МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный технический университет»

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ по дисциплине

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Для бакалавров направления 09.03.03 «Прикладная информатика»

Махачкала – 2019 г.

УДК 681.3
Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика». Махачкала, ДГТУ, 2019. 20 с.

Методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения по направлению подготовки бакалавров 09.03.03 – «Прикладная информатика»

Методические указания содержат краткие теоретические сведения о теории множеств, операциях над множествами, алгебре логики, о методах составления совершенных нормальных форм алгебры Буля, булевых функциях, методические примеры, индивидуальные задания к выполнению лабораторных работ.

Составители: доцент кафедры ИТиПИвЭ, к.э.н. Мурадов М.М.
ст.преп. кафедры ИТиПИвЭ, к.ф.-м.н. Фастовец И.П.

Рецензенты: Петрик Г.Г. с.н.с. ИПГ ДНЦ РАН, к.ф.-м.н
Абилов М.В. ст.преп. кафедры Высшей математики, ДГТУ, к.ф.-м.н.

Печатается по решению Совета Дагестанского государственного технического университета от «____» ______________2019 г., № ___.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Роль дискретной математики чрезвычайно велика при описании и изучении сложных автоматизированных систем. Автоматизированные системы состоят из разнообразных разнородных элементов, поэтому обладают ярко дискретной структурой, описание которой требует специальных математических методов. Такими являются теория множеств, теория графов и алгебра логики.

В методических указаниях даются определения понятиям множество, конечное и бесконечное множество, счетное и несчетное множество, упорядоченное множество, кортежу, представлены основные операции алгебры множеств, основные функции алгебры Буля, методы определения наименьшего пути в графе с ребрами произвольной длины.

В методических указаниях предлагается как теоретические положения теории множеств, операций над множествами, алгебры логики, методов составления совершенных нормальных форм алгебры Буля, булевых функциях, теории графов, так и методические примеры, доведенные до алгоритмов, позволяющих проводить вычисления на ЭВМ, фрагменты программ, а также индивидуальные задания

В нумерации параграфов, таблиц и рисунков первая цифра соответствует номеру лабораторной работы, а вторая – порядковому номеру параграфа, таблицы и рисунка.

Решение задач ориентировано на использование ПЭВМ. Указания являются полезными при выполнении лабораторных работ по курсам:

- проектирование информационных систем;
- базы данных;
- имитационное моделирование экономических процессов.

Структура отчета по лабораторной работе

- постановка задачи;
- текст индивидуального задания;
- теоретические сведения;
- текст программы;
- результаты и их анализ;
- список использованной литературы или других источников.

Отчет по лабораторной работе студент пишет от руки в ученической тетради и защищает его перед преподавателем.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Тема: “ Основные понятия теории множеств, основные операции алгебры множеств”

1.1. Основные теоретические положения

Понятие множества является фундаментальным неопределяемым понятием. Интуитивно под множеством будем понимать совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Так, число 3 — элемент множества натуральных чисел, а буква б—элемент множества букв русского алфавита.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок { }, внутри которых перечисляются элементы множества. Для обозначения конкретных множеств используют различные прописные буквы **A, S, X...** или прописные буквы с индексами **A1, A2.** Для обозначения элементов множества в общем виде используют различные строчные буквы ***a, s*** , ***x***-... или строчные буквы с индексами ***a1, a2...***

Для указания того, что некоторый элемент ***a*** является элементом множества **S**, используется символ $\in$ принадлежности множеству. Запись $\boldsymbol{a} \in \mathbf{S}$ означает, что элемент а принадлежит множеству **S**, а запись $x \notin S$ означает, что элемент ***x*** не принадлежит множеству **S**.

Множества бывают конечными и бесконечными. Множество называют конечным, если число его элементов конечно, т. е. если существует натуральное число **N**, являющееся числом элементов множества. Множество называют бесконечным, если оно содержит бесконечное число элементов.

Для того, чтобы оперировать с конкретными множествами, нужно уметь их задавать. Существуют два способа задания множеств: перечисление и описание. Задание множества способом перечисления соответствует перечислению всех элементов, составляющих множество. Так, множество отличников группы можно задать, перечислив студентов, которые учатся на отлично, например {Иванов, Петров, Сидоров}. Для сокращения записи $\mathbf{X}=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ иногда пишут $\mathbf{X}=\{x_i\}$ или вводят множество индексов $I=\{1, 2, \ldots, n\}$ и пишут $\mathbf{X}=\{xi\}$, $i \in I$. Такой способ удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое число элементов, но иногда он может применяться и для задания бесконечных множеств, например

{2, 4, 6, 8...}. Естественно, что такая запись применима, если вполне ясно, что понимается под многоточием.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается характерное свойство, которым обладают все элементы множества. Так, если **M** — множество студентов группы, то множество **A** отличников этой группы запишется в виде

$$A=\{x\in M\,|\,x \text{ — отличник группы}\},$$

что читается следующим образом: множество **A** состоит из элементов ***x*** множества **M**, обладающих тем свойством, что -**X** является отличником группы.

В тех случаях, когда не вызывает сомнений, из какого множества берутся элементы ***x***, указание о принадлежности ***x*** множеству **M** можно не делать. При этом множество **A** запишется в виде

$$A=\{x\,|\,x \text{ — отличник группы}\}.$$

Приведем несколько примеров задания множеств методом описания:

$\{x|\ x$ — четное}—множество четных чисел;

$$\{x\,|\,x^2-1=0\} \text{ — множество } \{+1,\ -1\}.$$

Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества. Пустым множеством называют множество, не содержащее ни одного элемента. Пустое множество обозначается $\varnothing$, например:

$$\{x\in C\,|\,x^2-x+1=0\}=\varnothing.$$

Понятие пустого множества играет очень важную роль при задании множеств с помощью описания. Так, без понятия пустого множества мы не могли бы говорить о множестве отличников группы или о множестве вещественных корней квадратного уравнения, не убедившись предварительно, есть ли вообще в данной группе отличники или имеет ли данное уравнение вещественные корни. Введение пустого множества позволяет совершенно спокойно оперировать с множеством отличников группы, не заботясь о том, есть или пет в рассматриваемой группе отличники.

Пустое множество будем условно относить к конечным множествам.

Рассмотрим теперь вопрос о равенстве множеств. Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. представляют собой одно и то же множество. Множества **X** и **Y** не равны (**X**$\neq$**Y**), если либо в множестве **X** есть элементы, не принадлежащие **Y**, либо в множество **Y** есть элементы, не принадлежащие **X**. Символ равенства множеств обладает свойствами:

X=X — рефлексивность;

если **X=Y**, то **Y=X** — симметричность;

если **X=Y** и **Y=Z**, то **X=Z** — транзитивность.

Многие определения теории множеств удобно давать в виде математических выражений, содержащих некоторые логические символы. Для определения подмножества используем два таких символа.

$\forall$ — символ, называемый квантором и означающий любой, каков бы ни был, «для всех»;

$\rightarrow$ — символ следствия (импликации), означающий «влечет за собой».

Определение подмножества, которое может быть сформулировано в виде: для любого ***x***, утверждение “**x** принадлежит **X**” влечет за собой утверждение «***x*** принадлежит **Y**», запишется так:

$$\forall x\left[x \in X \rightarrow x \in Y\right] \qquad (1)$$

Более краткой записью выражения «**X** является подмножеством **Y**» будет запись

$$X \subseteq Y. \qquad (2)$$

что читается как «**Y** содержит **X**». Используемый здесь символ $\subseteq$ означает включение. Если желают подчеркнуть, что **Y** содержит и другие элементы, кроме элементов из **X**, то используют символ строгого включения $\subset$:

$$X \subset Y. \qquad (3)$$

Связь между символами $\subseteq$ и $\subset$ дается выражением

$$X \subset Y \rightarrow X \subseteq Y \; и \; X \neq Y \qquad (4)$$

Отметим некоторые свойства подмножества, вытекающие из его определения:

$X \subseteq X$ (рефлексивность);

$(X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z) \rightarrow X \subseteq Z$ (транзитивность)

Несколько труднее видеть, что для любого множества M

$$\varnothing \subseteq M.$$

Действительно, пустое множество 0 не содержит элементов. Следовательно, добавляя к **M** пустое множество, мы фактически ничего не добавляем. Поэтому всегда можно считать, что любое множество **M** содержит в себе пустое множество в качестве подмножества.

Счетные и несчетные множества

Если множества являются бесконечными, то установление между ними взаимно однозначного соответствия наталкивается на трудности связанные с необходимостью оперировать с бесконечно большим числом элементов множества. За основу для сопоставления берется натуральный ряд числе N

1,2,3…..n ….

Если бесконечное множество оказывается возможным привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то такое множество называют счетным. Следует отметить, что не все бесконечные множества являются счетными. Если бесконечное множество невозможно привести во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом чисел, то его называют несчетным.

1.2 Операции над множествами, основные предположения

Объединение множеств

Объединением множеств **X** и **Y** называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств **X, Y**, т. е. принадлежат множеству X или множеству **Y**. Объединение **X** и **Y** обозначается через $X \cup Y$. Формальное определение

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}. \qquad (1)$$

Объединение множеств иногда называют суммой множеств и обозначают **X+Y**. Однако свойства объединения множеств несколько отличаются от свойств суммы при обычном арифметическом понимании, поэтому этим термином мы пользоваться не будем.

Объединение множеств можно распространить и на большее число множеств. Обозначим через $\Psi = \{X1, X2, X3, ...Xn\}$ совокупность ***n*** множеств **X1,X2…Xn** называемой системой множеств. Объединение этих множеств

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \bigcup_{X \in \Psi} X = X_1 \cup X_2 \ldots \cup X_n \qquad (2)$$

Представляет собой множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств системы. Пример **X={1,2,3,4,5}, Y={2,4,6,7} – {1,2,3,4,5,6,7}.**

Для объединения множеств справедливы коммутативный и ассоциативный законы

$$X \cup Y = Y \cup X \qquad (3)$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z \qquad (4)$$

Также справедливо след. Равенство

$$X \cup \varnothing = X \qquad (5)$$

Пересечение множеств

Пересечением множеств **X** и **Y** называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству **X**, так и множеству **Y**. Пересечением множеств **X** и **Y** обозначается через $X \bigcap Y$. Формальное определение

$$X \bigcap Y = \{x \mid x \in X \quad и \; x \in Y\} \tag{6}$$

Пересечение множеств иногда называют произведением множеств и обозначают **XY**. Однако свойства пересечения множеств несколько отличаются от свойств произведения в обычном арифметическом понимании.

Операция пересечения позволяет установить ряд соотношений между двумя множествами.

Множества **X** и **Y** называют непересекающимися, если они не имеют общих элементов.

Очевидно, что эти соотношения не исчерпывают всех возможностей. На самом деле, как вытекает из предыдущих определений, между .множествами X и Y может быть одно из пяти отношений:

$$X = Y; \;\; X \subset Y; \;\; Y \subset X; \;\; X \cap Y = \varnothing. \tag{7}$$

X и **Y** находятся в общем положении.

Понятие пересечения можно распространить и на большее, чем два, число множеств. Рассмотрим систему множеств $\Psi = \{X1, X2, X3, \ldots Xn\}$. Пересечение этих множеств записывается в виде

$$\bigcap_{X \in \Psi} X = \bigcap_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cap \ldots \cap X_n. \tag{8}$$

и представляет собой множество, элементы которого принадлежат каждому из множеств системы.

Нетрудно видеть, что пересечение множеств обладает коммутативным свойством $X \cap Y = Y \cap X$ (9)

и ассоциативным $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ (10)

Заметим также, что имеет место соотношение

$$X \cap \varnothing = \varnothing. \tag{11}$$

аналогичное соотношению a*0=0 в обычной алгебре. Соотношение (11) совместно с соотношением (5) показывает, что пустое множество играет роль нуля в алгебре множеств.

Разность множеств

Разностью множеств **X** и **Y** называют множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат **X** и не принадлежат **Y**. Разность множеств **X** и **Y** обозначается через **X\Y**. Таким образом.

$$X\backslash Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\} \qquad (12)$$

Универсальное множество

Если в некотором рассмотрении участвуют только подмножества некоторого фиксированного множества **I**, то это самое большое множество **I** называют универсальным множеством.

Следует отметить, что в различных конкретных случаях роль универсального множества могут играть различные множества. Универсальное множество удобно изображать графически в виде множества точек прямоугольника. Отдельные области внутри этого прямоугольника будут означать различные подмножества универсального множества. Изображение множества в виде областей в прямоугольнике, представляющем универсальное множество, называют диаграммой Эйлера — Венна.

Универсальное множество обладает интересным свойством, которое не имеет аналогии в обычной алгебре, а именно для любого множества **X** справедливо соотношение

$$X \cup I = I \qquad (14)$$

Действительно, объединение $X \cup I$ представляет собой множество, в которое входят как все элементы множества **X**, так и все элементы множества **I**. Но множество **I** уже включает в себя все элементы множества **X**, так что $X \cup I$ будет состоять из тех же элементов, что и **I**, т. е. представляет собой само универсальное множество **I**.

Дополнение множества

Множество $\overline{X}$ определяемое из соотношения

$$\overline{X} = I \setminus X \qquad (15)$$

называют дополнением множества **X** (до универсального множества **I**). На рис. множество **X** представляет собой незаштрихованную область.

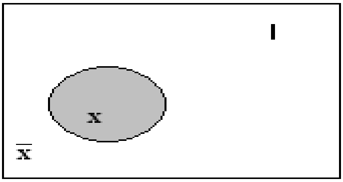

Рис. 1. Дополнение множества.

Формальное определение $\overline{X} = \{x \mid x \in I \text{ и } x \notin X\}$

Из (15) следует, что **X** и $\overline{X}$ не имеют общих элементов, так что

$$X \bigcap \overline{X} = \varnothing \qquad (16)$$

1.3. Примеры алгоритмов и блок-схем реализации операций над множествами.

Пример 1.1. Разработать алгоритм и блок-схему определения универсального множества **I** для заданных множеств **A,B,** состоящих из натуральных чисел.

Алгоритм решения данной задачи имеет следующий вид.

1. Начало.
2. Циклический ввод элементов множеств **A,B.**
3. Обнуляем значения множества I.
4. Сбрасываем счетчик элементов множества I (k =0).
5. Цикл *i* от 1… *n,* где *n* – количество элементов множества **A**

Начало цикла

5_1. Увеличиваем счетчик элементов множества I (k =k+1).

5_2. Дописываем в множество **I** значение *i*-го элемента множества **A**

Конец цикла

6. Цикл *i* от 1… *m,* где *m* – количество элементов множества **B**

Начало цикла

6_1. Установка флага f=0.

6_2. Цикл *j* от 1… *n,* где *n* – количество элементов множества **A**

Начало цикла

Проверка условия Bi = Aj

- если да, то флаг f = 1;
- если нет, то проверка следующего элемента

Конец цикла

6_3. Проверка условия f=0

- если да, то

Увеличиваем счетчик элементов множества I (k =k+1).

Дописываем в множество **I** значение *i*-го элемента множества B;

- если нет, то проверка следующего элемента;

Конец цикла

7. Вывод полученного множества **I**
8. Конец

Блок-схема алгоритма представлена на рис 2.

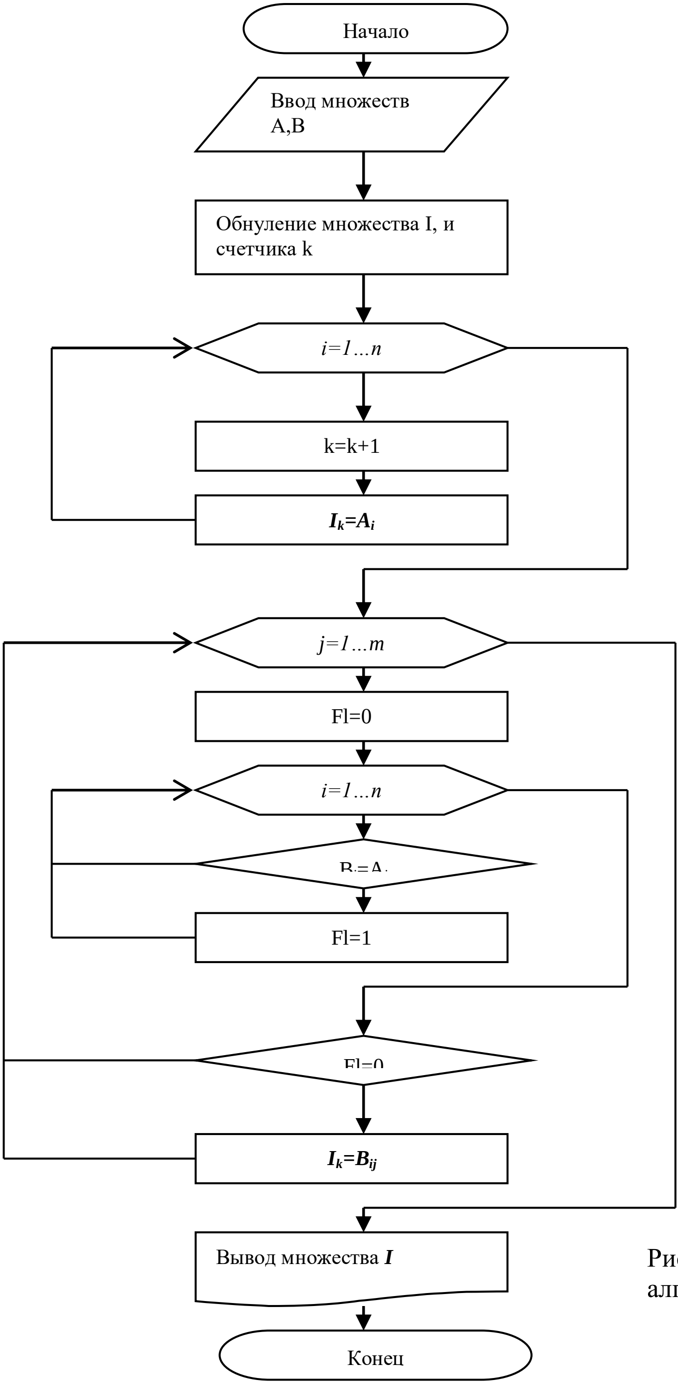

Рис. 2 Блок-схема алгоритма

1.4. Контрольные вопросы

1. Дайте определение множества. Привести примеры множеств.
2. Что представляют собой счетные и несчетные множества.
3. Что представляют собой конечные и бесконечные множества.
4. Какие способы задания множеств существуют. Какой способ используются для бесконечных множеств. Привести пример задания одного о того же множества разными методами.
5. Алгебра множеств. Основные предположения алгебры множеств.
6. Операции над множествами.
7. Понятия универсального и пустого множества. Дополнение множества.
8. Основные тождества алгебры множеств.

1.5. Задание к лабораторной работе №1

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы.
2. Разработать блок-схемы алгоритмов выполнения операций объединения, пересечения и разности двух заданных множеств.
3. Разработать блок-схемы пользовательского меню для выбора операции над множествами.
4. Реализовать на языке программирования разработанные блок-схемы.
5. Выписать в отчет ход выполнения работы и выводы.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Тема: “Элементы математической логики, построение совершенных нормальных форм. Разработка алгоритма, блок-схемы и программы реализующих построение совершенных нормальных форм. ”

2.1 Элементы математической логики

Логика высказываний

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Истинность или ложность предложения есть истинное значение высказывания. Сопоставим каждому высказыванию переменную равную 1, если оно истинно и равную 0 если оно ложно. Если P и Q – некоторые высказывания, то можно образовать высказывания “P или Q”, “P и Q”, “не P”, введя операции дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции(&) и отрицания. Действия этих операций задаются таблицами истинности (таб. 1-3), каждой строке которых взаимно однозначно соответствуют набор значений составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания.

Таблица 1

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 2

P	Q	P&Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3

P	$\overline{P}$
0	1
1	0

Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания читаются как «или», «и» и «не».

Приведем основные законы, определяющие эти операции:

закон идемпотентности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee a = a, \qquad a \,\&\, a = a; \tag{1}$$

закон коммутативности дизъюнкции и конъюнкции

$$a \vee b = b \vee a, \qquad a \,\&\, b = b \,\&\, a; \tag{2}$$

закон ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции

$$\begin{gathered} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, \\ a \,\&\, (b \,\&\, c) = (a \,\&\, b) \,\&\, c; \end{gathered} \tag{3}$$

закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции

$$\begin{gathered} a \,\&\, (b \vee c) = a \,\&\, b \vee a \,\&\, c, \\ a \vee (b \,\&\, c) = (a \vee b) \,\&\, (a \vee c); \end{gathered} \tag{4}$$

закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{a}} = a \tag{5}$$

законы де Моргана

$$\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \,\&\, b}, \qquad \overline{a} \,\&\, \overline{b} = \overline{a \vee b} \tag{6}$$

законы склеивания

$$a \,\&\, b \vee a \,\&\, \overline{b} = a, \qquad (a \vee b) \,\&\, (a \vee \overline{b}) = a \tag{7}$$

законы поглощения

$$a \vee a \,\&\, b = a, \qquad a \,\&\, (a \vee b) = a \tag{8}$$

законы Порецкого

$$a \vee \overline{a} \,\&\, b = a \vee b, \qquad a \,\&\, (\overline{a} \vee b) = a \,\&\, b \tag{9}$$

Законы, определяющие действия с константой

$$\begin{array}{lll} a \vee 0 = a, & a \,\&\, 0 = 0, & a \vee 1 = 1 \\ a \,\&\, 1 = a, & a \vee \overline{a} = 1, & a \,\&\, \overline{a} = 0 \end{array} \tag{10}$$

Всякое высказывание, построенное с помощью операций «и», «или», «не», имеет некоторое истинное значение, зависящее от значений составляющих высказываний. Любое высказывание *f* может быть задано в виде таблицы истинности. Если значение высказывания зависит от n составляющих высказываний $x_1,x_2,x_3,\dots x_n$, то таблица истинности содержит 2^n строк. Составляющие высказывания x_i будем называть атомарными высказываниями или просто переменными x_i, рассматривая при этом сложное высказывание как функцию *f* от *n* переменных.

Построение совершенных нормальных форм.

Исчисление высказываний можно построить используя соответствующие таблицы истинности. Алгебра Буля простейшая в классе булевых алгебр; она является двухэлементной булевой алгеброй. Одним из элементов двухэлементной булевой алгебры является 0, так как булева алгебра является решеткой с дополнениями, поэтому вторым элементом этой алгебры является 1.

Каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f\,(x_1,x_2,\dots x_n)$ можно представить в виде дизъюнкции конституент $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$, где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1 \\ \overline{x}_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}.$$

Пример 1. Рассмотрим пример высказывания $f(x_1,x_2,x_3)$, заданное таблицей истинности (таб. 4)

Таблица 4.

x_1	X_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0		1	0	0	0
0	0	1	0		1	0	1	1
0	1	0	0		1	1	0	1
0	1	1	1		1	1	1	1

Согласно предыдущему утверждению функция $f(x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)= \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2...x_n)$ в виде дизъюнкции конституент будем называть совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции $f(x_1,x_2...x_n)$.

Переменную или ее отрицание будем называть первичным термом. Количество первичных термов, которые образуют форму, называют сложностью $L(f)$ этой формы.

Сложность СДНФ функции из примера равна 12. Для уменьшения сложности этой функции используют основные тождества алгебры Буля (законы 1-8). Согласно свойству идемпотентности дизъюнкции имеем:

$$f(x_1,x_2,x_3)=$$
$$\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 .$$

Используя свойства коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, получаем:

$$f(x_1,x_2,x_3)= (\bar{x}_1 \vee x_1) x_2 x_3 \vee (x_2 \vee \bar{x}_2) x_1 x_3 \vee (x_3 \vee \bar{x}_3) x_1 x_2$$

Окончательно имеем

$$f(x_1,x_2,x_3)= x_2 x_3 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_2 = x_3 (x_2 \vee x_1) \vee x_1 x_2$$

В результате получаем сложность L(f) функции $f(x_1,x_2,x_3)$ равную 5.

Аналогично можно каждое высказывание и соответствующую ему булеву функцию $f\ (x_1,x_2,...x_n)$ представить в виде конъюнкции конституент $\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i^{\sigma i}$, где

$$x_i^{\sigma i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 0 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 1 \end{cases}.$$

В дальнейшем представление булевой функции $f(x_1,x_2...x_n)$ в виде конъюнкции дизъюнкций будем называть совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) функции $f(x_1,x_2...x_n)$.

Для примера 1 функция $f(x_1,x_2,x_3)$ может быть представлена в виде:

$$f(x_1,x_2,x_3)= (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\,\&\,(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\,\&\,(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\,\&\,(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Булевы функции двух переменных

Любое сложное высказывание можно представить в виде выражения, в которое входят простые высказывания (переменные) x_i операции дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и, быть может, скобки. Рассмотрим, каким свойствам должны удовлетворять операции, с помощью которых можно выражать любое сложное выражение.

Суперпозицией системы

$$S = \{\varphi_1(x_1, x_2,..., x_{k1}), \varphi_2(x_1, x_2,..., x_{k2}),...., \varphi_l(x_1, x_2,..., x_l)\}$$

называется любая функция f, полученная:

а) из $\varphi_j(x_1, x_2,..., x_{kj})$ переименованием переменных, $\varphi_j \in S$;

б) подстановкой вместо некоторых переменных функции $\varphi_\alpha(x_1, x_2,..., x_{k\alpha})$ функций $\varphi_\beta(x_1, x_2,..., x_{k\beta})$, $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in S$;

в) с помощью многократно применения пунктов а) и б).

Система S называется полной в P_k, если любая функция $f \in P_k$ представима в виде суперпозиции этой системы; система S называется базисом, если полнота S теряется при удалении хотя бы одной функции, где P_k – k-значная логика.

Построим все булевы функции от двух переменных (таб.5)

Таблица5

переменные		Булевы функции															
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Индекс *i* функциональной переменной f_i , $i=0,1,2,\ldots,15,$ равен десятичному эквивалентному набору значений этой функции, читаемой сверху вниз. Приведем эти булевы функции:

$f_0(x_1,x_2)=0$ *– константа 0;*

$f_1(x_1,x_2)= x_1 x_2$ *конъюнкция;*

$f_2(x_1,x_2)= x_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \to x_2 = x_1 \xrightarrow{/} x_2$ - *левая коимпликация (читается «не если x_1, то x_2);*

$f_3(x_1,x_2)= x_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1$*;*

$f_4(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 = \overline{x_1 \vee \bar{x}_2} = \overline{x_1 \leftarrow x_2} = x_1 \xleftarrow{/} x_2$ - *правая коимпликация;*

$f_5(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2$

$f_6(x_1,x_2)= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2$ - *сложение по модулю 2 или функция неравнозначности, неэквивалентности;*

$f_7(x_1,x_2)= x_1 \vee x_2$ - *дизъюнкция;*

$f_8(x_1,x_2)= \bar{x}_1\bar{x}_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = x_1 \circ x_2$ - *функция Вебба;*

$f_9(x_1,x_2)= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = x_1 \sim x_2$ - *функция эквивалентности, равнозначности;*

$f_{10}(x_1,x_2)= \bar{x}_2$ - *отрицание;*

$f_{11}(x_1,x_2)= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 = x_1 \leftarrow x_2$ - *правая импликация (читается « если x_2, то x_1);*

$f_{12}(x_1,x_2)= \bar{x}_1$ - *отрицание;*

$f_{13}(x_1,x_2)= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2 = x_1 \to x_2$ *левая импликация (читается « если x_1, то x_2);*

$f_{14}(x_1,x_2)= \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = x_1 | x_2$ - *функция Шеффера;*

$f_{15}(x_1,x_2)=1$*– константа 1.*

2.2. Контрольные вопросы

1. Что называется высказыванием ?
2. Докажите с помощью таблиц истинности основные законы алгебры Буля.
3. Что называется атомарным высказыванием?
4. Из каких элементов состоит Алгебра Буля?
5. Что называют совершенной дизъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
6. Что называют совершенной конъюнктивной нормальной формой? Как выполняется ее построение?
7. Что является сложностью формы и как ее определять.

2.3. Задание к лабораторной работе №2

1. Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы.
2. По заданной таблице истинности построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

x_1	X_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0			1	0	0	
0	0	1			1	0	1	
0	1	0			1	1	0	
0	1	1			1	1	1	

3. По заданной таблице истинности построить совершенную конъюнктивную нормальную форму.
4. Определить сложность форм и выполнить упрощение их. Объясните полученные результаты
5. Разработать блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ.
6. Реализовать на языке программирования блок-схему алгоритма получения СДНФ и СКНФ (по выбору).
7. Выписать в отчет ход выполнения работы и выводы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Дискретная математика для инженера О.П.Кузнецов, Г.М.Адельсон – Вельский М: Мир, 1981
2. Основы кибернетики Л.Т.Кузин М: Наука
3. Конечные графы и сети Р Басакер, Т.Саати М: Наука, 1974
4. Теория графов и ее применение К.Берж М: Наука, 1962
5. Математические основы кибернетики Ю.М.Коршунов М: Мир 1982
6. Введение в математическую логику Э.Мендельсон М:,Наука, 1971
7. Введение в прикладную комбинаторику Кофман М: Наука, 1975
8. Фундаментальные основы дискретной математики В.А. Горбатов. М.: Наука. Физматлит.1999

СОДЕРЖАНИЕ

Мурадов М.М.
Фастовец И.П.

Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Дискретная математика».