Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет»

Учебно- методические указания к выполнению лабораторных работ №5-№8 по дисциплине «Теория систем и системный анализ» для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» профиль подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии». (Часть II)

Махачкала 2021

УДК 681.3.06(072)

Учебно- методические указания к выполнению лабораторных работ №5-№8 по дисциплине «Теория систем и системный анализ» для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» профиль подготовки «Системное программирование и компьютерные технологии». –Махачкала: ИПЦ ДГТУ, 2021.-33с.

Учебно- методические указания подготовлены в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Учебно- методические указания содержат описания лабораторных работ по темам:

1. Метод анализа иерархий
2. Решение задач динамического программирования
3. Системы массового обслуживания
4. Модели управления запасами

Каждая лабораторная работа содержит теоретический материал и практическую часть.

Составители: ст. преподаватель кафедры «Прикладной математики и информатики» Алиосманова О.А.

Рецензент:

Зав. кафедрой «ПОВТ и АС» ДГТУ, к.э.н., доцент Т.Г.Айгумов

Ведущий научный сотрудник лаборатории комплексного освоения возобновляемых источников энергии Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиала ОИВТ РАН, д.т.н. Д.Н. Кобзаренко

Печатается согласно постановлению

Ученого совета Дагестанского государственного технического университета

от ________2021 г.

Оглавление

Лабораторная работа № 5 Метод анализа иерархий

Цель работы: *изучить принципы метода иерархий, произвести оценку и выбор объектов (услуг) согласно варианту выбранного индивидуального задания, используя метод анализа иерархий (МАИ).*

Иерархия возникает тогда, когда системы, функционирующие на одном уровне, функционируют как части системы более высокого уровня, становясь подсистемами этой системы. МАИ является процедурой для иерархического представления элементов, определяющих суть проблемы. Метод состоит в декомпозиции проблемы на более простые составляющие части дальнейшей обработки последовательности суждений лица, принимающего решения по парным сравнениям. Однако МАИ включает процесс синтеза многих суждении, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений.

Этапы МАИ

1. Очертить проблему и определить общую цель.
2. Построить иерархию, начиная с вершины: цель, критерии, перечень альтернатив.
3. Построить множество матриц парных сравнений для каждого из нижних уровней по принципу: одна матрица для каждого элемента примыкающего сверху уровня. Этот элемент называется управляемым по отношению к элементу, находящемуся на нижнем уровне. Элементы любого уровня сравниваются друг с другом относительно их воздейст-вия на управляемые элементы.
4. На этапе 3 потребуется (n(n-1))/2 суждений с учетом свойства обратной симметрии.
5. После проведения всех парных сравнений определяются λ_{max}, IC, CI, RC и т.д.
6. Этапы 3, 4, 5 провести для всех уровней и групп иерархии.
7. Использовать иерархический синтез для взвешивания собственных весов. Вычислить сумму по всем соответствующим взвешенным компонентам собственных векторов уровня иерархии, лежащего ниже.
8. Определить согласованность всей иерархии, перемножив каждый индекс согласованности на приоритет соответствующего критерия; полученные числа просуммировать. Результат делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности. Приемлемое отношение согласованности принимают до 10%. Это и есть основной инструмент сложной аналогичной системы.

Пример. Нужно произвести выбор секретаря из девушек, подавших резюме.

Отбор девушек происходит по семи критериям:

1. Знание делопроизводства.
2. Внешний вид.
3. Знание английского языка.
4. Знание компьютера.
5. Умение разговаривать по телефону.

Собеседование прошли пять девушек:

1. Ольга
2. Елена
3. Светлана
4. Галина
5. Жанна

После собеседования получились следующие описания девушек:

1. Ольга

Приятная внешность. Отличное знание английского языка. Хорошее поведение. Нет навыков работы на компьютере, посредственное общение по телефону.

2. Елена

Красивая, приятная внешность, хорошее умение общаться по телефону. Незнание английского языка, нет навыков работы на компьютере, делопроизводство знает весьма плохо.

3. Светлана

Очень хорошее знание делопроизводства, хорошие навыки работы на компьютере, достаточно хорошо общается по телефону, очень исполнительная. Не очень приятная внешность, посредственное знание английского языка.

4. Галина

Достаточно хорошо знает делопроизводство, неплохие навыки работы на компьютере, по телефону общается на высоком уровне, достаточно хорошее поведение. Плохое знание английского языка, неприятная внешность.

5. Жанна

Приятная внешность, очень хорошее поведение, неплохие навыки работы на компьютере, достаточно хорошее знание английского языка. По телефону общается плохо, не знает делопроизводство.

Решение: Рассмотрим поэтапную реализацию МАИ средствами пакета MATHCAD 2002.

1. Результаты собеседования заносим в матрицы попарных сравнений.

Матрицы попарных сравнений по каждому из критериев представлены на рис. 5.1. Матрицы:

1. Знание делопроизводства 2. Внешний вид 3. Знание языка

$$d1 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{3} & 5 & 7 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 9 \\ \frac{1}{5} & 5 & \frac{1}{7} & 1 & 7 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix} \qquad d2 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 5 & 6 & \frac{1}{4} \\ 5 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & \frac{1}{3} & 5 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad d3 := \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 & 5 & 3 \\ \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & 3 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & 5 & 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Знание компьютера 5. Разговоры по телефону

$$d4 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} \\ 9 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} \\ 8 & 7 & \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad d5 := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 5 \\ 3 & 1 & 5 & \frac{1}{3} & 6 \\ 2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{4} & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 5.1. Матрицы попарных сравнений

2. На основе матриц попарных сравнений получаем векторы локальных приоритетов по каждому рассматриваемому критерию оценки. Для этого необходимо произвести свертку каждой матрицы попарных сравнений в вектор, затем любым из известных способов нормировать полученные векторы и перемножить матрицы попарных сравнений на соответствующие им нормированные векторы. Ход описанного решения представлен на рис. 5.2–5.5.

3. Составляем сводную матрицу локальных приоритетов путем последовательной записи векторов – столбцов локальных приоритетов. Сводная матрица локальных приоритетов представлена на рис. 5.6.

4. Производим свертку матрицы локальных приоритетов. Свертка матрицы локальных приоритетов контрольного примера представлена на рис. 5.7, 5.8.

5. Вектор глобальных приоритетов находим путем перемножения вектора приоритетов на сводную матрицу локальных приоритетов (рис. 5.9). Рассчитанный для контрольного примера вектор глобальных приоритетов представлен на рис. 5.10. Максимальное значение данного вектора является оптимальным решением.

6. Производим расчет отношения согласованности на каждом этапе сравнения (для матриц попарных сравнений, матрицы локальных приоритетов, векторы глобальных приоритетов). Производим анализ точности результатов, полученных с помощью МАИ*.

$$
a1 := \begin{bmatrix} \sqrt[5]{\left(1\cdot 3\cdot \frac{1\cdot 5\cdot 7}{3}\right)} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{3}\cdot 1\cdot \frac{1\cdot 5}{5\cdot 5}} \\ \sqrt[5]{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 1} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 5\cdot 7\cdot 1}{5\cdot 7}} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 1}{7\cdot 5\cdot 9\cdot 7}} \end{bmatrix}
\quad a2 := \begin{bmatrix} \sqrt[5]{\frac{1\cdot 5\cdot 6}{5\cdot 4}} \\ \sqrt[5]{5\cdot 7\cdot 7\cdot 3} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{5\cdot 7\cdot 5}} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{6\cdot 7\cdot 5}} \\ \sqrt[5]{4\cdot \frac{1\cdot 5\cdot 5}{3}} \end{bmatrix}
\quad a3 := \begin{bmatrix} \sqrt[5]{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{9\cdot 5\cdot 7\cdot 3}} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 3}{7\cdot 5\cdot 3}} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 3}} \\ \sqrt[5]{35} \end{bmatrix}
\quad a4 := \begin{bmatrix} \sqrt[5]{\frac{1}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 8}} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{7\cdot 7}} \\ \sqrt[5]{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 3\cdot 7}{5\cdot 2}} \\ \sqrt[5]{\frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 2}{3}} \end{bmatrix}
\quad a5 := \begin{bmatrix} \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \\ \sqrt[5]{30} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[5]{3\cdot 5\cdot 4\cdot 7} \\ \sqrt[5]{\frac{1}{5\cdot 6\cdot 5\cdot 7}} \end{bmatrix}
$$

Рис. 5.2. Символьное представление свертки матриц попарных сравнений

$$
a1 = \begin{bmatrix} 2.036 \\ 0.582 \\ 3.936 \\ 1 \\ 0.214 \end{bmatrix}
\quad a2 = \begin{bmatrix} 1.084 \\ 3.743 \\ 0.356 \\ 0.343 \\ 2.016 \end{bmatrix}
\quad a3 = \begin{bmatrix} 3.936 \\ 0.254 \\ 0.491 \\ 1 \\ 2.036 \end{bmatrix}
\quad a4 = \begin{bmatrix} 0.231 \\ 0.459 \\ 3.936 \\ 1.16 \\ 2.063 \end{bmatrix}
\quad a5 = \begin{bmatrix} 0.699 \\ 1.974 \\ 0.871 \\ 3.347 \\ 0.249 \end{bmatrix}
$$

Рис. 5.3. Числовое представление результатов свертки матриц попарных сравнений в векторы

b1:- d1 a1 b2:- d2 a2 b3:- d3 a3 b4:- d4 a4 b5:- d5 a5

Рис. 5.4. Символьное представление формул получения векторов локальных приоритетов

$$
b1 = \begin{bmatrix} 11.595 \\ 3.32 \\ 21.884 \\ 6.38 \\ 1.202 \end{bmatrix}
\quad b2 = \begin{bmatrix} 6.176 \\ 20.109 \\ 1.854 \\ 1.818 \\ 11.098 \end{bmatrix}
\quad b3 = \begin{bmatrix} 20.769 \\ 1.346 \\ 2.556 \\ 5.21 \\ 10.582 \end{bmatrix}
\quad b4 = \begin{bmatrix} 1.245 \\ 2.397 \\ 21.219 \\ 5.975 \\ 10.759 \end{bmatrix}
\quad b5 = \begin{bmatrix} 3.705 \\ 11.032 \\ 4.744 \\ 17.988 \\ 1.37 \end{bmatrix}
$$

Рис. 5.5. Векторы локальных приоритетов по каждому из рассматриваемых критериев

$$
r := \begin{bmatrix} 11.595 & 6.176 & 20.796 & 1.245 & 3.705 \\ 3.32 & 20.109 & 1.346 & 2.397 & 11.032 \\ 21.884 & 1.854 & 2.556 & 21.219 & 4.744 \\ 6.38 & 1.818 & 5.21 & 5.975 & 17.988 \\ 1.202 & 11.098 & 10.582 & 10.795 & 1.37 \end{bmatrix}
$$

Рис. 5.6. Сводная матрица локальных приоритетов

$$n := \begin{bmatrix} \sqrt[7]{(11.595\ 6.176\ 20.796\ 1.245\ 3.705)} \\ \sqrt[7]{3.32\ 20.109\ 1.346\ 2.397\ 11.032} \\ \sqrt[7]{21.884\ 1.854\ 2.556\ 21.219\ 4.744} \\ \sqrt[7]{6.38\ 1.818\ 5.21\ 5.975\ 17.988} \\ \sqrt[7]{1.202\ 11.098\ 10.582\ 10.795\ 1.37} \end{bmatrix}$$

Рис. 5.7. Символьное представление свертки сводной матрицы локальных приоритетов

$$n = \begin{bmatrix} 3.533 \\ 3.036 \\ 3.751 \\ 3.505 \\ 2.98 \end{bmatrix}$$

Рис. 5.8. Числовое представление свертки сводной матрицы локальных приоритетов – вектор приоритетов

U:- r n

Рис. 5.9. Символьное представление формулы получения вектора глобальных приоритетов

$$u = \begin{bmatrix} 153.114 \\ 119.102 \\ 181.033 \\ 122.147 \\ 119.542 \end{bmatrix}$$

Рис. 5.10. Вектор глобальных приоритетов

Результаты вычислений показали, что нужно выбрать Светлану (строка № 3).

Индивидуальное задание

Выберите тему исследования по своему индивидуальному варианту. Соберите описательный материал по данной теме и приведите словесное описание исследуемых вариантов вашего объекта исследования. Произведите описание, оценку и выбор наилучшего объекта (услуги) из шести вариантов по шести критериям согласно вашему варианту, используя метод анализа иерархий (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Вариант	Тема исследования
1	Выбор бытовой техники. Стиральная машина
2	Выбор средств оргтехники. Копировальный аппарат
3	Выбор косметических средств
4	Выбор мебели
5	Выбор бытовой техники. Видеокамера
6	Выбор парфюмерии
7	Выбор бытовой техники. Цифровой фотоаппарат
8	Выбор ювелирного изделия
9	Выбор средств оргтехники. Телефон
10	Выбор домашнего животного

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные этапы метода анализа иерархий.
2. Опишите процесс попарного сравнения объекта по какому-либо признаку.
3. Опишите шкалу выбора приоритетов.
4. Перечислите основные свойства матрицы попарных сравнений.
5. Как происходит формирование вектора локальных приоритетов?
6. Опишите процесс свертки сводной матрицы локальных приоритетов.
7. На основании чего происходит выбор оптимального варианта в методе анализа иерархий?
8. Используются ли в методе анализа иерархий основные принципы синтеза сложных систем?
9. Можно ли отнести метод анализа иерархий к методам экспертных оценок?
10. Опишите процесс получения вектора глобальных приоритетов.

Лабораторная работа № 6 Решение задач динамического программирования

Цель работы: *изучить способы решения простейших задач динамического программирования.*

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий осуществлять оптимальное планирование управляемых процессов, то есть процессов, на ход которых можно целенаправленно влиять. Это метод оптимизации, специально приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на отдельные шаги. Такие операции называют многошаговыми.

Задача динамического программирования состоит в выборе из множества допустимых управлений (решений) такого, которое переводит систему из начального состояния в конечное, обеспечивая при этом экстремум целевой функции (минимум или максимум в зависимости от ее экономической сущности).

В основе вычислительных алгоритмов динамического программирования лежит следующий принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом: каково бы ни было состояние системы S в результате (i-1) шагов, управление на i-м шаге должно выбираться так, чтобы оно по совокупности с управлениями на всех последующих шагах с (i+1)-го до N-го включительно доставляло экстремум целевой функции.

Динамическое программирование используется для исследования многоэтапных процессов. Состояние управляемой системы характеризуется определенным набором параметров. Процесс перемещения в пространстве разделяют на ряд последовательных этапов и производят последовательную оптимизацию каждого из них, начиная с последнего. На каждом этапе находят условное оптимальное управление при всевозможных предположениях о результатах предыдущего шага. Когда процесс доходит до исходного состояния, снова проходят все этапы, но уже из множества условных оптимальных управлений выбирается одно наилучшее. Получается, что однократное решение сложной задачи заменяется многократным решением простой. Важно, что значение критерия – сумма частных значений, достигнутых на отдельных шагах, и предыстория не играют роли при определении будущих действий.

Пример. Пусть фирма имеет три торговые точки, какое-то количество условных единиц капитала и знает для каждой точки зависимость прибыли в ней от объема вложения определенного капитала в эту точку (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Вложения	1	2	3
0	0	0	0
1	0,28	0,25	0,15
2	0,45	0,41	0,25
3	0,65	0,55	0,40
4	0,78	0,65	0,50
5	0,90	0,75	0,62
6	1,02	0,80	0,73
7	1,13	0,85	0,82
8	1,23	0,88	0,90
9	1,32	0,90	0,96

Определить, как распорядиться имеющимся капиталом, чтобы прибыль была максимальна? Введем следующие обозначения:

f1(x), f2(x), f3(x) – функции прибыли в зависимости от капитальных вложений, то есть столбцы 2–4 таблицы, $F_{12}(A)$ – оптимальное распределение, когда А единиц капитала вкладывается в первую и вторую торговые точки вместе, $F_{123}(A)$ – оптимальное распределение капитала величины А, вкладываемого во все точки вместе.

Например, для определения $F_{12}(2)$ надо найти f1(0)+f2(2)=0,41, f1(1)+f2(1)=0,53 f1(2)+f2(0)=0,45 и выбрать из них максимальную величину, то есть $F_{12}(2)$=0,53.

Вообще F_{12}(A)=max [f1(x)–f2(A-x)]. Вычисляем $F_{12}(0)$, $F_{12}(1)$, $F_{12}(2)$, …, $F_{12}(9)$. Распределение капитала между двумя торговыми точками (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Вложения	f1(x)	f2(x)	F_{12}(A)	Оптимальное распределение
0	0	0	0	0,0
1	0,28	0,25	0,28	1,0
2	0,45	0,41	0,53	1,1
3	0,65	0,55	0,70	2,1
4	0,78	0,65	0,90	3,1
5	0,90	0,75	1,06	3,2
6	1,02	0,80	1,20	3,3
7	1,13	0,85	1,33	4,3
8	1,23	0,88	1,45	5,3
9	1,32	0,90	1,57	6,3

Для А=4 возможны комбинации (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), которые дают соответственно общую прибыль: 0,78; 0,90; 0,86; 0,83; 0,65. Более подробно получение этих величин показано ниже:

$$F_{12}(A) = \max \{f1(x) + f2(A-x)\},$$

$$F_{12}(1) = \max \begin{cases} f1(1) + f2(0) = 0{,}28 \\ f1(0) + f2(1) = 0{,}25. \end{cases}$$

$$F_{12}(5) = \max \begin{cases} 0{,}90 + 0 = 0{,}90 \\ 0{,}78 + 0{,}25 = 1{,}03 \\ 0{,}65 + 0{,}41 = 1{,}06 \\ 0{,}45 + 0{,}55 = 1{,}00 \\ 0{,}28 + 0{,}65 = 0{,}93 \\ 0 + 0{,}88 = 0{,}88. \end{cases}$$

Теперь, когда фактически есть зависимость F12 от величины вкладываемого в первые две точки капитала, можно искать F123(A)= =max [F12(x)+f3(A-x)] (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Вложения	F12(x)	f3(x)	F123(A)	Оптимальное распределение
0	0	0	0	(0,0,0)
1	0,28	0,15	0,28	(1,0,0)
2	0,53	0,25	0,53	(1,1,0)
3	0,70	0,40	0,70	(2,1,0)
4	0,90	0,50	0,90	(3,1,0)
5	1,06	0,62	1,06	(3,2,0)

6	1,20	0,73	1,21	(3,2,1)
7	1,33	0,82	1,35	(3,3,1)
8	1,45	0,90	1,48.	(4,3,1)
9	1,57	0,96	1,60	(5,3,1) или (3,3,3)

Более подробно получение этих величин при вложении капитала в три точки показано в табл. 6.4 для девяти единиц капитала.

Таблица 6.4

Капитал	x1+x2	x3	F_{123}
9	9	0	1,57
	8	1	1,45 + 0,15 = 1,6 (5,3,1)
	7	2	1,33 + 0,25 = 1,58
	6	3	1,2 + 0,4 = 1,6 (3,3,3)
	5	4	1,06 + 0,5 = 1,56
	4	5	0,9 + 0,62 = 1,52
	3	6	0,70 + 0,73 = 1,43
	2	7	0,53 + 0,82 = 1,35
	1	8	0,28 + 0,90 = 1,18
	0	9	0,96

Важно то, что полученные результаты были бы теми же, если бы использовались не F_{12} и F_{123}, а, скажем, F_{31} и F_{312}. Обратите внимание на то, что оптимальное решение для A=9 не единственное.

Индивидуальное задание

Вариант 1. Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства равны 5 условным единицам. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 условной единице. Средства, выделенные предприятию, приносят в конце года прибыль. Зависимость прибыли от объема вложения средств заданы в табл. 6.5.

Таблица 6.5

Вложения, усл. ед.	Предприятия			
	1	2	3	4
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Вариант 2. Производственное объединение выделяет четырем входящим в него предприятиям кредит в сумме 100 млн ден. ед. для расширения производства и увеличения выпуска продукции. По каждому предприятию известен возможный прирост $z_i(u_i)$ (i= 1,4) выпуска продукции (в денежном выражении) в зависимости от выделенной ему суммы i u . Для упрощения вычислений выделяемые суммы кратны 20 млн ден. ед. и приведены в табл. 6.6.

Таблица 6.6

Выделяемые средства u_i, млн ден. ед.	Предприятие			
	№1	№2	№3	№4
	Прирост выпуска продукции на предприятиях $z_i(u_i)$, млн ден. ед.			
	$z_1(u_i)$	$z_2(u_i)$	$z_3(u_i)$	$z_4(u_i)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

При этом предполагаем, что прирост выпуска продукции на i-м предприятии не зависит от суммы средств, вложенных в другие предприятия, а общий прирост выпуска в производственном объединении равен сумме приростов, полученных на каждом предприятии объединения.

Требуется так распределить кредит между предприятиями, чтобы общий прирост выпуска продукции на производственном объединении был максимальным.

Вариант 3. Разработать оптимальную политику использования и замены оборудования не старше шести лет, если известны: стоимость продукции r(t), производимой с использованием этого оборудования, ежегодные эксплуатационные расходы v(t), остаточная стоимость s и стоимость p нового оборудования. Продолжительность планового периода принять равной 6 годам. Задачу решить при следующих числовых данных: t=4, s=2, p=10, значения r(t) и v(t) приведены в табл. 6.7.

Таблица 6.7

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	22	21	20	18	16	15	13
v(t)	12	13	14	15	16	17	18

Известны также остаточная стоимость s, равная 4 и не зависящая от возраста оборудования, и цена p нового оборудования, равная 13 и не меняющаяся в плановом периоде.

Вариант 4. Планируется деятельность трех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства равны 9 условным единицам. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 условной единице. Средства, выделенные предприятию, приносят в конце года прибыль. Зависимость прибыли от объема вложения средств задана в табл. 6.8.

Таблица 6.8

Вложения	Предприятия		
	1	2	3
1	5	7	6
2	9	9	10
3	12	11	13
4	14	13	15
5	15	16	16
6	18	19	18
7	20	21	21
8	24	22	22
9	27	25	25

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Вариант 5. Разработать оптимальную политику по критерию прибыли на ближайшие четыре года в отношении оборудования не старше шести лет, если для каждого года планового периода известны стоимость продукции r(t), производимой с использованием этого оборудования, и эксплуатационные расходы v(t). Данные приведены в табл. 6.9.

Таблица 6.9

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	27	26	26	25	24	23	21
v(t)	15	15	16	16	16	17	19

Известны также остаточная стоимость s, равная 4 и не зависящая от возраста оборудования, и цена p нового оборудования, равная 13 и не меняющаяся в плановом периоде.

Вариант 6. Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства равны 8 условным единицам. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 условной единице. Средства, выделенные предприятию, приносят в конце года прибыль. Зависимость прибыли от объема вложения средств выражена в табл. 6.10.

Таблица 6.10

Вложения, усл. ед.	Предприятия			
	1	2	3	4
1	5	7	6	3
2	9	9	10	5
3	12	11	13	7
4	14	13	15	11
5	15	16	16	13
6	18	19	18	15
7	20	21	21	20
8	24	22	22	22

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Вариант 7. Фермеру принадлежит стадо скота, насчитывающее 60 голов. Один раз в году фермер решает, сколько голов скота продать и сколько оставить. Прибыль от продажи одной головы скота в любом году рассматриваемого четырехлетнего периода составляет 10 ден. ед. Количество оставленных голов скота в следующем году увеличивается на 100%. По истечении четырех лет фермер намеривается продать все стадо, так как переходит на производство другой продукции. Производственные помещения не позволяют ему содержать более 200 голов скота.

Найти оптимальный план продажи скота по годам четырехлетнего периода, при котором прибыль, полученная за этот период, будет максимальной.

Вариант 8. Разработать оптимальную политику использования и замены оборудования не старше шести лет, если известны: стоимость продукции r(t), производимой с использованием этого оборудования, ежегодные эксплуатационные расходы v(t), остаточная стоимость s и стоимость p нового оборудования. Продолжительность планового периода принять равной 6 годам. Задачу решить при следующих числовых данных: t=5, s=4, p=13, значения r(t) и v(t) приведены в табл. 6.11.

Таблица 6.11

t	0	1	2	3	4	5	6
r(t)	27	25	22	22	20	18	16
v(t)	11	12	14	15	15	17	18

Известны также остаточная стоимость s, равная 4 и не зависящая от возраста оборудования, и цена p нового оборудования, равная 13 и не меняющаяся в плановом периоде.

Вариант 9. Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Начальные средства равны 5 условным единицам. Раз- меры вложения в каждое предприятие кратны 1 условной единице. Средства, выделенные предприятию, приносят в конце года прибыль. Зависимость прибыли от объема вложения средств задана в табл. 6.12.

Таблица 6.12

Вложения, усл. ед.	Предприятия			
	1	2	3	4
1	0,2	1,0	2,1	0
2	0,9	1,1	2,5	2,0
3	1,0	1,3	2,9	2,5
4	1,2	1,4	3,9	3,0
5	2,0	1,8	4,9	4,0

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Вариант 10. На трех станках, работающих параллельно, необходимо изготовить 20 изделий. Накладные расходы (постоянные затраты на единицу обо- рудования), затраты на производство единицы продукции и максимальная производительность каждого станка указаны в табл. 6.13.

Таблица 6.13

Номер станка	Накладные расходы	Затраты на производство единицы продукции	Производительность каждого станка, изделий
1	10	10	6
2	30	2	8
3	20	5	1 2

Найти оптимальный план загрузки станков, минимизирующий затраты.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается основная задача динамического программирования?
2. Опишите особенности процесса принятия решения в динамическом программировании.
3. Какие операции называются многошаговыми?
4. Что понимается под термином «управляемые процессы»?
5. В чем состоит смысл принципа оптимальности?
6. Опишите поэтапный процесс решения задач динамического программирования.
7. Возможно ли разбиение решения сложных вычислительных задач методами динамического программирования?
8. Что понимается под термином «динамическое программирование»?
9. Чем характеризуется состояние управляемой системы S?
10. Что лежит в основе вычислительных алгоритмов динамического программирования?

Лабораторная работа № 7 Системы массового обслуживания

Цель работы: *освоить и закрепить практические навыки по использованию моделей систем массового обслуживания.*

Основы знаний об очередях, иногда называемые теорией очередей или теорией массового обслуживания, составляют важную часть теории управления производством. Очереди являются обычным явлением. Автомобиль ждет ремонта в центре автосервиса, студенты ждут консультацию со своим профессором.

В управлении производством можно использовать различные модели систем массового обслуживания. Опишем две наиболее часто встречающиеся в практике модели. Их характеристики даны в нижеприведенной таблице. Обе модели, описанные в табл. 7.1, имеют следующие общие характеристики: 1) пуассоновское распределение заявок; 2) правило обслуживания – FIFO (первым пришел – первым обслужен); 3) единственная фаза обслуживания.

Таблица 7.1

Модели систем массового обслуживания

Модель	Название	Пример	Число каналов	Число фаз	Темп поступления заявок	Темп обслуживания	Число клиентов	Порядок прохождения очереди
А	Простая система (M/M/1)	Справочное бюро в магазине	Один	Одна	Пуассоновское	Экспоненциальный	Неограниченное	FIFO
В	Равномерное обслуживание (M/D/1)	Автоматическая автомойка	Один	Одна	Пуассоновское	Постоянный	Неограниченное	FIFO

Модель А: *модель одноканальной системы массового обслуживания с пуассоновским входным потоком заявок и экспоненциальным временем обслуживания*

Наиболее часто встречаются задачи массового обслуживания с единственным каналом. В этом случае клиенты формируют единственную очередь, которая обслуживается одним рабочим местом.

Предположим, что для систем этого типа выполняются следующие условия:

1. Заявки обслуживаются по принципу: первым пришел – первым обслужен (FIFO), причем каждый клиент ожидает своей очереди до конца независимо от длины очереди.

2. Появления заявок являются независимыми событиями, однако среднее число заявок, поступающих в единицу времени, неизменно.

3. Процесс поступления заявок описывается пуассоновским распределением, причем заявки поступают из неограниченного множества.

4. Время обслуживания различно для разных клиентов и независимо друг от друга, однако средний темп обслуживания известен.

5. Время обслуживания описывается экспоненциальным распределением вероятностей.

6. Темп обслуживания выше темпа поступления заявок.

Формулы для описания модели А: простая система М/М/1

Число заявок в единицу времени, z. Число клиентов, обслуживаемых в единицу времени, b.

Среднее число клиентов в системе:Ls= $\frac{z}{b-z}$.

Среднее время обслуживания одного клиента в системе: Ws =$\frac{1}{b-z}$1 (время ожидания плюс время обслуживания).

Среднее число клиентов в очереди: Lq =$\frac{z^2}{b(b-z)}$.

Среднее время ожидания клиента в очереди: Wq = $\frac{z}{b(b-z)}$.

Параметр утилизации (загруженности системы): r = $\frac{z}{b}$.

Вероятность отсутствия заявок в системе: p_0 = 1- $\frac{z}{b}$.

Вероятность более чем k заявок в системе: $p_{n>k}$=(z/b)k+1 (n – число заявок в системе). Если эти условия выполняются, то система массового обслуживания описывается уравнениями, приведенными выше. Примеры 1 и 2 показывают, как может быть использована модель А (техническое наименование М/М/1).

Пример. Васильев, механик магазина, может заменить масло в среднем в трех автомобилях в течение 1 часа (т.е. в среднем у одного автомобиля за 20 мин). Время обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. Клиенты, нуждающиеся в этой услуге, приезжают в среднем по два в час в соответствии с пуассоновским распределением. Клиенты обслуживаются в порядке прибытия, и их число не ограничено. На основе этих данных мы можем получить основные характеристики этой системы обслуживания: z=2 машины поступают в час; b=3 машины обслуживаются в час;

$$Ls = \frac{z}{b-z} = \frac{2}{3-2} = 2$$ машины в среднем в системе;

$$Ws = \frac{1}{b-z} = \frac{1}{3-2} = 1$$ - среднее время ожидания в системе

$$Lq = \frac{z^2}{b(b-z)} = \frac{2^2}{3(3-2)} = \frac{4}{3} = 1{,}33$$ – машины в среднем ожидает в очереди;

$$Wq = \frac{z}{b(b-z)} = \frac{2}{3(3-2)} = \frac{2}{3} = 40 мин$$ среднее время ожидания в очереди;

$r = \frac{z}{b} = \frac{2}{3}$ = 66,6% - процентов времени механик занят;

p_0= $1-\frac{z}{b} = 1 - \frac{2}{3}$ = 0,33 – вероятность того, что в системе нет ни одного клиента. Вероятность более чем k машин в системе (табл. 7.2).

Таблица 7.2-

k	$p_{n>k}=(z/b)^{k+1}$	
0	0,667	Обратите внимание на то, что значение равно $1-p_0$=1-0,33
1	0,444	
2	0,269	
3	0,198,	Означает, что существует 19,8% шансов того, что в системе находится более трех машин
4	0,132	
5	0,088	
6	0,058	
7	0,039	

После того, как получены основные характеристики системы обслуживания, часто бывает полезным провести ее экономический анализ В частности, сопоставить возрастающие затраты на улучшение обслуживания и снижающие затраты, связанные с ожиданием. Рассмотрим эти затраты.

Владелец автосервиса установил, что затраты, связанные с ожиданием, выражаются в снижении спроса в связи с неудовлетворенностью клиентов и равны 10 тыс. руб. за час ожидания в очереди. Так как в среднем каждая машина ожидает в очереди 2/3 ч (Wq), и в день обслуживается приблизительно шестнадцать машин (две машины в час в течение восьмичасового рабочего дня), общее число часов, которое проводят в очереди все клиенты, равно

2/3 16=32/3=10 2/3 ч.

Следовательно, затраты, связанные с ожиданием, составляют 10 (10 2/3)=107 тыс. руб. в день.

Другая важная составляющая затрат владельца автосервиса – зарплата механика Васильева. Он получает 7 тыс. руб. в час или 56 тыс. руб. в день. Следовательно, общие затраты составляют

107+56=163 тыс. руб. в день.

Модель В*: модель с постоянным временем обслуживания (M/D/1)*

Некоторые системы имеют постоянное, а не экспоненциально распределенное время обслуживания. В таких системах клиенты обслуживаются в течение фиксированного периода времени, как, например, на автоматической мойке автомобилей. Для модели B с постоянным темпом обслуживания значения величин Lq, Wq, Ls и Ws меньше, чем соответствующие значения в модели A, имеющей переменный темп обслуживания. В литературе по теории очередей модель B имеет техническое наименование M/D/1.

Средняя длина очереди: Lq=$\frac{z^2}{2\,b\,(b-z)}$.

Среднее время ожидания в очереди: Wq= $\frac{z}{2\,b\,(b-z)}$.

Среднее число клиентов в системе: Ls =Lq+$\frac{z}{b}$.

Среднее время ожидания в системе: Ws =Wq+$\frac{1}{b}$.

Пример. Компания «Утиль» собирает и утилизирует в Мытищах алюминиевые отходы и стеклянные бутылки. Водители автомобилей, доставляющие сырье для вторичной переработки, ожидают в очереди на разгрузку в среднем 15 мин. Время простоя водителя и автомобиля оценивается в 60 тыс. руб. в час. Новый автоматический компактор может обслуживать контейнеровозы с постоянным темпом 12 машин в час (5 мин на одну машину). Время прибытия контейнеровозов подчиняется пуассоновскому закону с параметром z=8 в час. Если будет использоваться новый компактор, то амортизационные затраты составят 3 тыс. руб. на один контейнеровоз. Фирма пригласила студента, который провел следующий анализ, для оценки целесообразности использования компактора: Затраты в настоящее время: (1/4 ч ожидания) (60 тыс. руб./ч)=-15 тыс.руб./поездка.

Новая система: z=8 автомобилей/ч прибывают;

b=12 автомобилей/ч обслуживается.

Среднее время ожидания в очереди: Wq=$\frac{z}{2\,b\,(b-z)} = \frac{8}{2*12(12-8)} =\frac{1}{12}$ ч.

Затраты с новым компактором: (1/12 ч ожидания) (60 тыс. руб./ч)=5 тыс. руб./поездка.

Доход при новом оборудовании: 15 (существующая система)–5 (новая система)=10 тыс. руб./поездка.

Амортизационные затраты: 3 тыс. руб./поездка.

Чистый доход: 7 тыс. руб./поездка.

Индивидуальное задание

Решить задачу согласно вашему варианту, используя модели массового обслуживания.

Вариант 1. Система банка «Автодор» позволяет клиенту совершать некоторые банковские операции, не выходя из машины. Утром в рабочие дни прибывает в среднем 24 клиента в час. Прибытие клиентов описывается законом Пуассона.

1. Сколько клиентов в среднем прибывает за 5 мин?

2. Каковы вероятности того, что ровно 0, 1, 2, 3 клиента прибудут за 5 мин?

3. Если в течение 5 мин прибывает более трех клиентов, то возникает проблема перегруженности системы. Какова вероятность возникновения такой проблемы?

В системе банка «Автодор» время обслуживания распределено экспоненциально со средней скоростью обслуживания 36 клиентов в час.

4. Каковы вероятности того, что время обслуживания составит:

а) не более 1 мин, б) не более 2 мин, с) более 2 мин?

5. Определите следующие характеристики системы:

вероятность того, что в системе нет требований;

среднее число требований в очереди;

среднее число требований в системе;

среднее время ожидания;

среднее время, которое клиент проводит в системе;

вероятность того, что прибывающему клиенту придется ждать обслуживания;

вероятность того, что в системе находятся: а) 0 клиентов, б) 3 клиента и в) более 3 клиентов.

Вариант 2. Справочная университетской библиотеки получает запросы, поступающие по пуассоновскому закону со скоростью в среднем 10 запросов в час. Время обслуживания распределено экспоненциально, скорость обслуживания – 12 запросов в час. Определите:

вероятность того, что в системе нет запросов;

среднее число запросов в очереди;

среднее время ожидания;

среднее время, которое запрос проводит в системе:

вероятность того, что запросу придется ждать обслуживания.

Вариант 3. Грузовики, прибывающие на обслуживание в порт, образуют одноканальную очередь. Их прибытие распределено по закону Пуассона.

Время погрузки / разгрузки распределено экспоненциально. Средняя скорость прибытия – 12 грузовиков в день, обслуживания – 18 грузовиков в день. Определите:

вероятность того, что в системе нет грузовиков;

среднее число грузовиков в очереди;
среднее время ожидания;
вероятность того, что прибывающему грузовику придется ждать обслуживания.

Вариант 4. Контора принимает обрабатываемые единственным клерком заказы, поступающие по закону Пуассона со средней скоростью 6 заказов в день. Время на их обработку распределено экспоненциально со средним уровнем обслуживания 8 заказов в день. Определите:

среднее число заказов в системе;
среднее время ожидания начала обработки заказа клерком;
среднее время, которое заказ проводит в системе.

Вариант 5. В парикмахерской работает один мастер. Клиенты приходят со средней скоростью 2,2 человека в час, средний уровень обслуживания – 5 человек в час. Прибытие клиентов подчинено закону Пуассона, а время обслуживания распределено экспоненциально. Определите:

вероятность того, что в системе нет требований;
вероятность того, что один клиент стрижется и никто другой не ждет;
вероятность того, что один клиент стрижется и еще один ждет:
вероятность того, что один клиент стрижется и еще два ждут;
вероятность того, что более двух клиенток ждут;
среднее время ожидания.

Вариант 6. Автосервис решил нанять нового механика для того, чтобы он менял старые покрышки на новые. На это место есть два кандидата. Один

из них имеет ограниченный опыт и может быть нанят за 7 тыс. руб./ч. Ожидается, что этот механик сможет обслуживать трех клиентов в час. Другой механик более опытен, он в состоянии обслужить четырех клиентов в час, но его можно нанять на работу за 10 тыс. руб./ч. Клиенты прибывают со скоростью 2 человека в час. Предполагая пуассоновское распределение времени прибытия и экспоненциальное распределение продолжительности времени обслуживания, определите:

среднее время, которое клиент проводит в очереди;
среднюю длину очереди;
среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;
среднее число клиентов в системе обслуживания;
вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой при условии найма одного или другого механика.

Компания оценивает издержки по ожиданию клиентами своей очереди в 15 тыс. руб./ч. Какого механика следует нанять, чтобы обеспечить меньшие совокупные издержки? Каковы минимальные совокупные издержки?

Вариант 7. Фирма «Уют» обеспечивает своим клиентам помощь в дизайне дома или офиса. В нормальном режиме каждый час прибывает в среднем 2,5 клиента. Единственный консультант по дизайну отвечает на вопросы клиента и дает необходимые рекомендации. Он тратит на каждого посетителя в среднем 10 мин. Предполагая пуассоновское распределение времени прибытия и экспоненциальное распределение продолжительности обслуживания, определите:

среднее время, которое клиент проводит в очереди;

среднюю длину очереди;

среднее время, которое клиент проводит в системе обслуживания;

среднее число клиентов в системе обслуживания;

вероятность того, что система обслуживания окажется незанятой.

Желательно, чтобы прибывающий клиент не ждал своей очереди в среднем более 5 мин. Соответствует ли реальная ситуация данному пожеланию? Если нет, то что необходимо предпринять? Предположим, что консультант способен уменьшить среднее время, которое он проводит с клиентом, до 8 мин. Какой стала средняя скорость обслуживания? Достигнута ли цель теперь?

Вариант 8. «У Петра» – маленький магазин с одним прилавком. Предположим, что покупатели прибывают в магазин по закону Пуассона со средней скоростью 15 покупателей в час. Время обслуживания распределено экспоненциально, средняя скорость обслуживания – 20 покупателей в час. Рассчитайте:

среднее время, которое покупатель проводит в очереди,

среднюю длину очереди,

среднее время, которое покупатель проводит в магазине,

среднее число покупателей в магазине,

вероятность того, что в магазине не окажется покупателей.

Вариант 9. В верхнем течении Волги построена новая станция по обслуживанию речных судов. Судно может остановиться в новом доке для за правки и ремонта. Суда прибывают по закону Пуассона со средней скоростью 5 судов в час. Время обслуживания распределено экспоненциально со средней скоростью обслуживания10 судов в час.

1. Какова вероятность того, что док будет пуст?
2. Каково среднее число судов в очереди?
3. Каково среднее время ожидания обслуживания?

4. Каково среднее время пребывания в доке?

Вариант 10. Пациенты прибывают к дантисту со средней скоростью 2,8 человека в час. Дантист в среднем способен обслужить 3 человека в час. Наблюдения показывают, что в среднем пациент ждет 30 мин. Чему равны средние скорости прибытия и обслуживания, выраженные в пациентах в минуту? Какова средняя длина очереди?

Контрольные вопросы

1. Что такое одноканальная система?
2. Что такое однофазовая система?
3. Что такое очередь?
4. Что такое распределение времени обслуживания?
5. Что означает и как определяется среднее время в очереди?
6. Что означает и как определяется среднее время в системе?
7. Что означает и как определяется среднее число клиентов в очереди?
8. Что означает и как определяется среднее число клиентов в системе?
9. Что означает и как определяется средний темп поступления заявок?
10. Что означает и как определяется средняя длина очереди?

Лабораторная работа № 8 Модели управления запасами

Цель работы: *освоить и закрепить практические навыки по использованию моделей управления запасами.*

Запасами называется любой ресурс на складе, который используется для удовлетворения будущих нужд. Примерами запасов могут служить полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также такие специфические товары, как денежная наличность, находящаяся в хранилище. Большинство организаций имеют примерно один тип системы планирования и контроля запасов. В банке используются методы контроля за количеством наличности, в больнице применяются методы контроля поставки различных медицинских препаратов.

Существует много причин, побуждающих организации создавать запасы.

Существует проблема классификации имеющихся в наличии запасов. Для решения этой задачи используется методика административного наблюдения. Цель ее заключается в определении той части запасов предприятия, которая требует наибольшего внимания со стороны отдела снабжения. Для этого каждый компонент запасов рассматривается по двум параметрам: а) его доля в общем количестве запасов предприятия; б) его доля в общей стоимости запасов предприятия.

Методика 20/80 – в соответствии с этой методикой компоненты за- паса, составляющие 20% его общего количества и 80% его общей стоимости, должны отслеживаться отделом снабжения более внимательно.

Методика АВС: в рамках этой методики запасы, имеющиеся в распоряжении предприятия, разделяются на три группы: группу А (10% общего количества запасов и 65% его стоимости); группу В (25% общего количества запасов и 25% его стоимости); группу С (65% общего количества запасов и около 10% его стоимости).

Необходимо отметить, что классификация запасов может быть основана не только на показателях доли в общей стоимости и в общем количестве. Преимущества методики деления видов запасов на классы заключаются в возможности выбора порядка контроля и управления для каждого из них.

Рассмотрим определяющие понятия теории управления запасами.

Издержки выполнения заказа (издержки заказа) – накладные расходы, связанные с реализацией заказа. В промышленности такими издержками являются затраты на подготовительно-заготовочные операции.

Издержки хранения – расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражаются или в абсолютных единицах, или в процентах от закупочной цены и связываются с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль – издержки, связанные с неудовлетворенным спросом, возникающим в результате отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенного дохода. Иногда к ним прибавляются издержки на покупку товаров.

Срок выполнения заказа – срок между заказом и его выполнением. Точка восстановления – уровень запаса, при котором делается новый заказ.

1. Модель оптимального размера заказа

Предпосылки: 1) темп спроса на товар известен и постоянен; 2) получение заказа мгновенно; 3) отсутствуют количественные скидки при закупке больших партий товара; 4) единственные меняющиеся параметры – издержки заказа и хранения; 5) исключается дефицит в случае своевременного заказа.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа и хранения.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами и их количество за период.

2. *Модель оптимального размера заказав предположении, что получение заказа не мгновенно*

Следовательно, нужно найти объем запасов, при котором необходимо делать новый заказ.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа и хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса.

3. *Модель оптимального размера заказав предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль*

Необходимо найти точку восстановления.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа и хранения, упущенная прибыль.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса.

4. *Модель с учетом производства*

(в сочетании с условиями 1–3)

Необходимо рассматривать уровень ежедневного производства и уровень ежедневного спроса.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, хранения и упущенная прибыль, темп производства.

Результат: оптимальный уровень запасов (точка восстановления запаса).

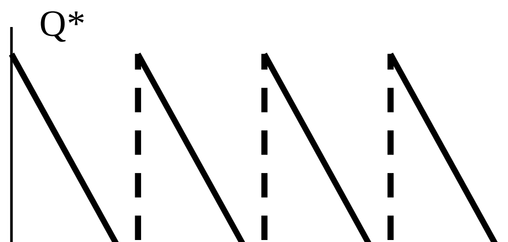
5. *Модель с количественными скидками*

Появляется возможность количественных скидок в зависимости от размера заказа. Рассматривается зависимость издержек хранения от цены товара. Оптимальный уровень заказа определяется исходя из условия минимизации общих издержек для каждого вида скидок.

Модели типа 1–5 с вероятностным распределением спроса и времени выполнения заказа

Вместо предпосылки о постоянстве и детерминированности спроса на товар используется более реалистичный подход о предполагаемой известности распределения темпа спроса и времени выполнения заказа.

Рассмотрим подробнее модели с фиксированным размером заказа:
Модель 1. Модель наиболее экономичного размера заказа. Заказ, пополняющий запасы, поступает как одна партия. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает нуля. В этой точке поступает заказ, размер которого равен Q, и уровень запасов восстанавливается до максимального значения. При этом оптимальным решением задачи будет тот размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период (рис. 8.1)



Время Рис. 8.1. Модель 1. Модель наиболее экономичного размера заказа

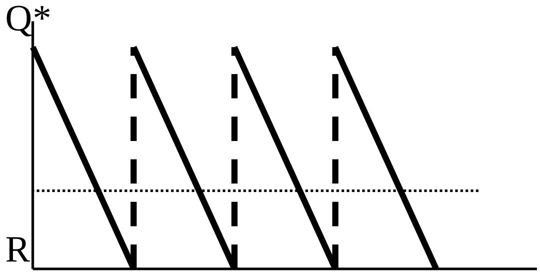
Пусть Q – размер заказа; T – протяженность периода планирования; D – величина спроса за период планирования; d – величина спроса в единицу времени; K – издержки заказа; H – удельные издержки хранения за период; h – удельные издержки хранения в единицу времени. Тогда:

(D/Q)K – совокупные издержки заказа; (Q/2)H – совокупные издержки хранения; d=D/T; h=H/T;

$Q^*=(2dK/h)^{1/2}$ $(2DK/H)^{1/2}$ – оптимальный размер заказа; $N=D/Q^*$ – оптимальное число заказов за период;

$t^*=Q^*/d=T/N$ – время цикла (оптимальное время между заказами).

Модель 2. Введем предположение о том, что заказ может быть получен не мгновенно, а с течением времени. Тогда нам необходимо заранее делать заказ, чтобы в нужное время иметь достаточное количество товара на складе. Следовательно, нам необходимо найти тот уровень запасов, при котором делается новый заказ. Этот уровень называется точкой восстановления R. Пусть L – время выполнения заказа. Тогда R – величина спроса в единицу времени, умноженная на время выполнения заказа (d L). Другие характеристики системы определяются так же, как и в модели 1. Модель иллюстрируется на рис. 8.2.



Время Рис. 8.2. Модель 2

Пример 1. Андрей является торговым агентом компании «VOLVO» и занимается продажей последней модели этой марки автомобиля.

Годовой спрос оценивается в 4000 ед. Цена каждого автомобиля равна 90 млн руб., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля.

Андрей произвел анализ издержек заказа и понял, что средние издержки заказа составляют 25 млн руб. на заказ. Время выполнения заказа равно восьми дням. В течение этого времени ежедневный спрос на автомобили равен 20.

Необходимо в процессе решения данного примера ответить на следующие вопросы:

1. Чему равен оптимальный размер заказа?
2. Чему равна точка восстановления?
3. Каковы совокупные издержки?
4. Каково оптимальное количество заказов в год?
5. Каково оптимальное время между двумя заказами, если предположить, что количество рабочих дней в году равно 200?

Ниже приведено описание исходных данных и результаты решения контрольного примера с использованием условных обозначений.

Исходные данные: величина спроса за год D=4000; издержки заказа K=25; издержки хранения =9/200; цена за единицу c=90;

время выполнения заказа L=8; ежедневный спрос d=20; число рабочих дней T=200.

Решение: оптимальный размер заказа Q*=149; точка восстановления R=160–149=11; число заказов за год N=26,83; совокупные издержки C=1341; стоимость продаж =360 000;

число дней между заказами t=7,45.

Модель 3. Модель оптимального размера заказа в предположении, что допускается дефицит продукта и связанная с ним упущенная прибыль (рис. 8.3)

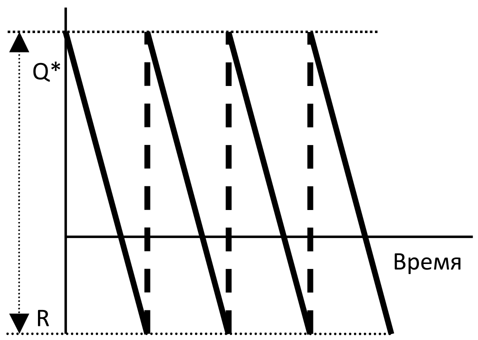


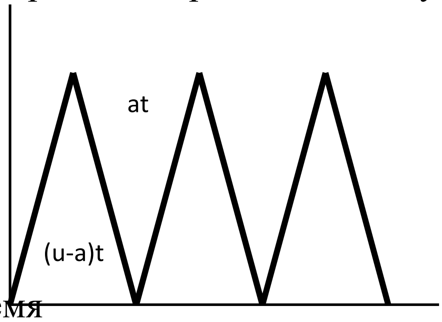
Рис. 8.3. Модель 3

Пусть p – упущенная прибыль в единицу времени, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта; P – упущенная прибыль за период, возникающая в результате дефицита одной единицы продукта.

Тогда: $Q^*=(2dK/h)^{1/2}\ ((p+h)/p)^{1/2}=(2DK/H)^{1/2}\ ((P+H)/P)^{1/2}$ – оптимальный размер заказа; $S^*=(2dK/h)^{1/2}\ (p/(h+p))^{1/2}=(2DK/H)^{1/2}\ (P/(H+P))^{1/2}$ – максимальный размер запаса; R=Q*–S* – максимальный дефицит.

Модель 4. Модель производства и распределения. В предыдущей модели мы допускали, что пополнение запаса происходит единовременно. Но в некоторых случаях, особенно в промышленном производстве, для комплектования партии товаров требуется значительное время, и производство товаров для пополнения запасов происходит одновременно с удовлетворением спроса. Такой случай показан на рис. 8.4.

S*



Время

Рис. 8.4. Модель 4

Спрос и производство являются частью цикла восстановления запасов. Пусть u – уровень производства в единицу времени, К – фиксированные издержки производства.

Тогда:

совокупные издержки хранения = (средний уровень запасов) H= =Q/2[1-d/u] H;

средний уровень запасов = (максимальный уровень запасов)/2;
максимальный уровень запасов =u t–d t=Q(l–d/u);

время выполнения заказа t=Q/u; издержки заказа =(D/Q) К;

оптимальный размер заказа $Q^*=(2dK/h\ [(l-(d/u)])^{1/2}=(2DK/H[(l-(d/u)])^{1/2}$;
максимальный уровень запасов S*=Q*[(l-(d/u)].

Модель 5. Модель с количественными скидками. Для увеличения объема продаж компании часто предлагают количественные скидки своим покупателям.

Количественная скидка – сокращенная цена на товар в случае покупки большого количества этого товара. Типичные примеры количественных скидок приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Варианты скидок	1	2	3
Количество, при котором делается скидка	от 0 до 999	от 1000 до 1999	от 2000 и выше
Размер скидки, %	0	3	5
Цена со скидкой	5	4,8	4,75

Пусть I – доля издержек хранения в цене продукта **c**.

Тогда h=(I c)·и $Q^*=(2dK/(I\ c))^{1/2}$ – оптимальный размер заказа.

Пример 2. Рассмотрим пример, объясняющий принцип принятия решения в условиях скидки. Магазин "Медвежонок" продает игрушечные гоночные машинки. Эта фирма имеет таблицу скидок на машинки в случае покупок их в определенном количестве (табл. 8.2). Издержки заказа составляют 49 тыс. руб. Годовой спрос на машинки равен 5000. Годовые издержки хранения в отношении к цене составляют 20%, или 0,2. Необходимо найти размер заказа, минимизирующий общие издержки.

Решение: Рассчитаем оптимальный размер заказа для каждого вида скидок, т.е. Q1*, Q2* и Q3*, и получим Q1*=700; Q2*=714; Q3*=718.

Так как Q1* – величина между 0 и 999, то ее можно оставить прежней. Q2* меньше количества, необходимого для получения скидки, следовательно, его значение необходимо принять равным 1000 единиц. Аналогично Q3* берем равным 2000 единиц. Получим Q1*=700; Q2*=1000; Q3*=2000.

Далее необходимо рассчитать общие издержки для каждого разме- ра заказа и вида скидок, а затем выбрать наименьшее значение.

Рассмотрим следующую таблицу:

Таблица 8.2

Вид скидки	1	1	3
Цена	5	4,8	4,75
Размер заказа	700	1000	2000
Цена на товар за год	25 000	24 000	23 750
Годовые издержки заказа	350	245	122,5
Годовые издержки хранения	350	480	950
Общие годовые издержки	25 700	24 725	24 822,5

Выберем тот размер заказа, который минимизирует общие годовые издержки. Из таблицы видно, что заказ в размере 1000 игрушечных гоночных машинок будет минимизировать совокупные издержки.

Индивидуальное задание

Решить задачу согласно вашему варианту, используя модели управления запасами.

Вариант 1. Господин Бобров приобретает в течение года 1500 телевизоров для розничной продажи в своем магазине. Издержки хранения каждого телевизора равны 45 тыс. руб. в год. Издержки заказа – 150 тыс. руб. Количество рабочих дней в году равно 300, время выполнения заказа – 6 дней. Необходимо найти:

оптимальный размер заказа;

годовые издержки заказа;

точку восстановления запаса.

Вариант 2. Анна Васильева из компании «Сюрприз» продает 400 водяных кроватей в год, причем издержки хранения равны 1 тыс. руб. за кровать в день и издержки заказа – 40 тыс. руб. Количество рабочих дней равно 250 и время выполнения заказа – 6 дней. Каков оптимальный размер заказа? Чему равна точка восстановления запаса? Каков оптимальный размер заказа, если издержки хранения равны 1,5 тыс. руб.?

Вариант 3. Мекки Мессер является владельцем маленькой компании, которая выпускает электрические ножи. В среднем Мекки может производить 150 ножей в день. Дневной спрос на ножи примерно равен 40. Фиксированные издержки производства равны 100 тыс. руб., издержки хранения – 8 тыс. руб. за нож в год. Какой максимальный заказ следует иметь на складе?

Вариант 4. Компания «Веселые ребята» закупает у завода-изготовителя лобовые стекла грузовых автомобилей «Урал» для розничной продажи. В год, за 200 рабочих дней, реализуется около 10 000 стекол. Издержки заказа для компании составляют 400 тыс. руб., ежедневные издержки хранения одного стекла – 6 тыс. руб. Чему равен оптимальный размер заказа? Каковы минимальные годовые совокупные издержки?

Вариант 5. Годовой заказ на тостер «Слава» для салона Марии Мягковой равен 3000 единиц, или 10 в день. Издержки заказа равны 25 тыс. руб. из держки хранения – 0,4 тыс. руб. в день. Так как тостер «Слава» является очень популярным среди покупателей, то в случае отсутствия товара покупатели обычно согласны подождать, пока не подойдет следующий заказ. Однако издержки, связанные с дефицитом, равны 0,75 тыс. руб. за тостер в день. Сколько тостеров будет заказывать Мария? Каков максимальный дефицит? Чему равны совокупные издержки?

Вариант 6. Магазин «Природа» пользуется популярностью у покупателей благодаря широкому ассортименту экологически чистых продуктов. Большинство покупателей не отказываются от услуг магазина даже в том случае, когда интересующий их товар отсутствует в продаже. Они оставляют заказ на товар и ждут, когда поступит новая партия.

Сыр «Витаум» – не самый популярный из всего набора товаров, но администратор магазина регулярно заказывает этот продукт. Годовой спрос на «Витаум» составляет 500 головок сыра. Издержки заказа – 40 тыс. руб. за заказ. Издержки хранения – 5 тыс. руб. в год. Упущенная прибыль вследствие дефицита составляет 100 тыс. руб. за год на одну головку сыра.

Сколько головок сыра следует заказывать, чтобы не допустить дефицита и иметь при этом минимальные общие издержки? Сколько сыра следует заказывать, если допустить возможность дефицита? Чему равна точка восстановления запаса, если время выполнения заказа составляет 10 дней и число рабочих дней в году 250? Чему равен максимальный размер дефицита?

Вариант 7. Компания «Химпласт» предлагает следующие скидки для линолеума размером 2 3 м (табл. 8.3).

Таблица 8.3

Размер заказа	9 кусков или менее	10–50 кусков	50 кусков и более
Цена 1 куска	18 тыс. руб.	17,5 тыс. руб.	17,25 тыс. руб.

Магазин «Все для дома» заказывает у компании линолеум. Издержки заказа равны 45 тыс. руб. Годовые издержки хранения равны 50% от цены. Годовой спрос на линолеум в магазине составляет 100 кусков. Какое количество необходимо приобрести?

Вариант 8. Мебельный салон «Антика» продает в год около 1000 спальных гарнитуров по цене 50 млн руб. Размещение одного заказа на поставку гарнитуров обходится в 40 млн руб. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 25% его цены. Салон может получить 3%-ную скидку у поставщика, если размер заказа составит не менее 200 гарнитуров. Следует ли салону заказывать 200 или более гарнитуров и пользоваться скидкой?

Вариант 9. Обычная оптовая цена аудиоколонок для автомагнитолы – 20 тыс. руб. В случае заказа от 75 до 90 колонок цена сокращается до 18,5 тыс. руб. При заказе более 100 колонок цена снижается до 15,75 тыс. руб. Издержки заказа для компании «Эхо», являющейся производителем колонок, равны 10 тыс. руб., годовые издержки хранения – 5% от стоимости колонки. Ежедневная величина спроса в течение 250 дней реализации в году – 25 колонок. Каков оптимальный размер заказа и чему равны минимальные средние ежедневные издержки?

Вариант 10. Компания «Интегро» продает в год около 2000 шкафов-купе по цене 40 тыс. руб. Размещение одного заказа на поставку шкафов-купе обходится в 30 тыс. руб. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 20% его цены. Компания может получить 5%-ную скидку у поставщика, если размер заказа составит не менее 300 гарнитуров. Следует ли салону заказывать 300 или более гарнитуров и пользоваться скидкой?

Контрольные вопросы

1. Что такое время выполнения заказа?
2. Что такое время цикла?

3. Что такое запас?
4. Что такое издержки заказа?
5. Что такое издержки хранения?
6. Что такое точка восстановления?
7. Что такое упущенная прибыль?
8. Какие модели управления запасами вы знаете?
9. Опишите модель оптимального размера заказа.
10. Опишите модель заказа с количественными ссылками

Список литературы

1. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учеб. пособие / Под ред. Б.А. Лагоши. – М.: Финансы и статистика, 2002.
2. Системный анализ в управлении: Учеб. пособие / Под ред. А.А. Емельянова. – М.: Финансы и статистика, 2002.
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов / Под ред. В.В. Федоссева. – М.: ЮНИТИ, 2002.
4. Теория систем и системный анализ: Учебное пособие Клименко И. С. Издательство Российский новый университет ISBN 978-5-89789-093-Год 2018 Страниц 264 https://e.lanbook.com/reader/book/162178/#1