МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ

Абдулгалимов А.М., Саидова Ш.А.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Вычислительные методы»
Часть 1 - Численное решение нелинейных уравнений

Махачкала, 2021 г.

УДК 681.3

Учебно-методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Вычислительные методы». Часть 1 - Численное решение нелинейных уравнений. Махачкала, ДГТУ, 2021, 32 с.

Учебно-методические указания предназначены для студентов дневной и заочной форм обучения направления подготовки бакалавров 09.03.03 - «Прикладная информатика», профиль «Прикладная информатика в экономике».

Часть 1 учебно-методических указаний содержит основные теоретические сведения о численных методах решения нелинейных уравнений, блок-схемы алгоритмов, методические примеры, индивидуальные задания к выполнению лабораторных работ.

Составители: Абдулгалимов А.М., зав. кафедрой ИТиПИвЭ, д.э.н., профессор.;
Саидова Ш.А., ст.преп. кафедры ИТиПИвЭ, ..

Рецензенты: Нурмагомедов А.М., зав. кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «ДГТУ», к.ф.-м.н., доцент;
Джабраилов Х.С., директор ООО «Информационно-внедренческий центр «Сигма», к.э.н.

Печатается по решению Совета Дагестанского технического университета от «______»______________2021 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Внедрение ЭВМ во все сферы человеческой деятельности требует от специалистов разного профиля овладения навыками использования вычислительной техники. Органической частью фундаментальной подготовки студентов является изучение таких направлений применения ЭВМ, как основы вычислительной техники и программирования, численные методы решения инженерных и экономических задач, методы оптимизации и оптимального управления и т.д.

Данные учебно- методические указания посвящены вопросам практического использования вычислительных методов.

Вычислительные методы и алгоритмы разрабатывают и исследуют, как правило, высококвалифицированные специалисты-математики. Что касается подавляющей части студентов, то для них главной задачей является понимание основных идей методов, особенностей и областей их применения.

В данной работе приводятся основные необходимые сведения о вычислительных методах решения нелинейных уравнений с *одной переменной*. Для рассматриваемых методов приводятся методические примеры, геометрическая интерпретация методов. блок-схемы алгоритмов, а также индивидуальные задания.

В нумерации параграфов, формул, таблиц первая цифра соответствует номеру лабораторной работы, а вторая – порядковому номеру параграфа, формулы и таблицы в лабораторной работе.

Решение задач ориентировано на использование ПЭВМ, языков программирования C++, C# и интегрированной среды Visual Studio. Указания являются полезными при выполнении лабораторных работ по курсам:

- прогнозирование социально-экономических процессов;
- информационная безопасность;
- технико-экономический анализ деятельности предприятий;
- исследование операций и методы оптимизации.

Лабораторная работа №1

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

1.1. Введение

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде:

$$f(x) = 0 \qquad (1.1.)$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a,b]$.

Всякое число $\xi \in [a,b]$, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т. е. такое, при котором $f(\zeta) = 0$, называется корнем уравнения (1.1). Число ξ называется корнем *k-й* кратности, если при $x = \xi$ вместе с функцией $f(x)$ равны нулю ее производные до (k-1)-го порядка включительно:

$$f(\xi) = f^{'}(\xi) = ... = f^{(k-1)}(\xi) = 0 .$$

Однократный корень называется простым.

Два уравнения *f(x)=0* и g*(x)=0* называются *равносильными* (эквивалентными), если всякое решение каждого из них является решением и для другого, т. е. множества решений этих уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одним неизвестным подразделяются на *алгебраические* и *трансцендентные.*

Уравнение (1.1) называется алгебраическим, если функция $f(x)$ является алгебраической функцией. Причем оно в данном случае называется нелинейной, если неизвестная входит в него выше, чем в первой степени. Путем алгебраических преобразований из всякого, алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ —коэффициенты уравнения, а x - неизвестная. Показатель *n* называют степенью алгебраического уравнения.

Известно, что всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один корень вещественный или комплексный.

При приведении алгебраического уравнения (1.1) к канонической форме будем иметь те же корни, что и для исходного уравнения.

Однако при этом могут появиться некоторые лишние корни. Например, уравнение

$$\sqrt{2x^2-1}+x=\sqrt{2x^2+1}-1$$

может быть приведено к канонической форме:

$$7x^4+12x^3+2x^2-4x-5=0\,.$$

Если функция *f(x)* не является алгебраической - показательной, логарифмической, тригонометрической, то уравнение (1.1) называется трансцендентным. Примерами трансцендентных уравнений являются:

$x - 10\sin(x) = 0$; $2x - 2\cos(x) = 0$; $\lg(x+5) = \cos(x)$.

В некоторых случаях решение трансцендентных уравнений можно свести к решению алгебраических уравнений.

Поскольку подавляющее большинство нелинейных уравнений с одной переменной не решается путем аналитических преобразований (точными методами), на практике их решают только численными методами. Решить такое уравнение — это значит: установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней с заданной точностью.

Мы будем предполагать, что уравнение (1.1) имеет лишь изолированные корни, т е. для каждого корня уравнения (1.1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Задача численного нахождения изолированных действительных и комплексных корней уравнения (1.1) обычно состоит из двух этапов: отделение корней, т. е. нахождение достаточно малых окрестностей рассматриваемой области, в которых содержится одно значение корня, и уточнение корней, т. е. вычисление корней с заданной степенью точности в некоторой окрестности.

В дальнейшем будем рассматривать численные методы нахождения действительных корней уравнения (1.1). Наиболее распространенными на практике численными методами решения уравнения (1.1) являются: метод половинного деления, метод хорд, метод касательных (метод Ньютона), комбинированный метод, метод простых итераций. Применение того или иного численного метода для решения уравнения (1.1) зависит от числа корней, задания исходного приближения и поведения функции *f(x)*.

1.2. Отделение корней

Первый этап численного решения уравнения (1.1) состоит в отделении корней, т. е. в установлении «тесных» промежутков, содержащих только один корень.

Для отделения корней полезна известная теорема из математического анализа.

Теорема 1.1. Если непрерывная на [a,b] функция *f(x)* принимает значения разных знаков на концах отрезка [a, b], т.е. $f(a)\cdot f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения *f(x) = 0*, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in (a, b)$ такое, что $f(\xi) = 0$.

Корень ξ, заведомо будет единственным, если производная *f(x)* существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (a, b).

Способов отделения корней много. Корни можно отделить графически, аналитически, используя экономическую суть решаемой задачи и т.д. После отделения корней их можно уточнить методами последовательных приближений. Наглядным примером использования графичесого метода отделения корней может служить решение уравнения *sinx=1/3.*

Отделение корней во многих случаях можно произвести графически. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1.1) - это точки пересечения графика функции *f(x)* с осью абсцисс, достаточно построить график *f(x)* и отметить на оси *Ox* отрезки, содержащие по одному корню. Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1.1) равносильным ему уравнением

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{1.2}$$

В этом случае строятся графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом на оси *Ox* отмечаются отрезки, локализующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 1. 1. Для графического отделения корней уравнения *sin(2x) – ln(x) = 0* выгодно отдельно построить графики функций sin(2x) и ln*(x)* (рис. 1.1).

Из графика следует, что уравнение имеет корень, принадлежащий отрезку [1; 1,5|.

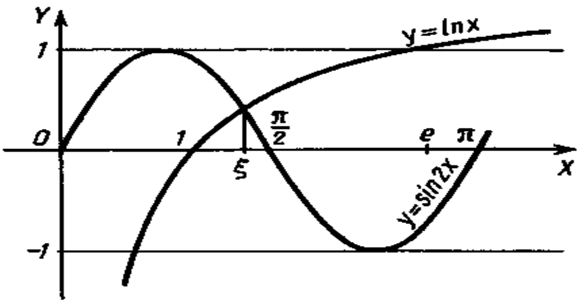

Рис. 1.1

В сомнительных случаях графическое отделение корней необходимо подкрепить вычислениями. При этом полезно использовать следующие очевидные положения:

1) если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$), то уравнение (1.1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень;

2) если функция $f(x)$ к тому же еще и строго монотонна, то корень на отрезке $[a;\ b]$ единственный.

Вычислим для проверки с помощью калькулятора значения функции $f(x)=\sin(2x)-\ln(x)$ на концах отрезка [1; 1,5]:

$$f(1)=0{,}909298; \qquad f(1{,}5)=-0{,}264344.$$

Из рисунка 1 видно, что на отрезке [1; 1,5] имеется единственный корень исходного уравнения.

Рассмотренный прием позволяет при желании сузить отрезок, полученный графическим способом. Так, в нашем примере имеем $f(1{,}3)=0{,}25314>0$, так что отрезком отделения корней можно считать [1,3; 1,5].

Для отделения корней можно эффективно использовать ЭВМ.

Пусть имеется уравнение $f(x)=0$, причем можно считать, что все интересующие нас корни находятся на отрезке $[A;\ B]$, в котором функция $f(x)$ определена, непрерывна и $f(A)\cdot f(B)<0$. Требуется отделить корни уравнения, т. е. указать все отрезки $[a;\ b]\subset[A;\ B]$, содержащие по одному корню.

Будем вычислять значения $f(x)$, начиная с точки $x=A$, двигаясь вправо с некоторым шагом h (рис. 1.2).

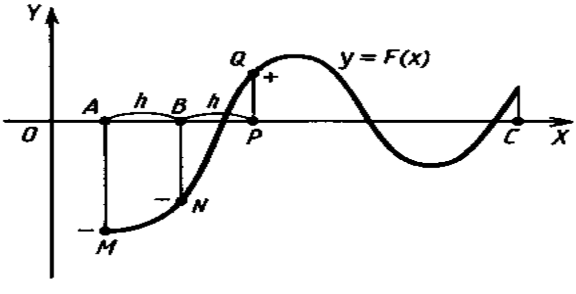

Рис. 2

Рис. 1.2.

Как только обнаружится пара соседних значений $f(x)$, имеющих разные знаки, и функция $f(x)$ монотонна на этом отрезке, так соответствующие значения точек на оси абсцисс (предыдущее и последующее) можно считать концами отрезка, содержащего корень.

Схема соответствующего алгоритма изображена на рисунке 1.3. Результатом решения поставленной задачи будут выводимые на дисплей (или на печать) в цикле значения параметров x_1 и x_2 (концов выделенных отрезков). Исходные данные для алгоритма отделения корней, приведенного на рис. 1.3, следующие:

f(x) - непрерывная функция, корни которой отделяются;

α – левый конец отрезка отделения корней;

β – правый конец отрезка отделения корней;

h – шаг, с которым двигаемся вправо по оси абсцисс.

Шаг h, с которым двигаемся вправо по оси абсцисс для отделения корней можно уменьшить или увеличить. Обычно его размер подбирается в результате анализа поведения функции *f(x),* корни которой мы ищем на отрезке [α ; β].

По схеме алгоритма отделения корней, изображенной на рисунке 1.3, легко составить программу для ЭВМ.

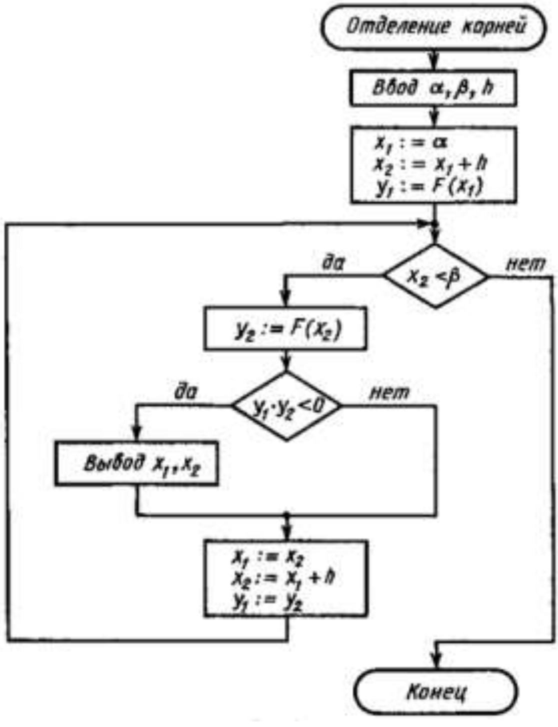

Рис. 1.3.

Очевидно, что надежность рассмотренного подхода к отделению корней уравнений зависит как от характера функции *f(x)*, так и от выбранной величины шага h. Действительно, если при достаточно малом значении h на концах текущего отрезка *[x; x+h]* функция *f(x)* принимает значения одного знака, естественно ожидать, что уравнение *f(x)=0* корней на этом отрезке не имеет. Это, однако, не всегда так: при несоблюдении условия монотонности функции *f(x)* на отрезке *[x; x+h]* могут оказаться корни уравнения (рис.1. 4, *а)*. Не один, а несколько корней могут оказаться на отрезке *[x; x+h]* и при соблюдении условия $f(x)\cdot f(x+h) < 0$ (рис.1.4, *б)*. Предвидя подобные случаи, следует выбирать при отделении корней достаточно малые значения *h*.

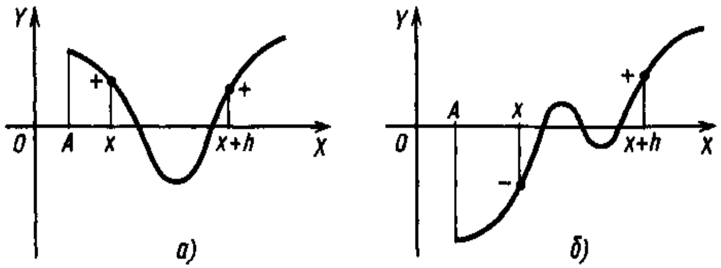

Рис. 1.4

Замечание. Для алгебраического уравнения с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_m$ ($a_0>0$) верхняя граница положительных действительных корней $R_в^+$ определяется по формуле Лагранжа [1, 2]:

$$R_в^+ = 1 + \sqrt[к]{B/a_0}\ , \qquad (1.3)$$

где к≥1 - номер первого из отрицательных коэффициентов полинома *f(x)* = $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m$, *B* - наибольшее из абсолютных значений отрицательных коэффициентов *f (x)*.

Все положительные корни x+ уравнения *f (x) =0* удовлетворяют неравенству $x^+ \le R_в^+$.

Нижнюю границу положительных действительных корней $R_н^+$, верхнюю и нижнюю границы отрицательных корней $R_н^-$, $R_в^-$ уравнения *f(x) = 0* можно определить по (1.3) для вспомогательных уравнений:

$$f_1(x) = x^m f(1/x) = 0; \quad f_2(x) = f(-x) = 0;$$
$$f_3(x) = x^m f_2(1/x) = 0.$$

Если R_1, R_2, R_3 - верхние границы действительных положительных корней соответствующих вспомогательных уравнений, то для корней основного уравнения выполняются неравенства

$$1/R_1 \le x^+ \le R_в^+; \qquad -R_2 \le x^- \le -1/R_3.$$

Для тригонометрических уравнений интервал отыскания корней определяют заранее постановкой задачи, при этом обычно имеют в виду главные значения аргументов. Для отделения действительных корней таких уравнений обычно достаточно построить графики изменения функции *f(x)* в выбранных границах изменения аргумента. С целью уменьшения затрат времени шаг *h* изменения аргумента *x* при построении графика функции *f(x)* можно выбрать первоначально достаточно большим, а затем для уточнения формы графика в окрестностях корней *f(x)* вычислять значения функции с дробным шагом *h/k, (к>1)*.

1.3. Метод половинного деления

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1.4}$$

и известно, что уравнение (1.4) имеет единственный корень $\xi \in [a,b]$; функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда методом деления отрезка пополам можно найти корень уравнения (1.4) с любой наперед заданной степенью точностью.

Пусть ε - точность, с которой ищется корень уравнения (1.4). Обозначим $a = a_0$, $b = b_0$. Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам точкой $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Вычисляем значение функции в точке c_0, т.е. $f(c_0)$. Если $f(c_0) = 0$, то $\xi = c_0$ - корень уравнения и вычисления заканчиваются. Если $f(c_0) \ne 0$, то знак $f(c_0)$ совпадет либо со знаком $f(a_0)$, либо со знаком $f(b_0)$, коль скоро $f(a_0)f(b_0) < 0$. Таким образом, на концах одного из двух отрезков $[a_0, c_0]$ или $[c_0, b_0]$ функция $f(x)$ имеет одинаковые знаки, а на концах другого – противоположные. Сохраняем отрезок, на концах которого $f(x)$ имеет противоположные знаки, а другой отрезок, как не содержащий корень, отбрасываем. Оставленный отрезок обозначим через $[a_1, b_1]$, где

$$a_1 = \begin{cases} c_0, & если \quad f(a_0)f(c_0) > 0, \\ a_0, & если \quad f(a_0)f(c_0) < 0; \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, & если \quad f(b_0)f(c_0) > 0, \\ b_0, & если \quad f(b_0)f(c_0) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, $sign\, f(a_1) = sign\, f(a_0)$ и $sign\, f(b_1) = sign\, f(b_0)$. Поэтому $f(a_1)f(b_1) < 0$.

Искомый корень ξ находится теперь на вдвое меньшем отрезке $[a_1, b_1]$.

Далее поступаем аналогично. Для произвольного k-го деления отрезка $[a_0, b_0]$ имеем: $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$, k=1,2,…

$$a_{k+1} = \begin{cases} c_k, & если \quad f(a_k)f(c_k) > 0, \\ a_k, & если \quad f(a_k)f(c_k) < 0; \end{cases}$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} c_k, & если \quad f(b_k)f(c_k) > 0, \\ b_k, & если \quad f(b_k)f(c_k) < 0. \end{cases}$$

Алгоритм завершается, если для какого-либо k оказывается $f(c_k) = 0$. Тогда значение корня $\xi = c_k$. В противном случае, если задана абсолютная точность определения корня ε, то алгоритм завершается при условии

$$\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon .$$

В этом случае за приближенное значение корня ξ принимается значение $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Очевидно, что $|\xi - c_n| \le \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}} < \varepsilon$.

В результате действий по указанному алгоритму получаем на каком-то этапе или точный корень уравнения (1.4), или же бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков:

$[a,b]=[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\ldots\supset[a_n,b_n]\supset\ldots$ таких, что

$$f(a_n)f(b_n)\le 0,\quad \text{n=1,2,…} \qquad (1.5)$$

и

$$b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^{n+1}}\ . \qquad (1.6)$$

Левые концы a_0, a_1, a_2,…, a_n,… образуют монотонную неубывающую ограниченную последовательность, а правые концы b_0, b_1, b_2,…, b_n,… монотонную невозрастающую ограниченную последовательность. Поэтому, в силу равенства (1.6), получаем, что существует общий предел $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве (1.4) в силу непрерывности $f(x)$ получим $\left(f(\xi)\right)^2\le 0$, т.е. $f(\xi)=0$ и значит, ξ является корнем уравнения (1.4). Причем, очевидно

$$0\le\xi-a_n=\frac{b-a}{2^n}.$$

1.4. Блок-схема алгоритма метода половинного деления

(приведена на рисунке 1.5.)

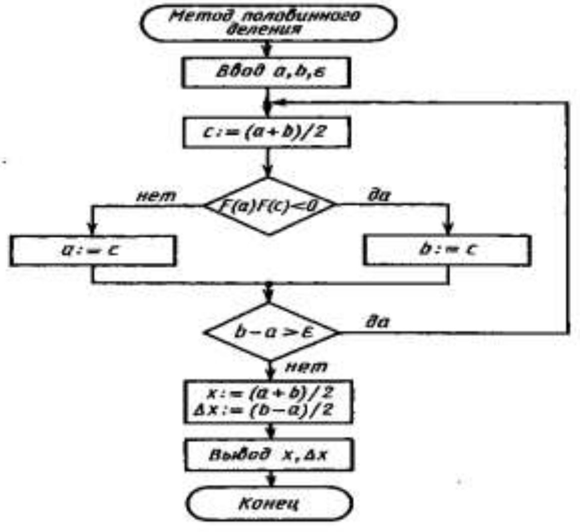

Рис.1.5.

В приведенном алгоритме на рис. 1.5 проверяется условие уменьшения длины отрезка, содержащего корень, меньше, чем заданная точность ε. На каком-то этапе процесса деления отрезка пополам это случится. Тогда, приняв приближенно x=(a+b)/2, получим ошибку, не превышающую значения dx=(b-a)/2.

Пример 1.2. Уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ имеет единственный корень на отрезке [1,3; 1,5] Решить это уравнение с точностью до 10^{-4} методом половинного деления на ЭВМ.

1.5. Контрольные вопросы

1. В чем заключается этап отделения корней при использовании численных методов решения уравнений?

2. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений? Какие свойства функции одной переменной при этом используются?

3. Каким способом в схеме алгоритма половинного деления реализуется отбрасывание той половины отрезка, на которой строго монотонная функция не меняет знака, т. е. не имеет корня?

1.6. Задания к лабораторной работе № 1

Задание 1. С помощью ЭВМ отделить корни заданного уравнения (составить блок-схему алгоритма и программу).

Задание 2. Составить блок-схему алгоритма и программу для вычисления (уточнения) с помощью ЭВМ одного из корней заданного уравнения с точностью 10^{-6}.

Варианты заданий приведены в таблице 1.1.

Пояснения к выполнению лабораторной работы. Для заданного уравнения устанавливается отрезок, содержащий все корни (если отрезок не задан особо). Эту задачу во многих случаях легко решить графическим методом.

Для выполнения **задания 1** составляются блок-схема алгоритма и программа отделения корней уравнения. Значение шага может варьироваться в зависимости от величины отрезка и характера поведения функции. Результатом выполнения задания должен быть перечень отрезков, содержащих по одному корню уравнения.

При выполнении **задания 2** составляются блок-схема алгоритма и программа вычисления (уточнения) одного из корней уравнения.

Программа может быть получена путем объединения алгоритмов отделения и последующего уточнения одного из корней методом половинного деления.

Таблица 1.1.

№ варианта	Уравнение	Пояснения
1	$(0{,}2x)^3 = \cos x$	
2	$x-10\sin x = 0$	
3	$2^{-x} = \sin x$	при $x < 10$
4	$2^x-2\cos x = 0$	при $x > -10$
5	$\lg(x+5) = \cos x$	при $x < 5$
6	$\sqrt{4x+1} = 3\cos x$	
7	$x \sin x- 1 = 0$	
8	$8\cos x-x = 6$	
9	$\sin x-0{,}2x = 0$	
10	$10\cos x-0{,}1x^2 = 0$	
11	$21g(x+7)-5\sin x = 0$	
12	$4 \cos x+0{,}3x = 0$	
13	$5\sin 2x = \sqrt{1-x}$	
14	$l{,}2x^4+2x^3-24.1=$	
15	$2x^2-6 = 2^{-x}$	
16	$2^{-x} = 10-0{,}5x^2$	
17	$4x^4- 6{,}2 = \cos 0{,}6x$	
18	$3\sin 8x = 0{,}7x -0{,}9$	на отрезке [- 1; l]
19	$l{,}2-\ln x = 4\cos 2x$	
20	$\ln(x+6{,}l) = 2\sin (x-1{,}4)$	

1.7. Структура отчета по лабораторной работе

1. Постановка задачи.
2. Теоретические сведения о методе решения задачи.
3. Блок-схема алгоритма решения задачи.
4. Текст программы.
5. Результаты и их анализ.

Отчет по лабораторной работе студент пишет от руки в ученической тетради и защищает его перед преподавателем.

Лабораторная работа №2
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

2.1. Метод простых итераций

Пусть дано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

и известно, что уравнение (2.1) имеет единственный корень $\xi \in [a,b]$; функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$. Тогда, при выполнении определенных условий, о которых речь пойдет в приводимой ниже теореме 2.1, методом простых итераций можно найти корень уравнения (2.1) с любой наперед заданной точностью ε.

Суть метода простых итераций заключается в следующем: уравнение (1.6) заменяется равносильным уравнением

$$x = \varphi(x) \tag{2.2}$$

Пусть ξ — корень уравнения (2.2), а x_0 — полученное каким-либо способом нулевое приближение к корню ξ. Подставляя x_0 в правую часть уравнения (2.2), получим некоторое число $x_1 = \varphi(x_0)$. Проделаем то же самое с x_1, получим $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Применяя шаг за шагом соотношение $x_n = \varphi(x_{n-1})$ для n = 1,2, ..., образуем числовую последовательность

$$x_0, x_1, ..., x_n, ... , \tag{2.3}$$

которую называют последовательностью приближений или итерационной последовательностью (от лат. iteratio — повторение).

2.2. Геометрическая интерпретация метода простых итераций

Процесс построения итерационной последовательности имеет простую геометрическую интерпретацию.

В самом деле, решение уравнения $x = \varphi(x)$ — это точка пересечения прямой $y = x$ с кривой $y = \varphi(x)$ в плоскости (x, y).

На рис 2.1 а) — г) иллюстрируются различные ситуации: сходимость к корню односторонняя, с разных сторон, расходящиеся итерационные процессы.

Если последовательность (2.3) сходится, а функция φ непрерывна, то предел последовательности (2.3) является корнем уравнения (2.2).

Действительно, пусть $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Перейдем к пределу в равенстве

$$x_n = \varphi\ (x_{n-1}), \tag{2.4}$$

т.е. $\xi = \varphi\ (\xi)$.

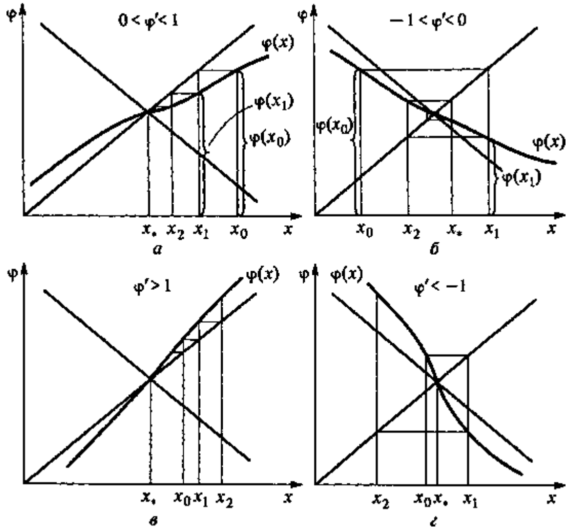

Рис. 2.1

Как видно из рисунка 2.1, в случаях в) и г) применение метода итераций может и не привести к уточнению корня. Достаточные условия сходимости итерационного процесса выясняются следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть уравнение $x = \varphi\ (x)$ имеет единственный корень на отрезке [a,b] и выполнены условия:

1) $\varphi\ (x)$ определена и дифференцируема на [a; b];
2) $\varphi\ (x) \in$ [a; b] для всех $x \in$ [a; b];
3) существует такое вещественное q, что

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \text{ для всех } x \in [a; b].$$

Тогда:

1) процесс итераций

$$x_n = \varphi(x_{n-1}),\ n = 1,2,... \tag{2.5}$$

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a,b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a,b]$.

3) оценка приближения:

$$|\xi - x_n| \le \varepsilon \text{, если}$$

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \frac{1-q}{q}, \tag{2.6}$$

где $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)|$.

Докажем, что имеет место неравенство (2.6).

Имеем $x_n = \varphi(x_{n-1})$. В силу того, что ξ корень уравнения (2.1), то

$$\xi = \varphi(\xi). \tag{2.7}$$

$$|\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| = |\varphi'(\theta)||\xi - x_{n-1}| \le q|\xi - x_{n-1}| =$$

$$= q|\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-2})| \le q^2|\xi - x_{n-2}| \le \ldots \le q^n|\xi - x_0| \le q^n|b-a|, \tag{2.8}$$

т.е. итерации сходятся.

Используя равенства (2.5) и (2.7) будем иметь

$$\xi - x_{n-1} = \varphi(\xi) + x_n - \varphi(x_{n-1}) - x_{n-1},$$

$$|\xi - x_{n-1}| \le |x_n - x_{n-1}| + q|\xi - x_{n-1}|.$$

Отсюда получим

$$|\xi - x_{n-1}| \le \frac{1}{1-q}|x_n - x_{n-1}|. \tag{2.9}$$

Используя первое из неравенств (2.8), а именно

$$|\xi - x_n| \le q|\xi - x_{n-1}|$$

и неравенство (1.14), получим

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

<u>Замечание 2.1.</u> Уравнение $f(x) = 0$ можно записать в виде $x = \varphi(x)$ различными способами:

$x = x - \lambda f(x)$ и, значит, $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$, где $\lambda > 0$. В окрестности корня ξ должно соблюдаться соотношение:

$0 \le \varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x) \le q < 1$. Отсюда подберем λ:

$$0 \le 1 - \lambda M_1 \le 1 - \lambda m_1 \le q\,;\ \ \lambda = \frac{1}{M_1} \text{ и } q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1,$$

где

m_1 и M_1 - наименьшее и наибольшее значения $f'(x)$ на $[a,b]$ соответственно, причем предполагаем, что

$$0 < m_1 \le f'(x) \le M_1 \text{ на } [a,b].$$

Если $f'(x) < 0$, то вместо уравнения $f(x) = 0$ нужно рассмотреть уравнение $-f(x) = 0$.

Пример 2.1. Уточнить с помощью калькулятора корень уравнения *sin2x - lnx = 0* на отрезке *[1,3;1,5]* методом итераций с точностью до 10^{-4}.

Исходное уравнение можно привести к итерационному виду несколькими способами, например:

1) *x = exp (sin2x)*;
2) $x = (-1)^n 0,5(\arcsin \ln x + n\pi),\ n = 1,2,\ldots$;
3) $x = x - \lambda(\sin 2x - \ln x),\ \lambda \neq 0$.

Исследуем возможность применения к полученным представлениям метода итераций.

1. В первом случае *φ(x) = exp (sin2x)*. Функция *φ(x)* определена и дифференцируема на отрезке [1,3; 1,5|, однако второе условие теоремы 2.1. не выполняется: с помощью калькулятора получаем *φ(1,3)= 1,674478*, т. е. уже в левом конце отрезка значение функции выходит за пределы отрезка.
2. Рассмотрим второе представление. Уравнение, равносильное исходному на отрезке *[1,3; 1,5]*, получается при

$$x = (\pi - \arcsin \ln x)/2. \qquad (2.10)$$

Здесь *φ(x) =(π – arcsin lnx)/2*. Замечаем, что для всех *x* отрезка *[1,3; 1,5]*, будет $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln^2 x}} < 0$, следовательно, функция *φ(x)* монотонно убывает на этом отрезке.

Вычислим ее значение в концах отрезка *[1,3; 1,5]*:

$\varphi(1,3) = (\pi - \arcsin \ln 1,3)/2 = 1,4380608$,

$\varphi(1,5) = (\pi - \arcsin \ln 1,5)/2 = 1,3620528$.

Так как полученные значения входят в отрезок *[1,3; 1,5]*, а функция $\varphi(x)$ монотонна, то отсюда следует, что второе условие теоремы 2.1 выполняется.

Для проверки третьего условия исследуем модуль производной функции $\varphi(x)$ на отрезке *[1,3; 1,5]*:

$$\varphi_1(\mathrm{x}) = |\varphi'(\mathrm{x})| = \frac{1}{2\mathrm{x}\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Найдем производную функции

$$\varphi_1'(\mathrm{x}) = \frac{2\left(\sqrt{1-\ln^2 x} + \frac{\ln \mathrm{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right)}{4\mathrm{x}^2\left(1-\ln^2 x\right)}.$$

Заметим, что $\varphi_1'(x)$ на отрезке *[1,3; 1,5]* всюду отрицательна. Это значит, что $\varphi_1(x) = |\varphi'(x)|$ на этом отрезке убывает и достигает максимума на левом конце: $|\varphi'(1,3)| = 0,3846153$.

Таким образом, условие 3) теоремы 2.1. будет выполнено, если принять $q = 0,39$. Уточнение корня уравнения (2.10) с начальным значением $x_0 = 1,4$ на калькуляторе приведено в таблице 2.1.

Таблица 2.1

n	x_n	$x_{n+1} = -(\arcsin \ln x_n - \pi)/2$
0	1,4	1,3992123
1	1,3992123	1,349511
2	1,3995113	1,3993978

Используя оценочную формулу (2.6) и принимая во внимание исходные значения $\varepsilon = 10^{-4}$ и (q = 0,39, уже для третьего приближения имеем: $x_3 - x_2 < 10^{-4}(1 - 0,39)/0,39$. Отсюда следует, что x_3 является приближенным решением уравнения с заданной точностью 10^{-4}. Округляя полученный результат, окончательно получаем: $x = 1,3994 \pm 10^{-4}$.

3. Посмотрим, как можно было бы воспользоваться третьим представлением заданного уравнения:

$$x = x - \lambda(\sin 2x - \ln x). \qquad (2.11)$$

В этом случае

$\varphi(x) = x - \lambda(\sin 2x - \ln x)$.

$\varphi'(x) = 1 - \lambda(2\cos 2x - 1/x)$.

Попробуем подобрать константу $\lambda \neq 0$ так, чтобы для функции $\varphi(x)$ были выполнены условия 2) и 3) теоремы 2.1.

Обозначим $f(x) = \sin 2x - \ln x$. Заметим, что производная $f'(x) = 2\cos 2x - 1/x$ на отрезке $[1,3; 1,5]$ отрицательна, следовательно, $f(x)$ на этом отрезке монотонно убывает. Ее значения на концах (см. пример 1.1):

$f(1,3) = 0,253\,138;$

$f(1,5) = -0,264344.$

Функция $\varphi(x)$ также убывает на отрезке $[1,3; 1,5]$, а ее значения на концах зависят от λ :

$\varphi(1,3) = 1,3 - \lambda \cdot 0,253138;$

$\varphi(1,5) = 1,5 + \lambda \cdot 0,264344.$

Учитывая монотонность функции $\varphi(x)$, из последних равенств легко заметить, что условие 2) теоремы 1.2 будет заведомо выполнено, если λ - правильная отрицательная дробь. Займемся сейчас проверкой третьего условия теоремы 2.1.

Поскольку $f'(x)=2\cos 2x - 1/x$ на отрезке $[1,3; 1,5]$ отрицательна и монотонно убывает, ее модуль имеет максимум на правом конце отрезка:

$$|f'(1,5)| = |2\cos 3 - 1/1,5| = 2,6466526.$$

Понятно, если принять $\lambda = -\dfrac{1}{|f'(1,5)|} \approx -0,37$, то для всех x отрезка $[1,3; 1,5]$ значение выражения $\lambda(2\cos 2x - 1/x)$ будет правильной положительной дробью. Это вполне обеспечивает выполнение условия 3) теоремы 2.1 (так же как, впрочем, и условия 2)). Учитывая, что

$max\,|1 + 0,37(2\cos 2x - 1/x)| \approx 0,081\,2868 < 0,1; \qquad 1,3 < x < 1,5,$

можно принять $q = 0,1$ (заметим, что малое значение q обещает быструю сходимость).

Таким образом, уравнение (2.11) приобретает вид

$$x = x + 0,37(\sin 2x - \ln x). \tag{2.12}$$

2.3. Блок-схема алгоритма метода простых итераций

Алгоритм метода простых итераций легко реализовать на ЭВМ. На рисунке 2.2 приведена блок-схема алгоритма решения уравнения $x=\varphi(x)$ методом простых итераций.

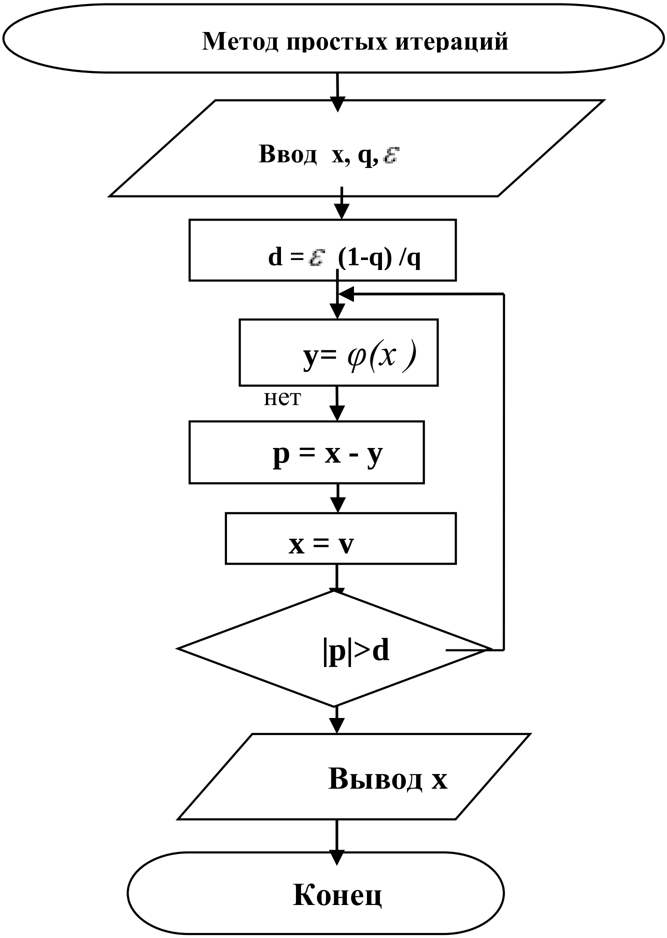

Рис. 2.2.

<u>Замечание 2.2 .</u> 1). Чтобы воспользоваться методом простых итераций необходимо всегда иметь в виду условия сходимости итерационного процесса. Достаточные условия сходимости изложены в теореме 2.1. Уравнение $f(x)=0$ можно привести к виду $x = \varphi(x)$, как показано на примере 2.1 многими способами, но стандартный способ – это уравнение $f(x) = 0$ приводится к виду $x = x - \lambda \cdot f(x)$, где λ - отличная от нуля константа, при помощи приема, изложенного в замечании 2.1

2). Пусть уравнение $f(x) = 0$ записано в виде $x = \varphi(x)$, однако при исследовании функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ оказалось, что для всех x из этого отрезка $|\varphi'(x)|>1$. Тогда вместо функции $y = \varphi(x)$ рассмотрим функцию $x = g(y)$, обратную для $\varphi(x)$. Будем теперь решать уравнение $y = g(y)$ (или, в старых обозначениях, $x = g(x)$). По свойству производных обратных функций теперь на отрезке $[a; b]$ будет иметь место:

$$|g'(x)| = \frac{1}{|\varphi'(x)|} < 1,$$

так что для уравнения $x=g(x)$, равносильного исходному, условие 3) теоремы 1.2 оказывается выполненным.

2.4. Контрольные вопросы

1. Каковы достаточные условия сходимости итерационной последовательности для уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$, содержащем один корень?
2. Какое условие является критерием для достижения заданной точности ε при решении уравнения $x = \varphi(x)$ методом простой итерации?

2.5. Задания к лабораторной работе № 2

Задание. Составить блок-схему алгоритма и программу для вычисления (уточнения) с помощью ЭВМ корня нелинейного уравнения (полинома) с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Варианты заданий для этой лабораторной взять из таблицы 2.2

Таблица 2.2

№ варианта	Уравнение	Отрезок
1	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	[-1,9;-1,8]
2	$x^3 - 3x^2 + 3 = 0$	[-0,1;0,1]
3	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$	[-4;-3,8]

4	$x^3 - 12x + 6 = 0$	[-2,5;-2,4]
5	$x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$	[-0,4;-0,2]
6	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$	[0,6;0,8]
7	$2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$	[1,2;1,4]
8	$x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$	[-1;-0,8]
9	$x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$	[1,2;1,4]
10	$x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$	[1,2;1,4]
11	$x^3 + 3x^2 - 24x - 5 = 0$	[-0,4;-0,2]
12	$x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$	[-0,4;-0,2]
13	$2x^3 + 9x^2 - 10 = 0$	[-1,4;-1,2]
14	$x^3 - 12x^2 + 10 = 0$	[0,8;1]
15	$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$	[-1,4;-1,2]
16	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$	[0;0,2]
17	$x^3 - 3x^2 - 24x + 5 = 0$	[0,2;0,4]
18	$x^3 - 4x^2 + 2 = 0$	[-0,8;-0,6]
19	$x^3 - 12x - 5 = 0$	[-0,6;-0,4]
20	$x^3 + 3x^2 - 24x + 1 = 0$	[0,4;0,6]
21	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$	[0,8;1]
22	$2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$	[-1;0,8]
23	$x^3 - 3x^2 + 1{,}5 = 0$	[-0,8;-0,6]
24	$x^3 - 3x^2 - 24x + 10 = 0$	[-0,2;0]
25	$x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$	[-0,2;0]
26	$x^3 - 12x - 10 = 0$	[-1;-0,8]
27	$2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$	[-0,8;-0,6]
28	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$	[0,6;0,8]
29	$x^3 + 3x^2 - 24x + 3 = 0$	[0;0,2]
30	$x^3 - 3x^2 + 3{,}5 = 0$	[-1;-0,8]

Лабораторная работа № 3
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ

3.1. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть корень ξ уравнения

$$f(x) = 0, \tag{3.1}$$

отделен на отрезке $[a,b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки.

Теорема 3.1. Если $f(a)f(b) < 0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки $x \in [a,b]$, то исходя из начального приближения $x_0 \in [a,b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, можно вычислить методом Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ единственный корень ξ уравнения (3.1)

с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$.

3.2. Геометрическая интерпретация метода касательных

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой (см. рис. 3.1).

В самом деле, положим для определенности, что $f''(x) > 0$ при $x \in [a,b]$ и $f(b) > 0$.

Выберем, например, $x_0 = b$, для которого $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $B_0(x_0, f(x_0))$. В качестве первого приближения x_1 корня ξ возьмем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox. Через точку $B_1(x_1, f(x_1))$ снова проведем касательную, абсцисса пересечения которой даст нам второе приближение x_2 корня ξ и т.д. Очевидно, что уравнение касательной в точке $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ есть $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

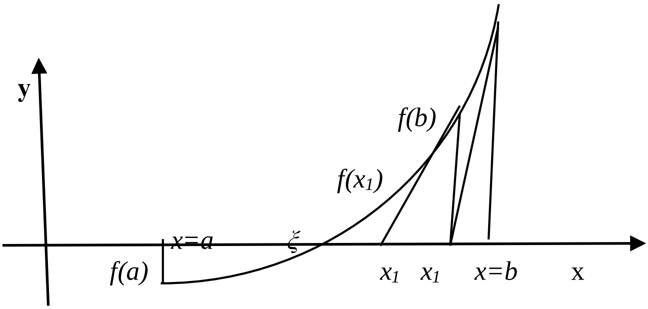

Рис. 3.1

Полагая $y = 0$ (находим точку пересечения касательной с осью абсцисс) и $x = x_{n+1}$, получим формулу:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{3.2}$$

Заметим, что если в нашем случае положить $x_0 = a$ и, следовательно, $f(x_0) f''(x_0) < 0$, то, проводя касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, мы получили бы точку x_1, лежащую вне отрезка $[a, b]$, т.е. при этом выборе начального значения метод Ньютона оказывается непрактичным. Нужен x_0 такой, что $f(x_0) f''(x_0) > 0$. Поэтому, применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: в качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала (a, b), которому соответствует ордината того же знака, что и знак $f''(x)$ в этой точке.

Замечание. Метод Ньютона удобно применять тогда, когда в окрестности рассматриваемого корня график функции имеет большую крутизну.

3.3. Оценка погрешности метода касательных

Для оценки погрешности n-го приближения x_n можно воспользоваться общей формулой

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{\left|f(x_n)\right|}{m_1}, \tag{3.3}$$

где m_1 - наименьшее значение функции $\left|f'(x)\right|$ на отрезке $[a,b]$,

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2, \tag{3.4}$$

$$\left|\xi - x_{n+1}\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left(\xi - x_n\right)^2, \tag{3.5}$$

где M_2 - наибольшее значение функции $\left|f''(x)\right|$ на отрезке $[a,b]$.

Оценим скорость сходимости.

Учитывая, что $f(\xi) = 0$, и применяя формулу конечных приращений Лагранжа, находим:

$$\left|f(x_n)\right| = \left|f(\xi) - f(x_n)\right| = \left|f'(\theta)\right|\left|\xi - x_n\right| \ge m_1\left|\xi - x_n\right|, \tag{3.6}$$

где $\theta \in [a,b]$ - некоторая точка, а $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right| > 0$.

Из неравенства (3.6) следует неравенство (3.3).

Сделаем более точные оценки.

Согласно формуле Тейлора имеем:

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + (\xi - x_n) f'(x_n) + \frac{(\xi - x_n)^2}{2} f''(\theta),$$

где $\theta \in [a,b]$ - некоторая точка, т.е.

$$\xi = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \left(\xi - x_n\right)^2 \frac{f''(\theta)}{2f'(x_n)} \tag{3.7}$$

Вычитая из (3.7) равенство (3.2) и используя оценку

$$\left|\frac{f''(\theta)}{2f'(x_n)}\right| \le \frac{M_2}{2m_1},$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| > 0$ приходим к неравенству (3.5).

Аналогично, доказывается и неравенство (3.4).

Итак, согласно (3.4) вычисления проводим до тех пор, пока не выполнится

$$\left|\xi - x_n\right| \le \frac{M_2}{2m_1}\left(x_n - x_{n-1}\right)^2 \le \varepsilon,$$

$$\text{т.е. } \left|x_{n+1} - x_n\right| \le \sqrt{\frac{2m_1}{M_2}\varepsilon} \tag{3.8}$$

где m_1 и M_2 вычисляем заранее.

3.4. Блок-схема алгоритма метода касательных

Надо выбирать достаточно тесные границы корня. Это означает, что на отрезке $[a,b]$, где ищется корень уравнения (3.1) должны выполняться условия теоремы 3.1: условие $f(a)f(b) < 0$ должно выполняться, так как на отрезке должен быть локализован (отделен) один корень уравнения (3.1) , необходимо, чтобы выполнялись и условия: $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $x \in [a,b]$. Если это не так, то надо сузить отрезок локализации $[a,b]$ корня, проведя несколько итераций методом деления отрезка пополам, пока не получим желаемое, т.е. на вновь полученном отрезке (обозначим $[a_1,b_1] \subset [\mathrm{a,b}]$) $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки при $\mathrm{x} \in [a_1,b_1]$, разумеется условие $f(a_1)f(b_1) < 0$ будет выполняться исходя из сути метода половинного деления. В качестве начального приближения x_0 (т.е первую касательную надо проводить в той граничной точке x_0) можно выбрать один из концов отрезка $[a,b]$, а именно тот, где знаки $f(x_0)$ и ее кривизны $f''(x_0)$ совпадают, т.е. где выполнено условие $f(x_0)f''(x_0)>0$. Итак,

$$x_0=\begin{cases} a_1, \text{если} & f(a_1)f''(a_1)>0, \\ b_1, \text{если} & f(b_1)f''(b_1)>0; \end{cases} \qquad (3.9)$$

Итерации проводим по формуле

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, n =0, 1, 2,…., где x_0 найдено из (3.9)

Необходимо найти $f'(x)$ и $f''(x)$ и вычислить $m_1=\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ и $M_2=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$ - коэффициенты в формуле (3.8). Надо найти точки экстремума функции $f'(x)$, а именно точки, где $f''(x)=0$, пусть это будут c_1, c_2, …, c_k: $f''(c_i)=0$, i=1,..k и вычислить значения функции $f'(x)$ в точках экстремума и в граничных точках отрезка $[a,b]$, и взять минимальное значение $|f'(x)|$ в качестве m_1, т.е. m_1 = min { $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c_i)$, i = 1,..k}.

Аналогично поступаем и для вычисления $M_2=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$. Надо найти точки экстремума функции $f''(x)$, а именно точки, где $f'''(x)=0$, пусть это будут d_1, d_2, …, d_k: $f'''(d_j)=0$, j = 1,..m и вычислить значения функции $f''(x)$ в точках экстремума и в граничных точках отрезка $[a,b]$, и взять максимальное значение $|f''(x)|$ в качестве M_2, т.е. M_2 = max{ $f''(a)$, $f''(b)$, $f''(d_j)$, j = 1,..m}.

Итак, согласно (3.4) вычисления проводим до тех пор, пока не выполнится неравенство

$|x_{n+1}-x_n|\le\sqrt{\dfrac{2m_1}{M_2}\varepsilon}$, где m_1 и M_2 вычисленные выше значения.

В силу сказанного выше блок-схема алгоритма метода касательных (метода Ньютона) выглядит следующим образом (см. рис. 3.2):

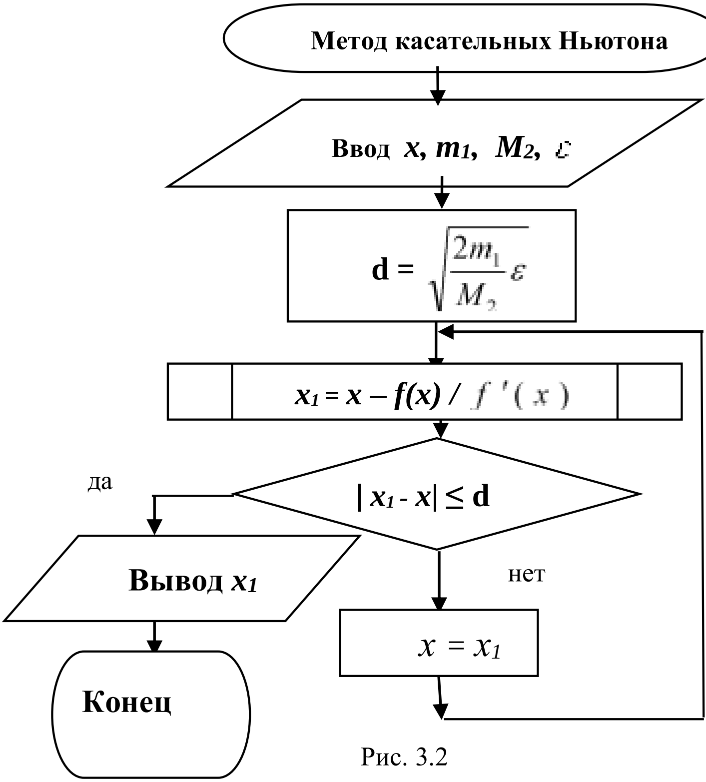

Рис. 3.2

3.5. Контрольные вопросы

1. Как выбирается точка проведения касательной?
2. Какое условие является критерием для достижения заданной точности ε при решении уравнения $f(x)=0$ методом касательных (методом Ньютона) ?

3.6. Задания к лабораторной работе № 3

Задание . Составить блок-схему алгоритма и программу для вычисления (уточнения) с помощью ЭВМ корня нелинейного уравнения (полинома) с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ методом Ньютона (касательных).

Варианты индивидуальных заданий с указанием соответствующего отрезка отделения корня приведены в табл. 2.2.

Список литературы и источников информации

1. Демидович Б.П.Марон И.А. Основы вычислительной математики.М.: гос. изд-во физико-математической литературы, 1960.- 660 с.
2. Петров А.В., Алексеев В.Е., Титов М.А. и др. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах: Учеб. Для вузов.- 2-е изд., перераб. И доп./Под ред. А.В. Петрова.- М.: Высш. Шк., 1984.- 320 с.
3. Таинов Р.Р. Численные методы и алгоритмы решения инженерных и экономических задач на ЭВМ: Учебное пособие / ДПТИ, Махачкала, 1993, 149 с.
4. Абдулгалимов А.М.. Оруджев М.И. Вычислительные методы: Учебное пособие. Махачкала, ДГТУ, 2009.-176 с.
5. Абдулгалимов А.М., Таинов Р.Р.Методические указания к выполнению лабораторного практикума по численным методам.- Махачкала, ДагПТИ, 1994.- 54 с.
6. Абдулгалимов А.М., Оруджев М.И. Методические указания к выполнению лабораторного практикума по дисциплине «Вычислительные методы». Часть 1 - Численное решение нелинейных уравнений. Махачкала, ДГТУ, 2004, 27 с.
7. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. интов.- М.: Просвещение, 1990.- 176 с.
8. Турчак Л.И. Основы численных методов: Учеб. пособие.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.- 320 с.
9. Корнеев, П. К. Численные методы : учебное пособие / П. К. Корнеев, Е. О. Тарасенко, А. В. Гладков. — Ставрополь : СКФУ, 2017 — Часть 1 — 2017. — 145 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/155288 — Режим доступа: для авториз. пользователей.
10. Электронно-библиотечная система (ЭБС) «Электронно-библиотечная система «IPRbooks» (www.IPRbooks.ru), 2021
11. Электронно-библиотечная система ООО «Издательство Лань» (www.e.lanbook.com). 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Абдулгалимов Абдулгалим Минхаджевич
Саидова Шахризат Абдупашаевна

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Вычислительные методы»
Часть 1 - Численное решение нелинейных уравнений