G_1, G_2 , Gn, определяет граф G с точностью до изоморфизма. Это одна из наиболее известных нерешенных проблем теории графов – проблема восстановления.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Восстановите граф по его
   а) порожденным подграфам, полученным удалением однойвершины:



   б) остовным подграфам, полученным удалением одного ребра

2.
   Граф имеет вершин и ребер. Сколько у него различных?
   а) остовных подграфов?
   б) порожденных подграфов?

3.

1) Представьте граф C_6 как объединение трех графов с множествами вершин $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{3,4,5,6\}$.
2) Верно ли, что любой граф с 6 вершинами можно представить как объединение трех графов с такими множествами вершин?
3) Верно ли, что любой граф с 6 вершинами можно представить как объединение трех графов с множествами вершин $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{5,6,1\}$?

4.

Какие из следующих высказываний верны?
1) Если H – порожденный подграф графа G, то $\overline{H}$ – порожденный подграф графа $\overline{G}$.
2) Если H – порожденный подграф графа G, то $\overline{G}$ – порожденный подграф графа $\overline{H}$.
3) Если H – остовный подграф графа G, то $\overline{H}$ – остовный подграф графа $\overline{G}$.
4) Если H – остовный подграф графа G, то $\overline{G}$ – остовный подграф графа $\overline{H}$.

5.

Какие из следующих утверждений верны для любых графов G и H?
1) Граф $G \cap H$ является подграфом графа G.
2) Граф $G \cap H$ – порожденный подграф графа G.
3) Если множества вершин графов G и H совпадают, то $G \cap H$ – остовный подграф графа G.
4) Если H – подграф графа G, то $G \cap H = H$.

6.

Какие из следующих утверждений верны для любых графов G и H?
1) Граф G является подграфом графа $G \cup H$.
2) Граф G – остовный подграф графа $G \cup H$.
3) Если множества вершин графов G и H не пересекаются, то H – порожденный подграф графа $G \cup H$.
4) Если H – подграф графа G, то $G \cup H = G$.

7.

Какие из следующих равенств выполняются для любых графов G_1 и G_2?
1) $G_1 \cap (G_1 \cup G_2) = G_1$.
2) $G_1 \cup (G_1 \cap G_2) = G_1$.
3) $\overline{G_1 \cup G_2} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2}$.

8.

Граф G имеет множество вершин $\{1,2,\dots,n\}$. Число ребер в подграфе, полученном удалением вершины i, равно m_i, $i = 1,2,\dots,n$. Сколько ребер в графе G?

9.

Граф имеет n вершин и m ребер. Сколько у него различных
а) остовных подграфов?
б) порожденных подграфов?

Контрольные вопросы:

1. Какой граф называется подграфом?
2. Какой граф называется остовной?
3. Какой граф называется порожденный?

Лабораторная работа №5.
«Элементы графа. Маршрут графа. Цепь. Цикл. Путь и контур. Связный граф. Полный граф»

Элементы графа: висячая или концевая и изолированная вершины. Висячее ребро. Степенью или валентностью вершины p_n графа Г, обозначаемой через d_n , называют число рёбер (дуг), инцидентных этой вершине. Вершина степени 1 называется висячей или концевой. Ребро, инцидентное висячей вершине, называется висячим. Вершина степени называется изолированной.

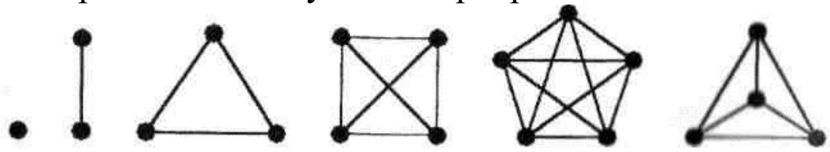
Маршрут графа. Цепь. Цикл. Простой, сложный и элементарный циклы. Маршрут в графе Г представляет собой конечную чередующуюся последовательность вершин и рёбер. Маршрут называется открытым, если его концевые вершины различны, в противном случае он называется замкнутым. Маршрут называется цепью, если все его рёбра различны. Цепь называется элементарной, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цепи встречается только один раз. Замкнутый маршрут образует цикл. Цикл может быть простым, если он содержит отличные друг от друга рёбра, сложным – в противном случае, элементарным, если при обходе по какому-нибудь направлению каждая вершина цикла встречается только один раз. Очевидно, нет смысла вводить для цепи термин “простая цепь”, если термин “простой”, как в определении графа и цикла, означает отсутствие повторяющихся рёбер.

Путь и контур. Длина пути и контура. Длина петли.

Последовательность дуг, при которой конец одной дуги является началом другой, называется путём. Если начальная и конечная точки пути совпадают, образуется контур. Длиной пути (или контура) называют число дуг, которые его образуют. Петля – контур единичной длины. Будем также под длиной пути от одной вершины до другой понимать количество рёбер, входящих в соответствующий маршрут. То есть будем применять термин “длина пути” не только к орграфам. Во всех случаях для орграфови для неориентированных графов дуги и рёбра будем считать столько раз, сколько раз они входят в путь или маршрут.

Связный граф. Граф называется связным, если любая пара вершин соединена маршрутом. Несвязный граф состоит из нескольких отдельно связных графов.

Полный граф. Граф называется полным, если любая пара его вершин соединена ровно одной дугой или ребром.



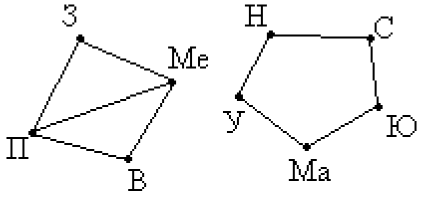
Число рёбер полного графа с N вершинами. Если полный граф Γ имеет N вершин, то он обозначится через K_N. Легко видеть, что K_N имеет $N(N–1)$ / 2 рёбер.

Простым графом называют граф, который не имеет петель или кратных рёбер. **Является ли полный граф простым и однородным графом?** Полный граф – это простой граф. Он однозначно задаётся числом своих вершин. Полный граф с N вершинами является однородным степени (N–1), так как из каждой его вершины выходит (N–1) рёбер, ведущих к каждой из остальных (N–1) вершин.

Задания для самостоятельного выполнения

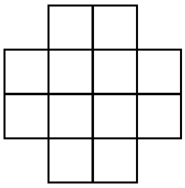
Задача 1. Между девятью планетами солнечной системы установлено космическое сообщение. Рейсовые ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий; Плутон – Венера; Земля – Плутон; Плутон – Меркурий; Меркурий – Вене; Уран – Нептун; Нептун – Сатурн; Сатурн – Юпитер; Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли долететь на рейсовых ракетах с Земли до Марса ?

Решение: Нарисуем схему условия: планеты изобразим точками, а маршруты ракет – линиями.



Теперь сразу видно, что долететь с Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Доска имеет форму двойного креста, который получается, если из квадрата 4х4 убрать угловые клетки.



Можно ли обойти ее ходом шахматного коня и вернуться на исходную клетку, побывав на всех клетках ровно по одному разу?

Задача 3. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

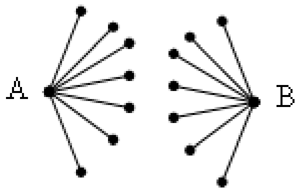
Связность графа

Есть еще одно важное понятие, относящееся к графам – понятие связности.

Граф называется *связным,* если из любые две его вершины можно соединить *путем,* т.е. непрерывной последовательностью ребер. Существует целый ряд задач, решение которых основано на понятии связности графа.

Задача 4. В стране Семерка 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города модно добраться в любой другой.

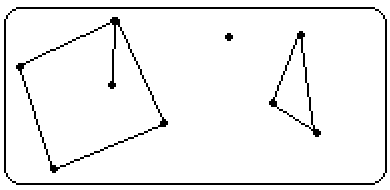
Доказательство: Рассмотрим два произвольных А и В города и допустим, что между ними нет пути. Каждый из них соединен дорогами не менее, чем с семью другими, причем нет такого города, который был бы соединен с обоими рассматриваемыми городами (в противном случае существовал бы путь из А в В). Нарисуем часть графа, соответствующую этим городам:



Теперь явно видно, что мы получили не менее различных 16 городов, что противоречит условию задачи. Значит утверждение доказано от противного.

Если принять во внимание предыдущее определение, то утверждение задачи можно переформулировать и по-другому: “Доказать, что граф дорог страны Семерка связен.”

Теперь вы знаете, как выглядит связный граф. Несвязный граф имеет вид нескольких “кусков”, каждый из которых – либо отдельная вершина без ребер, либо связный граф. Пример несвязного графа вы видите на рисунке:

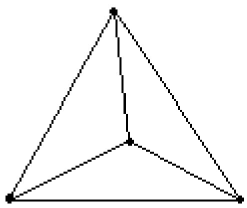


Каждый такой отдельный кусок называется *компонентой связности графа.* Каждая компонента связности представляет собой связный граф и для нее выполняются все утверждения, которые мы доказали для связных графов. Рассмотрим пример задачи, в которой используется компонента связности:

Графы Эйлера

Задачи, в которых требуется нарисовать какую-либо фигуру не отрывая, карандаш от бумаги и проводя каждую линию только один раз, называются Эйлеровыми графами.

Задача 5. Можно ли нарисовать изображенный на рисунке граф не отрывая карандаш от бумаги и проводя каждое ребро ровно один раз ?



Решение. Если мы будем рисовать граф так, как сказано в условии, то в каждую вершину, кроме начальной и конечной, мы войдем столько же раз, сколько выйдем из нее. То есть все вершины графа, кроме двух должны быть четными. В нашем же графе имеется три нечетные вершины, поэтому его нельзя нарисовать указанным в условии способом.

Сейчас мы доказали теорему об Эйлеровых графах:

***Теорема**: Эйлеров граф должен иметь не более двух нечетных вершин.*

Задача 6. На квадратной доске 3х3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

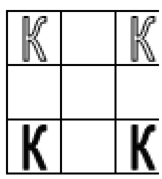


Рис. 1

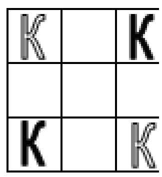


Рис. 2

Задача 7. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?

Задача 8. Алия решила маме на день рождения подарить букет цветов (розы, тюльпаны или гвоздики) и поставить их или в вазу или в кувшин. Сколькими способами это можно сделать.

Решение. Отметим точками цветы **(РТГВК)** **(вершины графа)**А связи между ними -линиями между точками **(рёбра графа) 6**

Задача 9. Ранним утром Миша Маша, Асем обменялись приветствиями каждый с каждым. Сколько всего было приветствий. Решите задачу с помощью графа. Нарисуй граф в рабочей тетради.

Задача 10. Шесть футбольных команд должны сыграть матчи, каждая с каждой. Уже сыграли матчи. А с В, Г,Е Г с А,Д,Е Б с В,Д,Е Д с Б,Г,Е В с А,Б Е с А,Б,Г,Д Сколько матчей сыграно и сколько осталось сыграть.

Задача 11. Мадии утром собрался в школу, но по пути он должен зайти в аптеку за лекарствами. Сколькими способами он может это сделать.

Задача12. Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Контрольные вопросы:

Дайте определения:

1. Висячая или концевая и изолированная вершины? Висячее ребро?
2. Маршрут графа. Цепь?
3. Цикл. Простой, сложный и элементарный циклы?
4. Путь и контур?
5. Длина пути и контура?
6. Длина петли.
7. Связный граф?
8. Полный граф?

Лабораторная работа №6
«Турнир. Плоские и планарные графы»

Турнир. Полный ориентированный граф называется <u>турниром</u>. Этот термин получил своё название от соревнований по круговой системе, графическое представление которых имеет структуру полного ориентированного графа. В турнирах по круговой системе играют несколько команд, каждая со всеми остальными по одному разу. Игра по правилам не может закончиться вничью. В представлении турнира по круговой системе ориентированным графом, командам соответствуют вершины, и дуга (p_1, p_2) присутствует в графе, если соответствующая p_1 команда победила команду, представленную вершиной p_2. Очевидно, что в таком ориентированном графе нет параллельных дуг и петель и между каждыми двумя вершинами имеется точно одна дуга. Таким образом, граф является полным, а следовательно, и турниром.

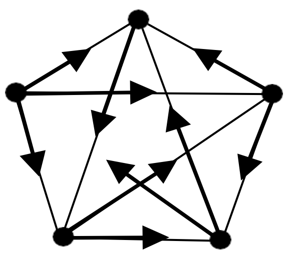


Рис. 2

Пример турнира приведён на рис. 2. Участвующие в турнире команды можно ранжировать в соответствии с количеством очков. <u>Количество очков</u> команды соответствует числу побеждённых ею противников.

Введём определение последовательности очков турнира. Последовательностью очков турнира на N вершинах называется последовательность (S_1 , S_2 , … , S_N), в которой каждое S_n – число дуг, исходящих из n-й вершины турнира.

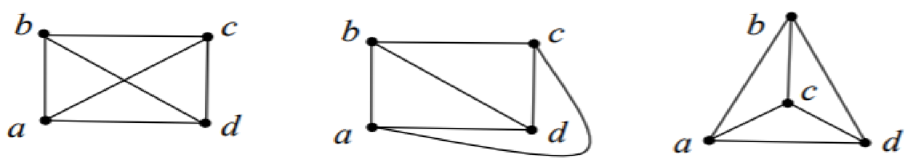
Плоские и планарные графы. Граф, который можно начертить на плоскости так, чтобы рёбра его пересекались только в его вершинах, называется <u>планарным графом</u>. Его изображение на плоскости без пересечения рёбер назовём <u>плоским графом</u>. Граф, который не является планарным, называется <u>непланарным</u>.

Заметим, что в общем случае рёбра графа могут пересекаться между собой, причём точки пересечения не обязательно являются вершинами графа.

Интегральная микросхема состоит из слоёв миниатюрных микросхем, впечатанных в пластину. В такой ситуации крайне важно исключить пересечение проводов в местах, не предназначенных для соединений. Если изобразить места указанных соединений вершинами графа, то возникнет задача построения графа с непересекающимися рёбрами. Важно отметить, что нас интересует <u>возможность</u> построения графа с непересекающимися рёбрами.

Можно также сказать, что граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным. Например, все три изоморфных графа $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$ на следующем рисунке планарные, но только $Г_2$, и $Г_3$ – плоские.

$Г_1$ $Г_2$ $Г_3$



Планарный граф на рис. 3а можно изобразить в виде изоморфных плоских графов (рис. 3б и рис. 3в): Рис. 3а Рис. 3б Рис. 3в

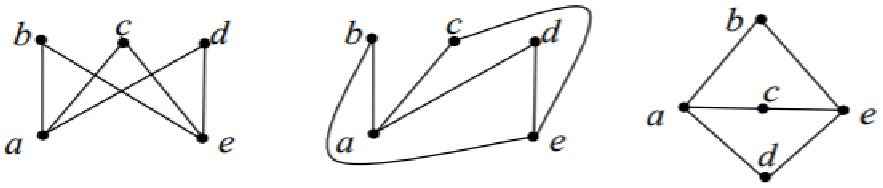


Рис. 3а Рис. 3б Рис. 3в

Формула Эйлера и плоские графы

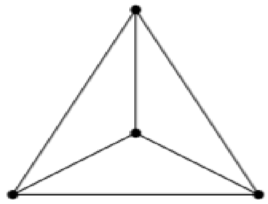
Напомним, что фигура называется выпуклой, если вместе с любой парой своих точек она целиком содержит отрезок, их соединяющий. Например, квадрат — выпуклая фигура, а пятиконечная звезда — нет.

Теорема 1. (Леонард Эйлер, 1752) Пусть v — число вершин выпуклого многогранника, e — число его рёбер, f — число его граней. Тогда справедлива формула $v - e + f = 2$. Данное соотношение называется формулой Эйлера.

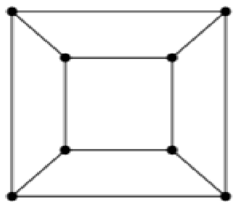
Изображая многогранники на чертежах, мы рисуем графы. Граф состоит из точек (вершин) и линий (рёбер); рёбра соединяют некоторые пары вершин. Три рисунка, приведённые выше, дают примеры графов.

1 Граф называется плоским, если его рёбра не пересекаются (в точках, отличных от вершин). На трёх рисунках выше изображены плоские графы.

Оказывается, что любой выпуклый многогранник можно изобразить в виде плоского графа. Мы не будем гнаться за строгостью формулировок, а просто приведём примеры, из которых станет ясно, что имеется в виду:



Тетраэдр



Куб

(Идея такова: надули многогранник в шарик, вырезали одну грань и раскатали получившийся шарик с дыркой по плоскости.) Плоский граф разбивает плоскость на части, которые называются гранями. При этом гранью является и неограниченная часть плоскости (или, что то же самое, «внешний контур» плоского графа, который служит изображением многогранника). Как видим, для плоских графов применяется та же терминология, что и для многогранников (вершины, рёбра, грани), и точно так же справедлива формула Эйлера.

Теорема 2. Если связный плоский граф с v вершинами и e рёбрами разбивает плоскость на f граней, то $v - e + f = 2$. Задач

Задания для самостоятельного выполнения

1. Нарисуйте плоский граф для: а) четырёхугольной пирамиды; б) октаэдра.
2. В стране 30 озёр, соединённых между собой 40 каналами так, что от каждого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в этой стране островов?
3. Внутри квадрата отметили n точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько провели отрезков и сколько получилось треугольников?
4. В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей; никакие три из них не пересекаются в одной точке. Получился граф, вершинами которого служат вершины данного многоугольника и внутренние точки пересечения диагоналей, а рёбрами — стороны многоугольника и соответствующие отрезки диагоналей. а) Назовём вершины полученного графа внутренними, если они отличны от вершин

многоугольника; аналогично, назовём рёбра внутренними, если они отличны от сторон многоугольника. Докажите, что число внутренних рёбер равно сумме числа проведённых диагоналей и удвоенного числа внутренних вершин. б) Найдите число рёбер этого графа, если n-угольник оказался разбит на a треугольников и b четырёхугольников.

5. Семиугольник разбит на выпуклые пятиугольники и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина служит вершиной не менее чем двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников не меньше 13

6. Во вписанном 100-угольнике провели несколько диагоналей. Они разбили многоугольник на 200 частей: 30 пятиугольников, 70 четырёхугольников и 100 треугольников. Найдите число точек пересечения проведенных диагоналей внутри 100-угольника.

7. Какое наибольшее число клеток доски 9 × 9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?

8. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

9. В многограннике чёрные грани — правильные пятиугольники, а белые — правильные шестиугольники. В каждой вершине сходится по три грани. Сколько в этом многограннике чёрных граней?

10. На плоскости нарисован круг и три семейства прямых: в одном — 19 параллельных между собой прямых, в другом — 23 параллельных между собой прямых, в третьем — 36 параллельных между собой прямых. На какое наибольшее число частей прямые могут разбить круг?

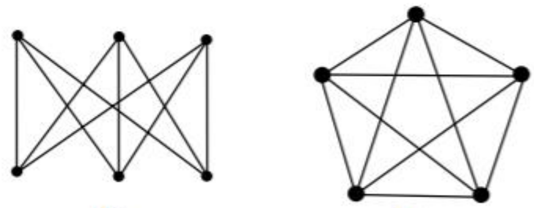
Контрольные вопросы:

1. Дайте определение Турнир?
2. Дайте определение Плоские и планарные графы?
3. Формула Эйлера и плоские графы?

Лабораторная работа №7
«Графы Куратовского. Формула Эйлера»

Графы Куратовского. Условия, при которых граф будет плоским

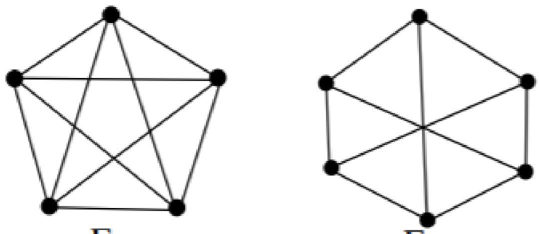
Граф, рассматриваемый в задаче о трёх домиках и колодцах, а также полный граф с пятью вершинами (см. рис. 2) позволяют определить целое семейство непланарных графов и играют особую роль в определении того, является ли данный граф планарным или нет. Эти два графа, изображённые на рис. 2, называются графами Куратовского. Критерий, характеризующий плоские графы, был предложен в 1930 г. польским математиком Куратовским. Чтобы сформулировать его, мы должны сначала объяснить, что мы понимаем под расширением и сжатием графа.



$Г_6$ $Г_5$

Рис. 2

Теорема Куратовского (без доказательства). Для того, чтобы граф был планарным, т.е., чтобы его можно было бы изобразить плоским графом, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал внутри себя никакого графа, который можно было бы сжать до графов Куратовского (т.е. до пятиугольного графа Г5 или шестиугольного графа Г6).



$Г_5$ $Г_6$

Рис. 4. Графы Куратовского

Формула Эйлера для многогранников

Грань плоского графа. В качестве характеристики плоского представления графа вводится понятие грани. Гранью в плоском представлении графа называется часть плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри других циклов. На рис. 5 имеем плоское представление графа с четырьмя гранями: (1,7,4,1), (1,2,3,1), (1,3,2,4,1), (2,6,5,4,2). Часть плоскости, ограниченная простым циклом (1,2,4,1), гранью не является, так как содержит внутри себя цикл (1,2,3,1).

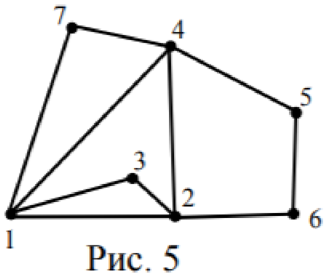


Рис. 5

Простой цикл, ограничивающий грань, назовём границей грани. Две грани будем называть соседними, если их границы имеют хотя бы одно общее ребро.

Бесконечная грань. В качестве грани можно рассматривать и часть плоскости, расположенную «вне» плоского представления графа; она Рис. 5 1 2 3 6 5 4 7 Г5 Г6 31 ограничена «изнутри» простым циклом и не содержит в себе других циклов. Эту часть плоскости называют «бесконечной» гранью. Всякое плоское представление графа либо не имеет бесконечной грани, либо имеет в точности одну бесконечную грань. В плоском представлении дерева и леса за грань принимают всю плоскость (рис. 6). Графы – дерево и лес – рассмотрим в будущем.

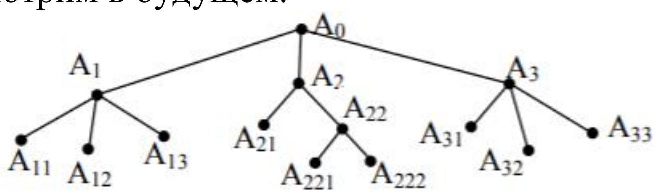
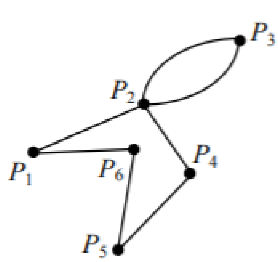


Рис. 6

Плоские графы образуют на плоскости многоугольные сети. Для плоских многогранников существует одно интересное соотношение, впервые доказанное Эйлером и известное под названием формулы Эйлера для многогранников. Она справедлива для всякого связного плоского графа. Обозначим через в, р, г соответственно число вершин, рёбер и граней такого графа Г. Теорема Эйлера утверждает, что всегда в – р + г = 2.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Для неориентированного графа



1)построить матрицу инцидентности;
2) указать степени вершин графа;

3) найти длину маршрута из вершины p2 в вершину p5 , составить маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p2 и вершину p5;

4) построить простой цикл, содержащий вершину p4 ;

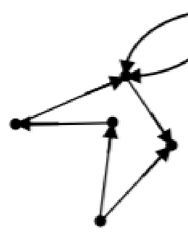
5) найти цикломатическое число графа $\gamma = M - N + 1$, равное увеличенной на 1 разности между числом рёбер и числом вершин графа;

6) определить вид заданного графа;

7) является ли граф эйлеровым, т.е. содержит ли цикл, содержащий все рёбра графа, причём каждое ребро в точности по одному разу?

8) существует ли эйлеров путь в графе, т.е. такой путь, когда все рёбра проходятся по одному разу, но без возвращения в исходную точку?

2. Для ориентированного графа:



1)обозначить вершины и ориентированные рёбра;

2) построить матрицу инцидентности;

3) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

3. Для неориентированного графа, заданного матрицей инцидентности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) восстановить геометрическое представление;

2) указать степени вершин графа;

3) найти длину пути из вершины p2 в вершину p5 , составить маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину p2 и вершину p5;

4) построить простой цикл, содержащий вершину p4;

5) найти цикломатическое число графа;

6) определить вид заданного графа.

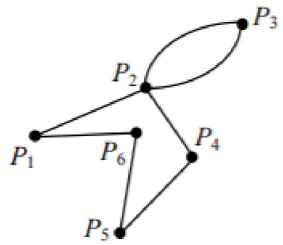
4. Для ориентированного графа, заданного матрицей инцидентности

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) восстановить геометрическое представление;

2) определить степень входа и степень выхода каждой вершины графа. Имеются ли здесь источники и стоки?

5. Для неориентированного графа:



Что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей:

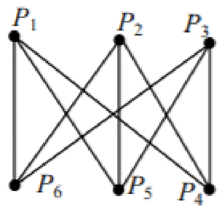
1) p4p1p2p3p6p2;

2) p1p2p3p2p4p2;

3) p1p2p3p4p5p6p1;

4) p2p4p3p2.

6. Для неориентированного графа

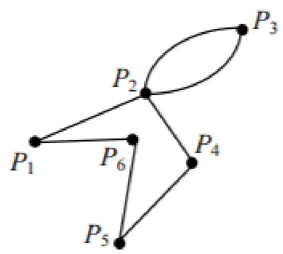


1) определить степени вершин и по ним число рёбер графа;

2) что из приведённого ниже является путём в графе? Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей.

А) p1p5p2p4p3p6; б) p1p5p2p5p3p4p2p6; в) p1p6p5p1p6p5p3; г) p6p5p3p4p5p1.

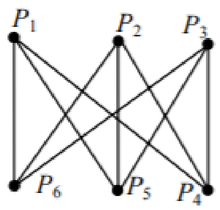
7. Для неориентированного графа:



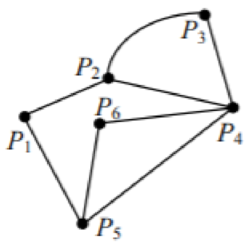
Что из приведённого ниже является циклом в графе? Которые из них являются простыми циклами?

1) p4p1p2p3p6p2p5p4; 2) p4p5p6p1p2p3p4; 3) p1p2p3p6p5p2p6p3p1; 4) p2p6p3p5p4p2p6.

8. Является ли следующий граф планарным?



2) Для неориентированного графа:



1) построить матрицу инцидентности;

2) указать степени вершин графа;

3) найти длину маршрута из вершины р2 в вершину р5 , составить P2 P4 P6 P5 P1 P3 P1 P2 P3 P6 P5 P4 P2 P4 P5 P1 P6 P3 36 маршруты длины 5, указать все цепи и элементарные цепи, соединяющие вершину р2 и вершину р5;

4) построить простой цикл, содержащий вершину р4;

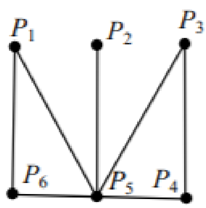
5) найти цикломатическое число графа γ = M − N +1, равное увеличенной на 1 разности между числом рёбер и числом вершин графа;

6) определить вид заданного графа;

7) является ли граф эйлеровым, т.е. содержит ли цикл, содержащий все рёбра графа, причём каждое ребро в точности по одному разу?

8) существует ли эйлеров путь в графе, т.е. такой путь, когда все рёбра проходятся по одному разу, но без возвращения в исходную точку?

10. Для неориентированного графа:



1) определить степени вершин и по ним число рёбер графа;

2) что из приведённого ниже является путём в графе?

Которые из них являются простыми путями? Приведите длину каждого из путей:

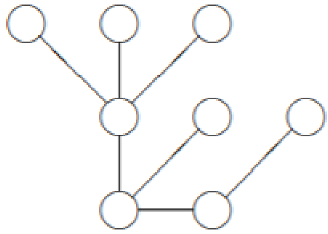
а) p1p5p2p4p3p6; б) p1p5p2p5p3p4p2p6; в) p1p6p5p1p6p5p3; г) p6p5p3p4p5p1.

Контрольные вопросы:

1. Теорема Куратовского?
2. Формула Эйлера для многогранников?
3. Дайте определение бесконечной грани?

Лабораторная работа №8
«Деревья. Лес. Бинарные деревья. Задача о соединении городов»

Определение. Граф G(V, E) называется деревом, если он является связным и не имеет циклов. Пример. Диаграмма дерева.



Определение. Граф G(V, E), все компоненты связности которого являются деревьями, называется лесом. Дерево обладает рядом свойств, которые сформулированы и доказаны в следующей теореме.

Теорема о шести эквивалентных утверждениях о дереве.

Следующие утверждения эквивалентны:

1) граф G(V, E) – дерево, то есть связный граф без циклов;

2) любые две вершины графа G(V, E) соединены единственной простой цепью;

3) граф G(V, E) связный, и любое ребро есть мост;

4) граф G(V, E) связный, и число его ребер на 1 меньше числа вершин;

5) граф G(V, E) не содержит циклов, и число его ребер на 1 меньше числа вершин;

6) граф G(V, E) не содержит циклов, но добавление к нему любого нового ребра приводит к образованию ровно одного простого цикла, проходящего через это ребро.

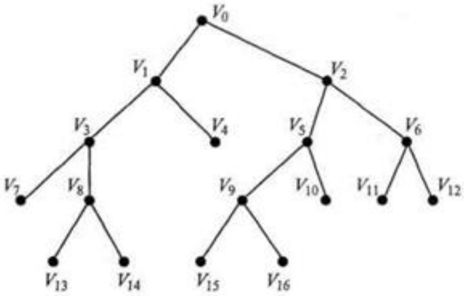
Корневое дерево — это ориентированное дерево, в котором можно выделить вершины трёх видов: корень, листья (другое их название: **терминальные вершины**) и остальные вершины (нетерминальные); причём должны выполняться два обязательных условия:

1. из листьев не выходит ни одна дуга; из других вершин может выходить сколько угодно дуг;
2. в корень не заходит ни одна дуга; во все остальные вершины заходит ровно по одной дуге.

Традиционно в математике и в родственных ей науках (в том числе и в теоретическом программировании) деревья «растут» вниз головой: это делается просто для удобства наращивания листьев в случае необходимости. Таким образом, на рисунках корень дерева оказывается самой верхней вершиной, а листья — самыми нижними.

Предок вершины v — это вершина, из которой исходит дуга, заходящая в вершину v. Потомок вершины v — это вершина, в которую заходит дуга, исходящая из вершины v. В этих терминах можно дать другие определения понятиям корень и лист: у корня нет предков, у листа нет потомков.

Бинарное дерево — это корневое дерево, каждая вершина которого имеет не более двух потомков. В таком случае иногда говорят о **левом** потомке и **правом** потомке для текущей вершины.



Строго бинарным деревом называется такой граф, у которого каждый узел, не являющийся листом, содержит два и только два поддерева – левое и правое.

Бинарное дерево уровня n называется **полным**, если каждый его узел уровня n является листом, а каждый узел уровня меньше, чем n, имеет непустое левое и правое поддеревья. Примером полного бинарного дерева служит таблица розыгрыша соревнования по олимпийской системе («плей-офф»). На рисунке 6 приведена таблица розыгрыша Кубка мира по футболу (корень V_0 – Бразилия).

Бинарные деревья применяются в информатике для поиска одного из двух возможных вариантов ответа. Например, при поиске данных, когда необходимо сравнить каждый элемент списка с образцом, и если значения совпадают, то процесс завершён, а если не совпадают, то поиск данных продолжается

Поскольку маршрут между двумя вершинами единственный, то, применяя это свойство к смежным вершинам, можно заключить, что любая ветвь является мостом. Действительно, при удалении ребра этот единственный маршрут прерывается. Тогда граф распадается на два подграфа. В одном из них остаётся корневая вершина, и этот граф G_1 тоже будет являться деревом. В другом $\overline{G_1}$ выделим вершину, инцидентную удалённому мосту. Тогда второй подграф также будет являться деревом.

(Критерий эйлеровости графа). Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степени всех его вершин – чётные числа

Задача о соединении городов

Определение. Остовным деревом (остовом) связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Несвязный граф не имеет остовных деревьев. Связный граф в общем случае имеет множество остовных деревьев. Число остовных деревьев полного графа Kp равно p p–2 .

Рассмотрим следующую задачу. Есть несколько городов. Требуется найти множество авиарейсов с минимальной суммарной длиной, соединяющих эти города, таким образом, чтобы из любого города можно было добраться до всех остальных городов.

Задачу о соединении городов можно формализовать следующим образом. Построим граф, каждой вершине которого соответствует город, а весом ребра является расстояние между соответствующими городами. Ставится задача нахождения кратчайшего остова – остова с минимальной суммой весов ребер.

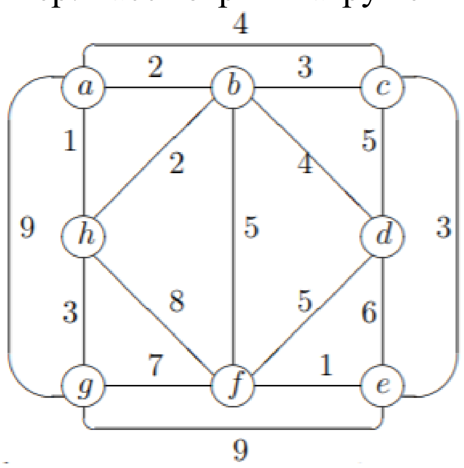
Алгоритм Краскала. Пусть G(V, E) – связный нагруженный граф с p вершинами.

Шаг 1. Выберем в E ребро e1 наименьшего веса. Пусть оно образует дерево U1. Положим n = 1.

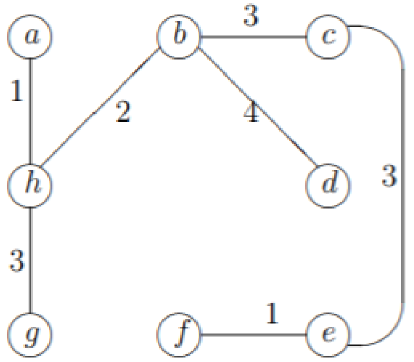
Шаг 2. Если n = p − 1, то исходным минимальным остовом является дерево Un, конец. Иначе идем на шаг 3.

Шаг 3. Строим дерево Un+1, добавляя к уже построенному дереву Un ребро en+1 минимального веса из не включенных в Un ребер графа G(V, E) и не образующее цикла с ребрами из Un. n полагаем равным n + 1.

Пример. Рассмотрим нагруженный граф



2 Выбираем ребро минимального веса 1 e1 = (a, h). Затем выбираем следующее ребро e2 = (e, f) веса 1, оно имеет минимальный вес среди ребер, не образующих цикл с e1. Следующее ребро e3 = (a, b) веса 2. Ребро (b, h) веса 2 не включаем в дерево, т.к. оно образует цикл с ребрами e1 = (a, h) и e3 = (a, b). Далее включаем в дерево ребра e4 = (b, c), e5 = (c, e) и e6 = (g, h) веса 3, затем e7 = (b, d) веса 4. Кратчайший остов построен

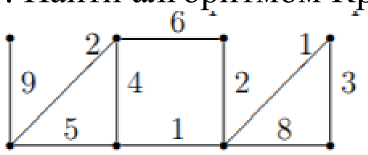


$e_1 = (a,h);$
$e_2 = (e,f);$
$e_3 = (a,b);$
$e_4 = (b,c);$
$e_5 = (c,e);$
$e_6 = (g,h);$
$e_7 = (b,d).$

Задачу о соединении городов можно считать полностью решенной. Однако, если немного изменить условия, то алгоритм перестает решать задачу. Например, рассмотрим задачу Штейнера – предположим, что города соединяются железной дорогой, и нужно проложить рельсы так, чтобы все города были соединены и суммарная длина пути была минимальна. На языке теории графов это означает, что в граф могут вводиться дополнительные вершины. Эффективного алгоритма решения этой задачи не существует. алгоритм Краскала может использоваться как первое приближение.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Нарисовать диаграммы всех неизоморфных деревьев с шестью вершинами.
2. Нарисовать диаграммы всех неизоморфных ордеревьев с пятью вершинами.
3. Нарисовать диаграммы всех неизоморфных упорядоченных деревьев с четырьмя листьями.
4. Нарисовать диаграммы всех неизоморфных бинарных деревьев с четырьмя ли
5. Найти алгоритмом Краскала кратчайший остов в графе



5. Граф задан матрицей весов ребер. Найти алгоритмом Эдмондса максимальный остовный лес

	a	b	c	d	e	f	g	h
a			4		1	7		6
b	2			2				
c	5				9			2
d			5				6	7
e		3	1					
f			8					
g	4				7			1
h		8				5		

7. Последовательно построить дерево сортировки из букв своей фамилии, имени и отчества (всего 10 различных букв). Удалить букву, добавленную четвертой. Удалить корень левого поддерева.

8. Последовательно построить сбалансированное дерево из букв своей фамилии, имени и отчества (всего 10 различных букв). Удалить букву, добавленную четвертой. Удалить корень левого поддерева.

9. Последовательно построить черно-красное дерево из букв своей фамилии, имени и отчества (всего 10 различных букв). Удалить букву, добавленную четвертой. Удалить корень левого поддерева.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение Дерева?
2. Дайте определение Лес?
3. В чем заключается теорема о шести эквивалентных утверждениях о дереве?
4. Дайте определение бинарного дерева?
5. Дайте определение корневого дерева?
6. В чем заключается алгоритм Краскала?
7. В чем заключается задача о соединении городов?
8. В чем заключается алгоритм критерий эйлеровости графа?

Список литературы

1. Книги из собрания графов Йорк фон Вартенбург в российских библиотеках. Каталог; Центр книги Рудомино - Москва, 2012. - 216 с.
2. Теория графов в задачах и упражнениях. Более 200 задач с подробными решениями;Либроком-Москва,2013.-416с.
3. Асельдеров З.М., Донец Г.А. Представление и восстановление графов; Киев: Будівельник - Москва, 2011. - 826 **с.**
4. Донец Г.А., Шор Н.З. Алгебраический подход к проблеме раскраски плоских графов; Евразия Экс-пресс - Москва, 2012. - 224 с.
5. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов; Либроком - Москва, 2012. - 392 с.
6. Зыков, А.А. Теория конечных графов; Новосибирск: Наука - Москва, 2011. 544 с.
7. Колмогоров А. Н. А. Н. Колмогоров. Избранные труды. В 6 томах. Том
8. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход.; С.-Пб.: Редакция журнала Знание - Москва, 2012. - 270 с
9. Малинин Л. И., Малинина Н. Л. Изоморфизм графов в теоремах и алгоритмах; Либроком - Москва, 2009. - 256 с.
10. Мальцев Ю.Н., Петров Е.П. Введение в дискретную математику. Элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования; Студия анимационного кино "Мельница", Эгмонт Россия Лтд., БУКИ - Москва, 2012. - 214 с.
11. . Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств; Типография А. В. Васильева - Москва, 2013. - 812 с.