МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГОУ «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Канаев М.М.

Комплексный анализ

Часть 1. Теоретические основы.

Учебное пособие для изучения курса функции комплексного переменного.

Махачкала 2020г.

УДК   681.3.06

Печатается согласно постановлению Совета Дагестанского государственного технического университета протокол №4. от 28.05.2020г. рег.5138

Канаев М.М.   Учебное пособие для изучения курса комплексный анализ. – Махачкала, ДГТУ, Издание второе, исправленное и дополнено. 2020г.- 96с.

В первой части учебного пособия рассматривается основы комплексного анализа.

Рассмотрены теоретические основы функции комплексного переменного, приведены примеры, контрольные вопросы и индивидуальные задание по разделам.

Учебное пособие предназначен для студентов, направления подготовки   бакалавров 010400 – « Прикладная математика и информатика».

Рецензенты: д.т.н., профессор, ДГТУ   Мелехин В.Б.

к.т.н., профессор,
Директор института
«Системных технологии»   Курбанмагомедов К.Д.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Комплексный анализ» изучает методы, задач и теорем функции комплексного переменного, их применение к решению задач прикладной математики и информатики.

Учебный материал дисциплины «Комплексный анализ» сгруппирован вокруг следующих тем: комплексные числа, дифференциальное исчисление функций комплексных переменных, комплексные ряды, аналитические функции, интегрирование функций комплексной переменной, разложение в ряд Лорана, теорема Лиувилля и ее приложения, приложения теории вычетов к вычислению интегралов. Изучение дисциплины в значительной мере опирается на курсы «Математический анализ 1-3», Линейная алгебра» и в свою очередь доставляет необходимый аппарат для решения проблем и задач упомянутых дисциплин. Многие теоремы и утверждения дисциплины «Комплексный анализ» напрямую заимствуются из теории функций действительного переменного. Методической особенностью курса является то обстоятельство, что при переходе в комплексную область многие привычные факты становятся просто неверными. так, например, довольно сложно построить в действительной области непрерывную функцию, которая не является дифференцируемой ни в одной точке. В комплексном анализе такие примеры может построить любой студент. Для аналитических и мероморфных функций их область значений - это почти все комплексные числа, за исключением нескольких точек. Другой особенностью курса является существенное расширение запаса возможных действий. Особое значение имеет комплексный анализ для дифференциальных уравнений. Многие типы дифференциальных уравнений получают при этом чисто алгебраическое решение.

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1.1. Комплексные числа

Число $z = x + iy$, где x и y - любые действительные числа, а i - так называемая мнимая единица, называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются:

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{или} \quad R(z),$$
$$y = \operatorname{lm} z \quad \text{или} \quad I(z).$$

Два комплексных числа считаются равными, если равны порознь их действительные и мнимые части, т. е. равенство

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy$$

равносильно двум неравенствам:

$$x_{1=} x_2,$$

$$y_1 = y_2.$$

Так как две точки, определенные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, совпадают тогда и только тогда, когда они имеют равные абсциссы и равные ординаты, то можно установить взаимно-однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости, с одной стороны, и всевозможными комплексными числами - с другой. Иначе говоря, будем изображать комплексное число $z = x + iy$ с помощью точки, абсцисса которой равна x, а ордината y; тогда всякое комплексное число изобразиться с помощью вполне определенной точки плоскости и обратно всякой плоскости (x, y) плоскости будет соответствовать вполне определенное комплексное число $z = x + iy$ (рис. 1). Вместо « Точка, изображающая число z » часто говорят короче « точка z » . Можно действительной и мнимой частям комплексного числа поставить в соответствии не координаты точки, а координаты вектора, т.е. взятые с соответствующим знаком проекции на координатные оси вектора, начало которого совмещено, например с началом координат, и следовательно изображать комплексные числа с помощью векторов (рис. 1.)

Комплексное число с мнимой частью, равной нулю $x + i0$, будем отождествлять с его действительной частью: $x + i0 = x$, и считать действительное число частным случаем комплексного. Действительные числа изображаются точками, лежащими на оси Ox; эту ось будем называть *действительной осью*. Аналогично будем писать $0 + iy = iy$. Числа действительные части которых равны нулю (чисто мнимые числа), изображаются с помощью точек, лежащих на оси Oy; эту ось будем называть *мнимой осью.*

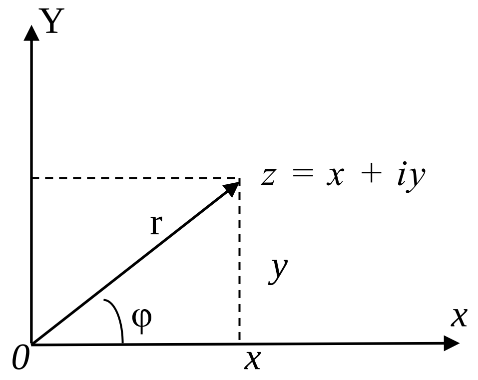


Рис. 1.

Положение точки, изображающей комплексное число z, можно определять также с помощью полярных координат r и φ (Рис. 1.) или, что то же самое, с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величины угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси. Число r и φ будем называть соответственно *модулем и аргументом* комплексного числа z и пользоваться обозначениями :

$$r = |z|,$$
$$\varphi = \mathrm{A}rg\ z.$$

Для действительного числа введенного здесь понятие модуля совпадает с понятием абсолютной величины. Модулем чисто мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части. Из определения модуля или аргумента следует, что если $z = x + iy$, то

$$x = r\cos\varphi = |z|\, cos\,(\,Arg\, z\,),$$

$$y = r\sin\varphi = |z|\, sin\,(\,Arg\, z\,) \qquad (1)$$

и

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$tg\,(\,Arg\, z\,) = tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Величина $Arg\, z$ многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π. В качестве главного значения величины $Arg\, z$ обычно выбирают значение, определенное неравенствами

$$-\pi < Arg\, z \le \pi.$$

Главное значение аргумента z обозначают $Arg\, z$. Если $z -$ действительное положительное число, то $Arg\, z = 0$; если $z -$ действительное отрицательное, то $Arg\, z = \pi$; если $z -$ чисто мнимое число с положительной мнимой частью, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$, если $z -$ чисто мнимое с отрицательной мнимой частью, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$. При $z = 0$ величина $Arg\ z$ не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1) , можно всякое комплексное число, отличное от нуля, представить в так называемой *тригонометрической форме*:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2}\ (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}), \qquad i = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 = 1\ (\cos 0 + i\ \sin 0), \qquad -2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi),$$

$$-3i = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin\ (-\frac{\pi}{2})\right].$$

С помощью формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + isin\,\varphi$ можно перейти от тригонометрической формы (2) к показательной:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Например,

$$1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}};\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}};\quad -i = e^{i\pi}.$$

Два комплексных числа, имеющие одну и ту же действительную часть, а мнимые части которых равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, называются *взаимно-сопряженными*.

Число, сопряженное числу z обозначается $\overline{z}.$ Если $z = x + iy$, *то* $\overline{z} = x - iy$. Из этого определения следует , что если $w = \overline{z}$, *то* $z = \overline{w}$ *и , следовательно* , $\overline{\overline{z}} = z$.

Модули взаимно-сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\overline{z}| = |z|\ ;\ \ Arg\,\overline{z} = -Arg\,z\ .$$

Всякое действительное число совпадает с числом, ему сопряженным.

Сопряженные числа изображаются точками, взаимно-симметричными относительно действительной оси.

1. 2. Действие над комплексными числами

Сложение и вычитание комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов; последнее из этих правил дополняется требованием замены i^2 *числом* -1 (а следовательно , i^3 числом $-$ i , i^4 числом 1 , i^5 числом i и т. д.). При записи результата действий, над комплексными числами, следует отделить действительную часть от мнимой, т. е. собрать отдельные члены не содержащие множители i , и члены, содержащие этот множитель :

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (3)$$

Из (3), в частности, следует, что произведение двух взаимно-сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \text{, т. е. } \qquad z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

Сумма двух взаимно-сопряженных комплексных чисел также является действительным числом

$$(x + iy) + (x - iy) = 2x, \qquad \text{т. е. } \quad z + \overline{z} = 2Re\, z\,.$$

Вычитание определяется как действие обратное сложению, откуда следует, что $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Итак, при сложении и при вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части.

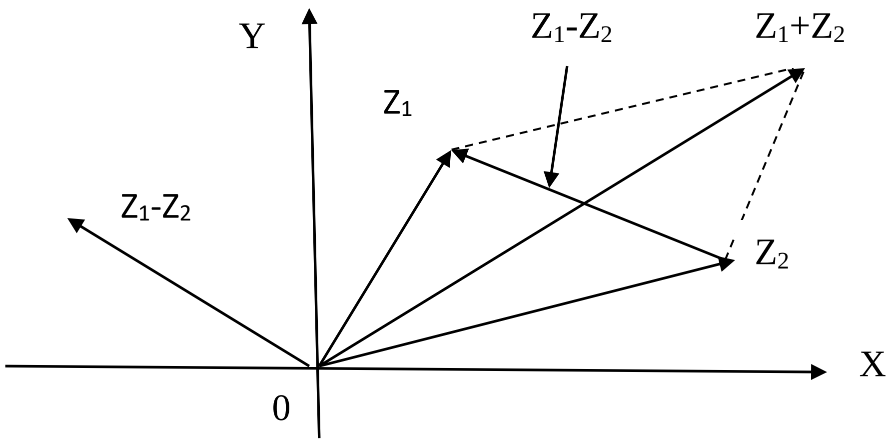


Рис.2

Если изобразить комплексное число с помощью вектора, то, как мы уже знаем, его действительная и мнимые части будут являться координатами вектора, а так как при сложении и вычитании векторов их координаты соответственно складываются или вычитаются, то сложение или вычитание векторов, изображающих эти числа (Рис. 2). Модуль комплексного числа равен длине соответствующего вектора, поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел :

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,.$$

Примерно это неравенство несколько раз, получим:

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Знак равенства имеет место только тогда, когда векторы, изображающие числа z_1 , z_2 , …. , z_n , лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, т. е. когда

$$arg\, z_1 = arg\, z_2 = \ldots. = arg\, z_n$$

модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающими эти числа (Рис. 2) . Следовательно, если $z_1 -$ данное комплексное число (данная точка), p - данное действительное положительное число, то совокупность точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = p$ образует окружность с центром в точке z_1 радиуса p . Неравенство $|z - z_1| < p$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности («внутренность круга»), а неравенство $|z - z_1| > p$ – множество точек, лежащих вне окружности («внешность круга»).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Пользуясь свойствами сопряженных чисел, удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, после чего делитель станет действительным положительным числом, а затем произвести деление действительной и мнимой частей отдельно:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i\,(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Если воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$$

то получим:

$$z_1z_2 = r_1r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = r_1r_2\,[\cos\,(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin\,(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (4)$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|\,,$$
$$Arg\,(z_1\, z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2\,.$$

Вектор изображающий произведение $z_1\ z_2$, может быть получен из вектора, изображающего число z_1, поворотом на угол φ_2 , образованный вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора z_2 (Рис 3).

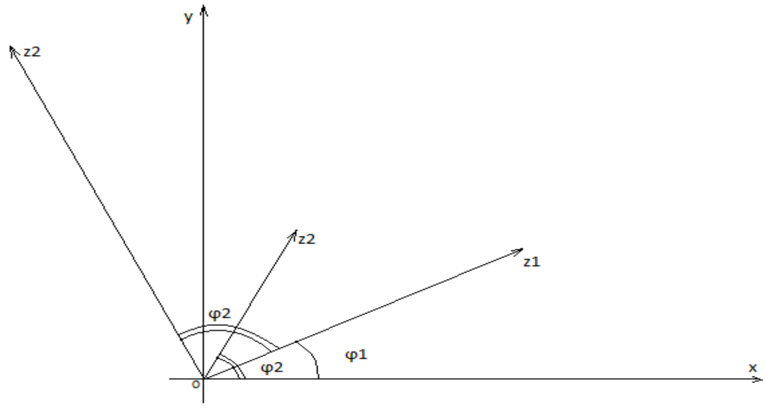


Рис.3

Например, число i имеет модуль, равный единице, и аргумент $\frac{\pi}{2}$, поэтому умножение на i сводится к повороту вектора на $90°$ в положительном направлении без изменения его длины.

Число, модуль которого равен единице, имеет вид $\cos\varphi + i\sin\varphi$, или в показательной форме $e^{i\varphi}$. Следовательно, вектор $ze^{i\varphi}$ может быть получен поворотом вектора z около начала координат на угол φ.

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

т. е. $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}\right|; \qquad Arg\,\frac{z_1}{z_2} = Arg\,z_1 - Arg\,z_2.$$

из правила умножения (4) следует правило возведения в целую положительную степень:

если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

т. е. $|z^n| = |z|^n$; $Arg\,(z^n) = n\,Arg\,z$.

Пользуясь правилом деления не трудно проверить, что эти формулы остаются справедливыми и при целом отрицательном n.

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z значит найти такое число $w = \sqrt[n]{z}$, $n-$я степень которого равна z. В соответствии с правилом возведения в степень имеем :

$$|w|^n = |z| \quad \text{и} \quad n\,Arg\,w = Arg\,z$$

Если обозначить:

$$z = r\,(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi), \qquad w = p\,(cos\,\theta + i\,sin\,\theta),$$

то, учитывая, что аргумент комплексного числа содержит неопределенное слагаемое, кратное числу 2π, получим;

$$\rho^n = r; \quad n\,\theta = \varphi + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.)$$

Так как r и p - положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет p_1, а именно $p = (\sqrt[n]{r})$, где скобка в правой части обозначает, что берется арифметическое (действительное и положительное) значение корня. Из второго равенство находим:

$$\theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

и формула, с помощью которой можно извлекать корень из любого комплексного числа, принимает вид:

$$\sqrt[N]{Z} = \sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \left(\sqrt[n]{r}\right)\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (5)$$

Хотя $k -$ любое целое число, однако из этой формулы следует, что имеется лишь n различных значений величины $\sqrt[n]{Z}$, которые можно получить, пологая $k = 0, 1, 2 \dots, \ n-1$.

Действительно, два значения k, отличающиеся друг от друга на n, а значит и на любое кратное числа n, дает при подстановке в формулу (5) одно и то же значение, так как если $k' - k = n$, то

$$\frac{\varphi+2\pi k'}{n} - \frac{\varphi+2\pi k}{n} = \frac{2(k'-k)}{n}\pi = 2\pi \quad \text{и, следовательно,}$$

$$\cos\frac{\varphi+2\pi k'}{n} = \cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}; \quad \sin\frac{\varphi+2\pi k}{n} = \sin\frac{\varphi+2\pi k'}{n}.$$

Как видно из формулы (5), все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $(\sqrt[n]{|z|})$. А так как

$\frac{\varphi+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ и следовательно, аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих соседним значениям k (k и $k+1$), отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$, то точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $(\sqrt[n]{|z|})$ с центром в начале координат.

Поэтому способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$, таков (рис. 4): из начала координат, как из центра, описываем окружность, радиус которой равен $(\sqrt[n]{|z|})$; проведя из начала координат луч, направленный к положительному направлению действительной оси под углом в n раз меньшим, чем угол, образованный с тем же направлением лучом, идущим из начала координат в точку z, мы найдём на окружности точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (для этой точки в формуле (5) k=0); вписав в окружность правильныйn-угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, мы построим точки, соответствующие остальным значениям корня.

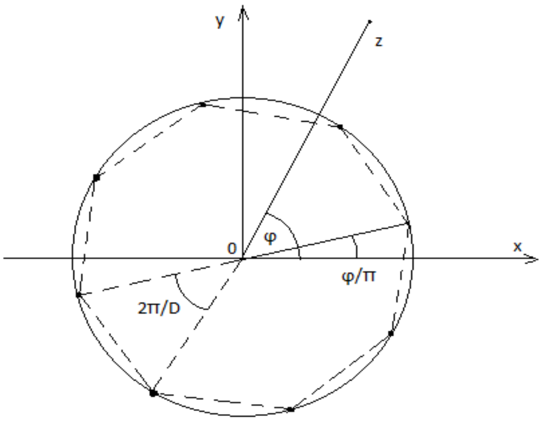


Рис.4

Пример: Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$. Имеем: $-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$, откуда $\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8})\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$.

При k=0,1,2 получим:

$\sqrt[3]{-8} = 1 + i\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{-8} = 1 - i\sqrt{3}$.

Если так же, как это принято для действительных чисел, обозначить

$$\sqrt[n]{z^m} = z^{\frac{m}{n}},$$

то действие возведения комплексного числа в степень окажется определённым для любого действительного рационального показателя степени.

Контрольные вопросы

1.Какое число называется комплексным?
2. Как изображаются графически комплексные числа?
3.Тригнометрическая форма, комплексных чисел.
4.Напищите формула Эйлера.
5. Как выполняются операции сложения и умножения комплексных чисел?
6. Как извлекают квадратный корень из комплексных чисел?

Индивидуальные задания

1. Записать в тригонометрической форме числа

$3i$; *-I*; *2*; *-2*; *i+1*; *-1-i* ; $\sqrt{3}$-*i*; *2-5i*; *1-i*$\sqrt{3}$; *2+5i*; *-2+5i*; *-2*.

2. Найти: $\sqrt{1-i}$; $\sqrt{3+4i}$; $\sqrt[3]{i}$; $\sqrt[6]{-8}$; $\sqrt[8]{1}$;

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФУНЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО АРГУМЕНТА

2.1. Функции комплексного аргумента

Основные понятия теории функций комплексного аргумента являются почти дословным обобщением соответствующих понятий теории функций действительного переменного. Эта глубокая аналогия в основных определениях влечёт за собой столь же глубокую аналогию во многих теоремах, доходящую в некоторых разделах, например в излагаемой в этой главе теории пределов, до полного тождества формулировок основных теорем.

Говорят, что на некотором множестве точек, изображающих значения комплексного переменного z, задана функция $w=f(z)$, если каждой точке z (каждому значению z) этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) или большее число (в случае многозначной функции) значений w.

Множество точек, на котором задана (определена) функция $w=f(z)$, в дальнейшем будет, как правило, или совокупностью всех точек плоскости (вся плоскость), или всей плоскостью, за исключением отдельных ее точек, или односвязной, либо многосвязной областью, являющейся частью плоскости, ограниченной одной или несколькими гладкими или кусочно-гладкими кривыми, из которой могут быть удалены отдельные точки.

Так, например, функция $w=z^2$ однозначна и её можно считать определённой на всей плоскости, так как с помощью формулы, по которой производится возведение комплексного числа в степень, всякому комплексному числу z соответствует (и притом только одно) значение z^2.
Функция $w=Argz$ многозначна и определена на всей плоскости, за исключением точки $z=0$.

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y, являющихся соответственно действительной и мнимой частями z $(z=x+iy)$, а числу w точно так же однозначно соответствует пара действительных чисел u и v $(w=u+iv)$, то зависимость $w=f(z)$, между комплексной функцией w и комплексным аргументом z равносильна двум зависимостям:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y), \qquad (1)$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных аргументов x и y.

Например, если $w= z^2$, то, пологая $z= x + iy$, $w=u+iv$, получим $u+iv=(x + iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy$ и, следовательно, равенство $w= z^2$ равносильно равенствам:

$$u=x^2-y^2,$$
$$v =2xy.$$

Если значения аргумента z изображать с помощью точек некоторой плоскости («плоскости z»), а значения функции w с помощью точек другой плоскости («плоскости w»), то функция $w=f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z, в которых эта функция определена, и точками плоскости w , другими словами, функция осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w.

Обозначим символом g множество точек плоскости z , на котором определена функция $w=f(z)$, а символом G множество, состоящее из тех точек плоскости w , на которые с помощью функции $w=f(z)$ отображаются точки множества g. Выбрав какую-либо определённую точку множества G , найдём те точки множества g , которые отобразились в выбранную точку. Таким образом, каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g . В соответствии с определением функции это будет означать, что на множестве G определена некоторая функция
$z= \varphi(w)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $w=f(z)$.

Если функция $w= f(z)$ однозначна, то каждой точке плоскости z, в которой функция определена, соответствует одна точка плоскости w. Если при этом некоторое множество точек g плоскости z отображается взаимно-однозначно на некоторое множество G плоскости w, т.е. если функция $w=f(z)$ такова, что не только каждой точке множества g соответствует одна и только одно точка множества G, но и обратно, каждой точке множества G соответствует в точности одна точка множества g, то функция $z= \varphi(w)$, определенная на множестве G и отображающая его на множество g, обратная по отношению к функции $w =f(z)$, также является однозначной.

Пример 1. Функция $w= z^2$ осуществляет однозначное отображение внутренности круга g плоскости z с центром в начале координат и радиусом, равным 2, на внутренность круга G плоскости w с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

Действительно, точки круга g определены неравенством $|z|< 2$, но если $w= z^2$, то неравенство $|z|<2$ равносильно неравенству $|w|< 4$, которое определяет совокупность точек, лежащих внутри круга G. Нетрудно видеть, что это отображение области g на область G однозначно, но не взаимно-однозначно. Действительно, функция $w= z^2$ однозначна и каждой точке z

соответствует единственная точка *w*, но каждой точке *w*, лежащей внутри круга G, за исключением точки *w=0*, соответствует две точки круга g, симметричные относительно начала координат, так как если $z_2 = -z_1$ и $z_1^2 = w$, то $z_2^2 = z_1^2 = w$. Следовательно, функция $z = \sqrt{w}$, осуществляющая отображение области G на область g, обратная по отношению к функции $w = z^2$, многозначна (двузначна).

Пример 2. Сектор g, точки которого определены неравенствами $0<\arg z <\frac{\pi}{4}$, $|z|<1$, в силу того, что $\arg(z^2)=2\arg z$ и $|z^2|=|z|^2$, отображается с помощью функции $w= z^2$ на сектор G: $0 < \arg w <\frac{\pi}{2}$, $|w|<1$ (Рис. 5).

Нетрудно видеть, что это отображение взаимно-однозначно. Действительно, хотя функция $z = \sqrt{w}$, обратная по отношению к данной, двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 ($z_2 = -z_1$), соответствующих точке *w* области G, лишь одна принадлежит области g.

Иными словами, отображение области G на область g осуществляется с помощью однозначной ветви функции $z = \sqrt{w}$ (другая ветвь функции $z = \sqrt{w}$ отображает область G на область g', граница которой на рис.5 отмечена пунктиром).

Если в плоскости *z* кривая *c* задана уравнением

$$F(x, y)=0, \tag{2}$$

то для того, чтобы найти уравнение кривой *C* в плоскости *w*, на которую отображается кривая *c*, с помощью функции

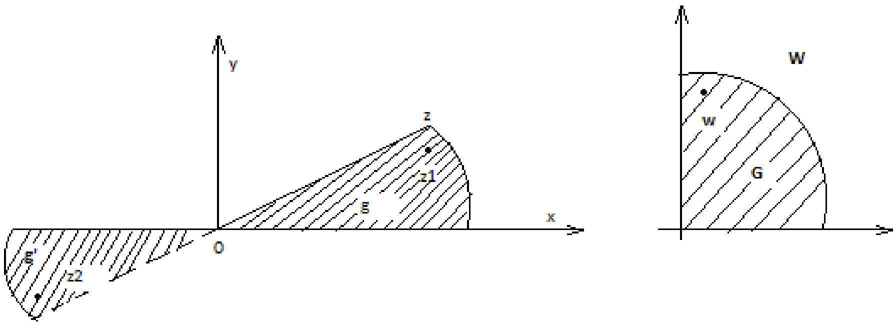


Рис.5

w =f(z), достаточно исключить *x* и *y* из уравнений (1) и (2). Если кривая *c* задана параметрическими уравнениями:

$$x=x(t),$$
$$y=y(t),$$

то, подставляя *x(t)* и *y(t)* вместо *x* и *y* в (1), получим уравнения кривой *C* также в параметрической форме:

$$u=u[x(t), y(t)]=\varphi_1(t),$$
$$v=v[x(t), y(t)]=\varphi_2(t).$$

Пример 3. Найти уравнения линий плоскости w, на которые с помощью функции $w = z^2$ отображаются прямые, параллельные координатным осям плоскости z.

Как было показано выше, равенство $w = z^2$ равносильно равенствам:

$u = x^2 - y^2,$

$v = 2xy,$ где $z = x + iy$ и $w = u + iv$. (3)

Образ прямых $x = c$, параллельных мнимой оси плоскости z, получим, исключая x и y из уравнения $x = c$ и y равнений (3): $u = c^2 - y^2,\quad v = 2cy,$

откуда $$u = c^2 - \frac{v^2}{4c^2}.$$

Мы получили уравнение некоторого семейства парабол, симметричных относительно оси Оu, вершины которых находятся на положительной части этой оси и которые обращены вогнутостью в сторону отрицательной части оси Оu (рис.6).

Мнимая ось $x = 0$. Плоскости z отобразится на линию

$u = -y^2,$

$v = 0.$ (4)

Второе из этих равенств показывает, что линия *(4)* расположена на оси Оu, а из первого следует, что u может принимать любые значения, для которых $u \leq 0$, следовательно, мнимая ось $x = 0$ плоскости z отображается на отрицательную часть действительной оси плоскости w:

$$u \leq 0,\ v = 0.$$

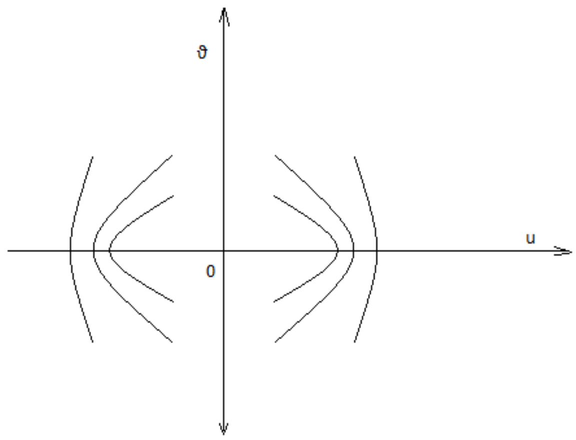


Рис.6

Аналогичные рассуждения показывают, что семейство прямых $y = c$, параллельных действительной оси плоскости z, отобразить в семействе парабол $$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

плоскости *w*, также изображенное на рис.6, причём действительная ось *y=0* плоскости *z* отобразится в положительную часть действительной оси плоскости *w*. $u \geq 0$, *v=0.*

Следует заметить, что параметрические уравнения линии в плоскости *z*

x=x(t),

y=y(t),

могут быть заменены одним уравнением *z=z(t),* где *z(t)= x(t)+i y(t).*

Например, уравнение *z=cost+isint* является уравнением окружности радиуса 1 с центром в начале координат, так как оно равносильно уравнениям: *x=cos t,* *y=sin t.*

уравнение кривой в плоскости *w,* на которую с помощью функции *w=f(z)* отображается кривая *z= z(t),* имеет вид *w=f[z(t)].*

Пример 4. Найти образ прямой *z=(1+i)t* при отображении $w = z^3$.

Уравнение *z=(1+i)t* равносильно системе уравнений

x= t, *y= t.*

и определяет в плоскости *z* биссектрису первого координатного игла *v= x.*

С помощью функции $w = z^3$ эта биссектриса отображается на линию

$$w = (1+i)^3 t^3$$

или $w = (-2+2i)t^3$, откуда $u = -2t^3$, $v = 2t^3$.

Исключая параметр t, получим *v= - u* - уравнение биссектрисы второго координатного угла плоскости *w.*

2.1. Предел последовательности

Окрестностью точки, изображающей комплексное число z_0 , называется всякая область, внутри которой лежит точка z_0. В дальнейшем мы будем пользоваться только круговыми окрестностями, т.е. будем называть окрестностью точки z_0 внутренность круга с центром в этой точке, при этом ρ- *окрестностью* точки z_0 мы будем называть внутренность круга радиуса ρ с центром в точке z_0, т.е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \rho$.

Число z_0 называется *пределом* последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$. $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$,

если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число *N* (*N* зависит от ε), что при $n \geq N$ выполнено неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. В этом случае говорят также, что последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ сходится к числу z_0. Если среди членов последовательности нет бесконечного множества одинаковых чисел, то числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ определяют бесконечное множество различных точек. Если

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

то как бы мала ни была ε-окрестность точки z_0, вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек последовательности, так как все точки последовательности z_n, начиная с той, для которой n=N, попадут внутрь этой ε-окрестности.

Если $z_n = x_n + iy_n$ и $z_0 = x_0 + iy_0$, то, учитывая равенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

нетрудно, исходя из определения предела, заключить, что существование предела $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_n,$$

Если последовательность $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ такова, что модули всех её членов, начиная с некоторого, становятся больше любого, сколь угодно большого положительного числа (т.е. если, как бы велико ни было положительное число M, к нему можно подобрать такое N, что $|z_n|$>M при ($n\geq N$), то хотя последовательность, очевидно, предела не имеет, однако удобно и в этом случае писать $\lim_{z\to\infty} z_n = \infty$,и говорить, что последовательность точек $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ сходится к бесконечно удалённой точке или что предел последовательности бесконечен. Окрестностью бесконечно удалённой точки будем называть внешность круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R, а центр находится в точке z=0, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удалённой точки, определяется неравенством $|z|$>R .Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга.

Сопоставляя определение равенства $\lim_{z\to\infty} z_n = \infty$, с определением окрестности бесконечно удалённой точки, мы видим, что, если последовательность точек сходится к бесконечно удалённой точке, то, как бы мала ни была окрестность бесконечно удалённой точки, т.е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, за исключением конечного их числа (все точки z_n, начиная с той, для которой n=N), попадут внутрь этой окрестности.

Таким образом, определение предела, по существу, одно и то же как в случае, когда этот предел конечен, так и в том случае, когда он бесконечен, и в этом смысле бесконечно удалённая точка вполне равноправна с остальными точками плоскости.

Равноправность бесконечно удалённой точки по отношению к другим точкам можно сделать наглядной, если изменить геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

Построим сферу (Рис.7), касающуюся в точке $z = 0$ плоскости z, служившей нам для интерпретации комплексных чисел. Пусть N- точка сферы, диаметрально противоположная точке касания сферы с плоскостью z.

Проведём на точки N луч в любую точку z плоскости z и отметим на сфере точку, отличную от точки N, в которой этот луч пересекает сферу. Будем считать эту точку изображением того же самого комплексного числа z. Любому комплексному числу z ставится таким образом в соответствие определённая точка сферы, которую будем так же, как и соответствующую точку плоскости, называть точкой z. Если на плоскости взята последовательность $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ точек, сходящаяся к некоторой точке z_0, то соответствующая последовательность точек на сфере также будет сходиться к точке z_0 на сфере (т.е. расстояние точки z_n на сфере от точки z_0 на сфере будет стремиться к нулю).

Если $\lim\limits_{z\to\infty} z_n = \infty$, то последовательность точек $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ на сфере будет сходиться к точке N, т.е. при $n \to \infty$ расстояние между точкой z_n на сфере и точкой N будет стремиться к нулю. Таким образом, точка N (а это «обычная» точка сферы) соответствует бесконечно удалённой точке плоскости.

Заметим, что в соответствии с введённым нами определением на комплексной плоскости имеется только одна бесконечно удалённая точка (соответствующая точке N на сфере), в то время как, например, во многих разделах геометрии удобно считать, что существует бесконечное множество бесконечно удалённых точек: каждому направлению соответствует своя бесконечно удалённая точка.

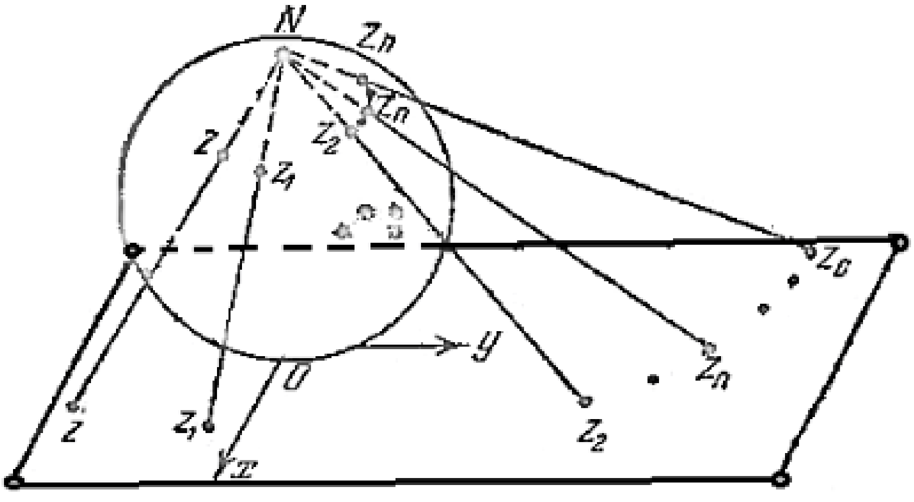


Рис. 7.

2.3. Предел функции. Непрерывность

Число w_0 называется *пределом* однозначной функции *f(z)* при *z*, стремящемся к z_0:

$$w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z),$$

если, как бы мала ни была выбранная ε-окрестность точки w_0, можно найти такую δ-окрестность точки z_0, что для всех точек *z* этой окрестности (кроме, быть может, самой точки z_0) соответствующие значения функции *f(z)* будут изображаться точками выбранной ε-окрестности точки w_0.

В случае, если z_0 и w_0 - конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство $w_0 = \lim_{z \to z_0} f(z)$

обозначает, что как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать такое положительное число δ, что для всех значений z $(z \neq z_0)$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta,$ (5)

выполнено неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon.$ (6)

Если z_0 или w_0 или оба эти числа бесконечны, то в соответствии с определением окрестности бесконечно удалённой точки неравенства (5) или (6), или оба эти неравенства должны быть заменены другими. Так, например, равенство $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$

(w_0 конечно) обозначает, что, как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать столь большое положительное число *A*, что для всех значений *z*, для которых $|z| > A$, функция *f(z)* будет удовлетворять неравенству $|f(z) - w_0| < \varepsilon$. Введённое нами определение предела функции формально ничем не отличается от определения предела функции действительного аргумента, и следовательно, все доказываемые в курсе математического анализа теоремы о пределах и бесконечно малых остаются в силе для функций комплексного аргумента.

Если функция *w= f(z)* определена в точке z_0 и в некоторой её окрестности и предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$

не только существует, но равен значению функции *f(z)* в точке z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

то функция *f(z)* называется непрерывной в точке z_0. В соответствии с определением предела это значит, что функция *w= f(z)* непрерывна в точке z_0, если для любого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta \qquad (7)$$

будет следовать, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. (8)

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$ (Δz - приращение аргумента, Δw- приращение функции), то неравенства (7) и (8) заменяются, соответственно, неравенствами:

$$|\Delta z| < \delta, \tag{7'}$$

$$|\Delta w| < \varepsilon, \tag{8'}$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w= f(z)$, заданной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в этой точке

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0.$$

Так как сформулированное выше определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функций действительного аргумента, то доказываемые в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного непрерывных функций, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функций комплексного аргумента.

Как уже указывалось выше, равенство $w= f(z)$ равносильно системе равенств:

$u=u(x, y)$,

$v=v(x, y)$, где $w= u+iv$, $z= x+iy$.

Если $z_0 = x_0 + iy_0$, то $f(z)- f(z_0) = [u(x,y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x,y) - v(x_0,y_0)]$ и

$$|f(z)- f(z_0)| = \sqrt{[u(x,y) - u(x_0,y_0)]^2 + [v(x,y) - v(x_0,y_0)]^2}. \tag{9}$$

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке z следует, что, если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), то выполнено неравенство (8), а следовательно, в соответствии с (9), тем более, удовлетворяются неравенства:

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$

$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| < \varepsilon, \tag{10}$$

которое означают, что функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Таким образом, из непрерывности функции комплексного аргумента следует непрерывность её действительной и мнимой частей как функций двух действительных аргументов x и y . Справедливо и обратное утверждение: из неравенств (10) и равенства (9) непосредственно следует, что непрерывность функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ влечёт за собой непрерывность функции $f(z)$.

Заметим, что если вспомнить способ, с помощью которого, зная уравнение некоторой линии в плоскости z, можно найти уравнение её образа на плоскости w при отображении $w= f(z)$, то мы легко убедимся в справедливости утверждения: непрерывная кривая отображается с помощью непрерывной функции на непрерывную кривую (или, если *f(z)* постоянна вдоль заданной кривой, в одну точку).

Контрольные вопросы

1. Какая связь между комплексной функцией и комплексным аргументом?
2. Как задается кривая на плоскости?
3. Запишите уравнения кривой в параметрической форме.
4. Что такое окрестности точки?
5. Что такое предел последовательности комплексных чисел?
6. Что такое непрерывность комплексных функции?

Индивидуальные задание

1.На какие линии плоскости ω отображаются с помощью функции $\omega = \frac{1}{z}$ следующие кривые плоскости z $(z=x+iy,\ w=u+iv)$;

1. $x^2 + y^2 = 4$; 2. $x^2 + y^2 = 1$; 3. $y = x$;
4. $y = 0$; 5. $x = 1$; 6. $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

2. Какие линии заданы уравнениями (t - действительный параметр):

1. $z=t(1+t)$; 2. $z=a\cos t + i\sin t$; 3. $z= t+\frac{i}{t}$; 4. $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$

3. ОСНОВНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

3.1. Показательная, тригонометрические и гиперболические Функций

Ряд с комплексными членами $z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots,$ (1)
так же как и ряд с действительными членами, называется *сходящимся,* если существует предел при $n\to\infty$ его частичной суммы

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n.$$

Этот предел $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, называется *суммой ряда*.

Очевидно, что ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots,$ (2)
членами которого являются действительные части членов ряда (1), так и ряд $y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots,$ (3)
составленный из мнимых частей членов ряда (1).

Это утверждение немедленно следует из того, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости двух последовательностей, одна из которых составлена из действительных, а другая из мнимых частей членов данной. Отсюда, в частности, получаем, что в случае последовательности сходимости ряда (1) $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, так как $z_n = x_n + iy_n$, а $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$ ввиду сходимости рядов (2) и (3).

Если сходится ряд $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots,$ членами которого являются модули членов данного ряда (1), то ряд (1) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*. Действительно, из очевидных неравенств

$$|x_n| \le |z_n|,$$
$$|y_n| \le |z_n|$$

вытекает сходимость рядов (2) и (3), а следовательно и ряда (1).

Определения суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы от сходимости суммы, разности, произведения рядов не отличаются от соответствующих теорем для рядов с действительными членами .

Введем определения основных трансцендентных функций для комплексных значений независимой переменной. Очевидно, что когда показатель степени является комплексным числом, определение степени a^z , вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрий определения тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, tg z, ctg z, теряют смысл при комплексных значениях z. Принимая во внимание известные для действительных значений x разложение функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, в степенной ряд, положим, по определению,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \tag{4}$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \tag{5}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{6}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и притом абсолютно, при любом комплексном значений z. Действительно, рассмотрим, например, ряд (4). Если $z = r$, где r – любое действительное положительное число, то ряд (4) как известно из курса анализа, сходится, но это и значит, что ряд (4) сходится абсолютно при $|z| = r$, а так как r произвольно, то ряд (4) сходится абсолютно в любо точке плоскости z. Аналогичные рассуждения применимы к рядам (5) и (6). Следовательно, равенства (4), (5), (6) определяют во всей плоскости комплексного переменного z функций e^z, sinz, cosz, совпадающие при действительных значениях z с соответствующими функциями, определяемыми в курсах математического анализа.

Функции e^z, sin z, cos z связаны между собой формулой Эйлера:

$$e^{iz} = \cos z - i \sin z. \tag{7}$$

Действительно, подставив в равенство (4) iz вместо z, получим:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \cdots$$

Умножив, далее, обе части равенства (5) на i и почленно сложив полученное равенство с равенством (6), убедимся в справедливости формулы Эйлера.

Если в формуле Эйлера заменить z на −z, будем иметь:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{8}$$

Из (7) и (8) получим: $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{9}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{10}$$

Как уже указывалось формула Эйлера позволяет преобразовать тригонометрическую форму комплексного числа в показательную:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Если x_1 и x_2 −действительные числа, то, как известно,

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$$

Принимая во внимание, что

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \text{получим}$$

$$\left(1+\frac{x_1}{1!}+\frac{x_1^2}{2!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x_2}{1!}+\frac{x_2^2}{2!}+\cdots\right)=1+\frac{x_1+x_2}{1!}+\frac{(x_1+x_2)^2}{2!}+\cdots \quad (11)$$

Если заметить, что сходимость (и притом абсолютная) рядов, участвующих в равенстве (11), не нарушится при замене действительных чисел x_1 и x_2 любыми комплексными числами z_1 и z_2 и что формальное перемножение рядов с комплексными членами можно производить по правилам перемножения рядов с действительными членами, то можно утверждать, что равенство

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \quad (12)$$

справедливо и при любых комплексных z_1 и z_2. В частности, если $z=x+iy$, где x и $y-$ действительные числа, то $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}$.

Но, в силу (7), $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, следовательно,

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \quad (13)$$

Отсюда, в частности, следует, что $|e^z|=e^x$ и одно из значений $Arg\ e^z$ равно y.

Равенство (13) позволяет вычислять значения показательной функции при любых комплексных значениях показателя. Например:

$$e^{2-3i}=e^2(\cos 3-i\sin 3),\quad e^{\pi i}=-1,\quad e^{\frac{\pi}{2}i}=i.$$

Из равенства (13) следует периодичность функции e^zс периодом $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i}=e^z.$$

Действительно, если $z=x+iy$, то

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+i(y+2\pi)}=e^x[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)]=$$
$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z.$$

В частности, $e^{2k\pi i}=e^0=1,\quad e^{(2k+1)\pi i}=e^{\pi i}=-1$ ($k-$ *целое число*).

Если m −целое число, то из (13) получим:

$$(e^z)^m=[e^x(\cos y+i\sin y)]^m=e^{mx}(\cos y+i\sin y)^m=$$

$$=e^{mx}(\cos my+i\sin my)=e^{m(x+iy)}=e^{mz}.$$

Если $p-$ рациональная дробь ($p=\frac{m}{n}$, где m и $n-$ целые числа), то выражение $(e^z)^p$ *многозначно* (*оно имеет* n значений) и только одно из значений этой величины равно e^{pz}.

Формула (13) позволяет вычислять значения показательной функции, а формулы (9) и (10) могут служить для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z.

Показательная функция имеет период $2\pi i$, поэтому правые части равенств (9) и (10) не изменятся при замене z на $z+2\pi$, так как $e^{i(z+2\pi)}=e^{iz+2\pi i}=e^{iz}$, $e^{-i(z+2\pi)}=e^{-iz-2\pi i}=e^{-iz}$,следовательно,

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,\ \sin(z+2\pi)=\sin z,$$

т.е. определенные с помощью (9) и (10) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π. Нетрудно убедится в том, что для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных значениях z сохраняется основное связывающее их тождество

$$sin^2 z + cos^2 z = 1.$$

Действительно,

$$sin^2 z + cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Сохранятся также и другие основные тригонометрические тождества. Например, на основании (9) и (10)

$$sin\, z_1\, cos\, z_2 + cos\, z_1\, sin\, z_2 =$$

$$= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} * \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i},$$

и, преобразовав правую часть этого равенства, получим:

$$sin\, z_1\, cos\, z_2 + cos\, z_1\, sin\, z_2 = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = sin(z_1 + z_2).$$

Функции $tg\, z$ и $ctg\, z$ определяются с помощью равенств:

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \qquad (14)$$

$$ctg\, z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \qquad (14')$$

Гиперболические функции $sh\, z, ch\, z, th\, z, cth\, z$ определяются равенства:

$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \qquad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}.$$

Принимая во внимание (9), (10), (14) и (14′) заметим, что гиперболические функции легко могут быть выражены через тригонометрические:

$$sh\, z = -i \sin iz, \quad ch\, z = \cos iz, \quad th\, z = -i\, tg\, iz, \quad cth\, z = i\, ctg\, iz.$$

Из этих тождеств следует в частности периодичность гиперболических функций, причем периоды $sh\, z$ и $ch\, z$ равны $2\pi i$, а $th\, z$ и $cth\, z$ равны πi.

***Пример* 1**. Найти $\cos i$.

Принимая во внимание, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, получим:

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e}{2} = ch\, 1.$$

***Пример* 2.** Найти $sin(1+2i)$.

Принимая во внимание, что $sin\, z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, получим:

$$sin(1+2i) = \frac{e^{i-2}-e^{2-i}}{2i} = \frac{e^{-2}e^{i}-e^{2}e^{-i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{-2}(cos\,1 + i\,sin\,1) - e^{2}(cos\,1 - i\,sin\,1)}{2i} =$$

$$= \frac{cos\,1(e^{-2}-e^{2}) + i\,sin\,1(e^{2}+e^{-2})}{2i} =$$

$$= \frac{e^{2}+e^{-2}}{2} sin\,1 + i\frac{e^{2}-e^{-2}}{2} cos\,1 = ch2\,sin\,1 + sh\,2\,cos\,1$$

(аргумент под знаком синуса и косинуса измеряется, конечно, в радианах).

3. 2. Логарифм и обратные тригонометрические функции

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной.

Если $e^{\omega} = z$, где $z \neq 0$, то число ω называется *логарифмом* числа z и обозначается $\omega = Ln\, z$.

Если $\omega = u + iv$, то, как уже было отмечено выше, из формулы (13) следует, что $|e^{\omega}| = e^{u}$и $Arg\, e^{\omega} = v$.Так как в рассматриваемом случае $e^{\omega} = z$, то $e^{u} = |z|$, или $u = ln|z|$ ($|z|$ −число действительное, и положительное, и здесь имеется в виду известное из курса математического анализа обычное определение логарифма), и $v = Arg\, z$.

Итак, $Ln\, z = ln|z| + i\, Arg\, z =$

$= ln|z| + i\, arg\, z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1\ \pm 2, \dots)$. (15)

Ввиду многозначности величины $Arg\, z$ логарифм является многозначной функцией (действительная часть логарифма, равна $ln|z|$, определяется однозначной, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π).

Главным значением логарифма z будем называть то значение, которое соответствуют главному значению аргумента числа z. Следовательно, в формуле (15) главное значение логарифма получим при $k = 0$.

Если $z = x -$ действительное положительное число, то $|z| = x$ и $\arg z = 0$, поэтому, согласно (15), главное значение логарифма действительного положительного числа является числом действительным и совпадает со значением, обозначаемым символом $ln\, x$, которое и приводится в таблицах логарифмов. Естественно поэтому символом $ln\,z$ обозначать главное значение логарифма любого комплексного числа z; тогда в соответствии с формулой (15) получим:

$$In\,z = ln|z| + i\arg z. \qquad (15’)$$

***Пример* 1**. Найти $ln(-1)$ и $Ln(-1)$.

Модуль числа -1 равен 1, а главное значение аргумента равно π, следовательно, $In(-1) = In1 + \pi i = \pi i,$ а $Ln(-1) = \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

***Пример* 2**. Вычислить $In\,i$ и $Ln\,i$.

Модуль числа равен i равен 1, а главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{2}$, следовательно, $In\,i = In1 + \frac{\pi}{2}i = \frac{\pi}{2}i,$

$$Ln\,i = \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

***Пример* 3**. Найти $In(3+4i)$ и $Ln(3+4i)$. Модуль числа $3+4i$ равен $\sqrt{3^2+4^2=5},$ а главное значение аргумента равно $arctg\,\frac{4}{3}$, следовательно,

$$In(3+4i) = In\,5 + i\,arctg\frac{4}{3},$$

$$Ln(3+4i) = In\,5 + i\,arctg\frac{4}{3} + 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Так как

$$Arg\,(z_1 z_2) = Arg\,z_1 + Arg\,z_2, \qquad Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg\,z_1 - Arg\,z_2,$$

$$Arg\,(z^n) = n\,Arg\,z, \qquad Arg\,\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Arg\,z$$

(n —целое число, положительное или отрицательное), то из формулы (15) следует, что обобщенная на случай комплексных значений аргумента логарифмическая функция обладает следующими известными свойствами логарифмов действительного аргумента:

$$Ln(z_1 z_2) = Ln\,z_1 + Ln\,z_2, \qquad Ln\,\frac{z_1}{z_2} = Ln\,z_1 - Ln\,z_2,$$

$$Ln(z^n) = n\,Ln\,z, \qquad Ln\,\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Ln\,z.$$

Формула (13) служит для возведения в комплексную степень числа e. Чтобы перейти к определению возведения в степень любого комплексного числа, заметим сначала, что в силу определения логарифмической функции

$e^{Ln\zeta} = \zeta$ для любого комплексного числа ζ.

Для действительных ζ и z при $\zeta > 0$, очевидно, справедливо тождество

$$\zeta^z = e^{z\,Ln\,\zeta}.$$

Будем теперь считать

$$\zeta^z = e^{z\, Ln\, \zeta} \qquad (16)$$

для любых комплексных ζ и z и тем самым определим величину ζ^z при любых комплексных значениях ζ и z.

В силу многозначности логарифма определенное равенство (16) выражение ζ^z многозначно. Его главным значением будем называть то, которое получим, подставив в правую часть (16) $In\, \zeta$ вместо $Ln\, \zeta$. Только при целых действительных (положительных, отрицательных или равных нулю) значениях z формула (16) определяет единственное значение величины ζ^z, так как в этом случае неопределенное слагаемое вида $2k\pi i$, входящее в $Ln\, \zeta$, будучи умноженное на целое число z, дает в показателе правой части равенств (16) слагаемое вида $2k'\pi i$, где k' —также целое действительное число и значения правой части (16), соответствующие различным значениям k', совпадают.

***Пример* 4**. Найти i^i:

$$i^i = e^{iLni} = e^{i(\frac{\pi}{2}i+2k\pi i)} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Главное значение величины i^i равно $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

***Пример* 5**. Найти 2^{1+i}:

$$2^{1+i} = e^{(1+i)Ln\, 2} = e^{(1+i)(In 2+2k\pi i)} = e^{(In 2-2k\pi)+i(In\, 2+2\, k\pi)} =$$

$$= e^{In\, 2-2k\pi}(\cos In\, 2 + i \sin In\, 2).$$

Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к тригонометрическим.

Если $z = \sin \omega$, то ω называется *арксинусом* числа z и обозначается $z = Arcsin\, z$. Аналогично, если $z = \cos \omega$, то ω называется *apkkосинусом* z и обозначается $\omega = Arccos\, z$; если $z = tg\, \omega$, то ω называется *арктангенсом* z и обозначается $\omega = Arctg\, z$ и т.д.

Если $z = \sin \omega$, то на основании (10)

$$z = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i},$$

откуда $e^{i\omega} - 2iz - e^{-i\omega} = 0$ или $e^{2i\omega} - 2ize^{i\omega} - 1 = 0$.

Решив это квадратное уравнение относительное $e^{i\omega}$, получим:

$$e^{i\omega} = iz + \sqrt{-z^2 + 1^1}), \quad \text{т.е.} \quad i\omega = Ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \quad \text{и}$$

$$\omega = Arcsin\, z = -i\, Ln\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right). \qquad (17)$$

В силу многозначности логарифма и двузначности корня в правой части (17) $Arcsin\, z$ является функцией многозначной. Если $z -$ число действительное и $|z| \le 1$, то величина $\sqrt{1 - z^2}$ также является действительной и

$\left|iz + \sqrt{1 - z^2}\right|$=1 но, в силу формулы (15), все значения логарифма числа, модуль которого равен 1, являются числами чисто мнимыми, а так как перед знаком логарифма в правой части (17) стоит множитель $-i$,то все значения $Arcsin\, z$ будут в рассматриваемом случае, как и следовало ожидать, числами действительными; во всех прочих случаях значения $Arcsin\, z$ действительными быть не могут.

На основании (14), если $z = tg\, \omega,$ имеем: $z = \frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i(e^{i\omega}+e^{-i\omega})}$,
откуда $e^{i\omega}(1-iz) = e^{-i\omega}(1+iz)$ или $e^{2i\omega} = \frac{1+iz}{1-iz}$.
Следовательно,

$$2i\omega = Ln\frac{1+iz}{1-iz} \quad \text{и} \quad \omega = Arctgz = -\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz}. \qquad (18)$$

Если z является любым действительным числом, то числа $1+iz$ и $1-iz$ будут взаимно-сопряженными, поэтому их модули одинаковы следовательно, модуль выражения, стоящего под знаком логарифма в правой части (18), равен 1 и, в силу (15), все значения этого логарифма чисто мнимы. В этом случае ввиду наличия в правой части (18) множителя $-\frac{i}{2}$ величина $Arctg\, z,$ как и следовало ожидать, действительна, в остальных случаях эта величина действительной быть не может.

Аналогично можно получить:

$$Arccos\, z = -i\, Ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad Arcctg\, z = \frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}.$$

***Пример* 6**. Найти $Arcsin\, 2.$ С помощью (17) и (15) получим:

$$Arcsin\, 2 = -iLn\left(2i \pm i\sqrt{3}\right) = -iLn\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right] = -i\left[In\left(2\pm\sqrt{3}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right] = \frac{\pi}{2} - i\, In\left(2\pm\sqrt{3}\right) + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

***Пример* 7.** Найти $Arctg\ (2i)$:

$$Arctg(2i) = -\frac{i}{2}Ln\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{i}{2}\left(In\frac{1}{3} + \pi i + 2k\pi i\right) =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{i\, In\, 3}{2} + k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Функции, обратные $sh\, z,\ ch\, z,\ thz,\ cth\, z$ называются обратными гиперболическими функциями и обозначаются соответственно $Arsh\, z,\ Arch\, z,\ Arth\, z,\ Arcth\, z.$ Обратные гиперболические функции многозначны. Действительно, если $\omega = Arsh\, z,$ то $z = sh\, \omega$ или $z = \frac{e^{\omega}-e^{-\omega}}{2}$, откуда $e^{2\omega} - 2ze^{\omega} - 1 = 0.$ Решая это квадратное относительно e^{ω} уравнение, получим: $e^{\omega} = z + \sqrt{z^2+1},$ откуда $\omega = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$ или $Arsh\, z = Ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right).$ Многозначность функции $Arsh\, z$ является следствием многозначности логарифма и квадратного корня, стоящих в правой части последнего равенств.

Совершенно также можно доказать, что $Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$,

$$Arth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}, \quad Arcth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1}.$$

Контрольные вопросы

1. В каких комплексных плоскостях определены функции e^x, $\sin x$, $\cos x$?
2. Гиперболические функции, как их определяют?
3. Как определяют логарифмические и обратные тригонометрические функции?

Индивидуальные задание

1. Найти:

1. $L\,\mathrm{n}(1+i)$; 2. $L\,\mathrm{n}(-i)$; 3. $\mathrm{Ln}(-3+4i)$;

4. $e^{-t\frac{\pi}{2}}$; 5. $e^{1-i\frac{\pi}{2}}$; 6. e^{3+i}; 6. 3^t;

7. $(1+i)^t$; 8. i^{1+i}.

2. Найти:

1. $\sin i$; 2. $\cos(i+1)$; 3. $tg(2-i)$; 4. $\mathrm{ch}\, i$; 5. $\sin(x+iy)$;

6. $\mathrm{sh}(-2+i)$; 7. $\cos(x+iy)$.

4. ПРОИЗВОДНАЯ

4. 1. Аналитическая функция

Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадают с определениями тех же понятий для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются и на функции комплексного аргумента.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного обладают по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного многими дополнительными свойствами, причина заключения которых заключается в том, что требование существования производной функции комплексного аргумента, как будет видно из дальнейшего, является несравненно более ограничительным, чем требование существования производной функции действительного аргумента.

Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ и вычислим вызванное этим приращением аргумента приращение $\Delta\omega$ функции $\omega = f(z)$: $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется *производной* функции *f(z)* в точке z и обозначается $f'(z)$, ω', $\frac{d\omega}{dz}$, или $\frac{df}{dz}$: $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$.

Требование существования предела отношения $\frac{d\omega}{\Delta z}$ и его независимости от закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию *f(z)* значительно более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y = \varphi(x)$ действительного переменного x. В самом деле, требование существования производной функции действительного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x + \Delta x$ к точке x по двум направлениям, слева (при Δx<0) и справа (при $\Delta x > 0$), и совпадение этих пределов, а требование существования производной функции *f(z)* комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по любому пути, по любому из бесконечного множества различных направлений, и совпадение всех этих пределов.

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $\Delta z = \Delta z + i\Delta y$; тогда

$\Delta\omega = f(z+\Delta z) - f(z) = [u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)] = \Delta u + i\Delta v$, где $\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)$ и $\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)$.

В этих обозначениях

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (1)$$

Функция, имеющая производную в точке z, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Если функция *f(z)* дифференцируема в точке z, то предел (1) существует и не зависит от закона стремления $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю; в частности, при $\Delta z = \Delta x$, т.е. при приближении точки $z + \Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси *Ox* (Рис. 8), получим:

$$f' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

Выбрав $\Delta z = i\Delta y$, т.е. устремляя точку $z+\Delta z$ к точке z по прямой, параллельной оси *Oy* (Рис. 9), получим:

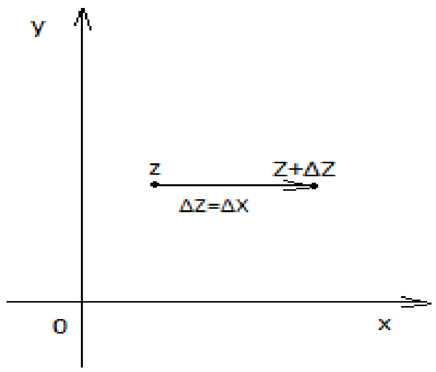
$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, то из (2) и (3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Эти условия, называемые *условиями Даламбера-Эйлера* или *условиями Коши-Римана*, должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + iv$ дифференцируема.

Если однозначная функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой окрестности этой точки, то она называется *аналитической* в данной точке. Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области.



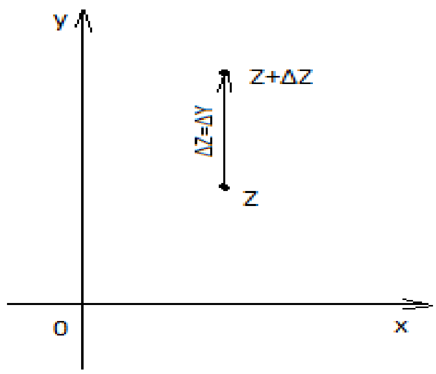


Рис. 8 Рис. 9

Точки плоскости z, в которых однозначная функция *f(z)* является аналитической, называют *правильными точками* этой функции, а точки, в которых функция *f(z)* не является аналитической (в частности, точки, в которых *f(z)* не определена),- *особыми точками.*

Пример 1. Выяснить, является ли функция $\omega = z^2$аналитической.

Если $\omega = z^2$, то $u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ и $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, откуда находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия (4) выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2. Выяснить, является ли функция e^z аналитической.

Если $\omega = e^2$, то$u + iv = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ и $u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$. Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$,

Следовательно, условия Даламбера-Эйлера выполнены в каждой точке.

Функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 3. Выяснить, является ли аналитической функция $\omega = \bar{z}$.

Если $\omega = \bar{z}$, то $u + iv = x - iy$ и $u = x, v = -y$, откуда $\frac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \ \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$ и следовательно, первое из условий (4) не выполнено. Функция $\omega = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Пример 4. Выяснить, является ли функция $\omega = zRe\ z$ аналитической.

Если $\omega = zRe\ z$, то $u + iv = (x + iy)x = x^2 + ixy$ и $u = x^2$, $v = xy$, откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

Условия (4) выполнены только при *x=0* и *y=0* . Следовательно, функция zRe z дифференцируема только в одной точке z=0 и нигде не является аналитической.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функции, зависящих от комплексного аргумента, а определение производной функции комплексного аргумент также не отличается от определения производной для функции действительного аргумента, то нетрудно проверить, что известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного, степени, функции от функции, обратной функции остаются справедливыми и в случае комплексного аргумента.

Легко проверить, что сохраняются и правила дифференцирования элементарных трансцендентных функции. Например, если

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

то, пользуясь формулой (2), получим:

$$\frac{d\omega}{dz} = e^x(\cos y + i\, sin\, y) = e^z.$$

С помощью формул (9) и (10) главы 3. нетрудно проверить справедливость известных формул дифференцирования тригонометрических функции. Правило дифференцирования обратной функции приведет нас к известным формулам дифференцирования логарифма и обратных тригонометрических функции.

4.2. Связь аналитических функции с гармоническими

Действительная и мнимая часть функции $f(z) = u + iv$, аналитической в некоторой области D, в той же области являются решениями уравнения $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, называемого *уравнением Лапласа,* т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Даламбера-Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое из этих тождеств по x, а второе по y и складывая, получим: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$$

Дифференцируя первое из тех же тождеств по y, а второе по x и вычитая, будем иметь: $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Решения уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ называются *гармоническими функциями*. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Однако, если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, то функция $u(x, y) + iv(x, y)$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия (4), как правило, не будут выполнены.

Аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ мы получим, если, произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$, подберем другую так, чтобы удовлетворялись условия Даламбера-Эйлера $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}$, т.е. определим другую из этих функции по её двум частным производным или, что то же самое, по ее полному дифференциалу. Как известно, по полному дифференциалу функция определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого определяется своей действительной или мнимой частью.

Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяющие условиям Даламбера-Эйлера и, следовательно, являющиеся действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, называются сопряженной парой гармонических функции.

Пример. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть

$$v = 2x^2 - 2y^2 + x.$$

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -4y$,

то из условий Даламбера-Эйлера (4) находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y, \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1. \tag{8}$$

Воспользовавшись первым из этих уравнений, получим:

$$u = \int -4\,y\,dx = -4xy + \varphi(y), \tag{9}$$

где функция $\varphi(y)$ пока произвольна. Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем (9) по y и подставляем в (8):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1, \qquad \text{откуда} \quad \varphi'(y) = -1 \ \ и \ \ \varphi(y) = -y + C.$$

Следовательно, $u = -4xy - y + C$ и окончательно получим:

$$\omega = u + iv = -4xy - y + C + i(2x^2 - 2y^2 + x)$$

$$= 2i(x^2 - y^2 + 2i\,xy) + i(x + iy) + C = 2iz^2 + iz + C,$$

где $z = x + iy$.

Многие задачи, связанные с изучением стационарных тепловых и электрических полей, а также с изучением потенциального течения жидкости, сводятся к решению уравнения Лапласа.

В простейших двумерных задачах такого типа в некоторой области D требуется определить непрерывное решение уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$, принимающее заданные значения на границе области D. Эта задача называется первой краевой задачей для уравнения Лапласа или *задачей Дирихле.*

Задача Дирихле и некоторые более сложные краевые задачи для уравнения Лапласа легко решаются для небольшого числа простейших областей, например для круга или для прямоугольника.

Для более сложной области D задача Дирихле обычно решается следующим методом.

Стараются подобрать аналитическую функцию $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, которая отображала бы область D, лежащую в области x, y, на одну из тех простейших областей, лежащих в плоскости u,v, для которой задача Дирихле легко решается, например на круг.

Если удается подобрать такую аналитическую в области D функцию, то задачу Дирихле можно считать решенной, так как при указанном преобразовании уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ снова переходит в уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = 0.$

Действительно, T можно рассматривать как действительную (или мнимую) часть некоторой аналитической функции $\omega_1 = \varphi(z) = T(x,y) + iQ(x,y)$. Переходя к новым переменным u и v с помощью преобразования $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, где f является аналитической в области D функцией, и предполагая, что функция *f(z)* имеет однозначную обратную функцию $z = F(w)$, также будет аналитической функцией в соответствующей области, можем рассматривать $w_1 = T + iQ$ как функцию u и v:
$w_1 = \varphi[F(w)] = T(u,v) + iQ(u,v)$, причем сложная функция $\varphi[F(w)]$ будет аналитической функцией w. Следовательно, *T(u,v)* будет гармонической функцией и $\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial v^2} \equiv 0.$

4.3. Аргумент и модуль производной. Конформное отображение

Пусть в плоскости z дана некоторая точка z_0 и через эту точку проведены линии γ_1 *и* γ_2, причем каждая из них имеет в точке z_0 определенную касательную.

Функция $\omega = f(z)$, которую мы будем предполагать аналитической в некоторой области, содержащей точку z_0, отображает точку z_0 плоскости z в некоторую точку $\omega_0 = f(z_0)$ плоскости ω, а линии γ_1и γ_2, проходящее через точку z_0, отображаются на линии Γ_1 и Γ_2, проходящее через точку ω_0 (Рис. 10).

Возьмем на линии γ_1 произвольную точку $z_0 + \Delta z$, которая отобразится в некоторую точку $\omega_0 + \Delta\omega$ линии Γ_1.

Комплексное число Δz изобразится при этом вектором, идущим из точки z_0 в точку $z_0 + \Delta z$, а число $\Delta\omega$ с помощью вектора, идущего из точки ω_0 в точку $\omega_0 + \Delta\omega$.

Так как функция $\omega = f(z)$ является аналитической в точке z_0, то предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$, не зависит от закона стремления Δz к нулю и равен числу $f'(z_0)$. Будем стремить Δz к нулю так, чтобы точка $z_0 + \Delta z$ оставалась на кривой γ_1 (т.е. будем перемещать точку $z_0 + \Delta z$ к точке z_0 по кривой γ_1); тогда $\Delta\omega$ будет перемещаться по кривой Γ_1 (Рис. 10).

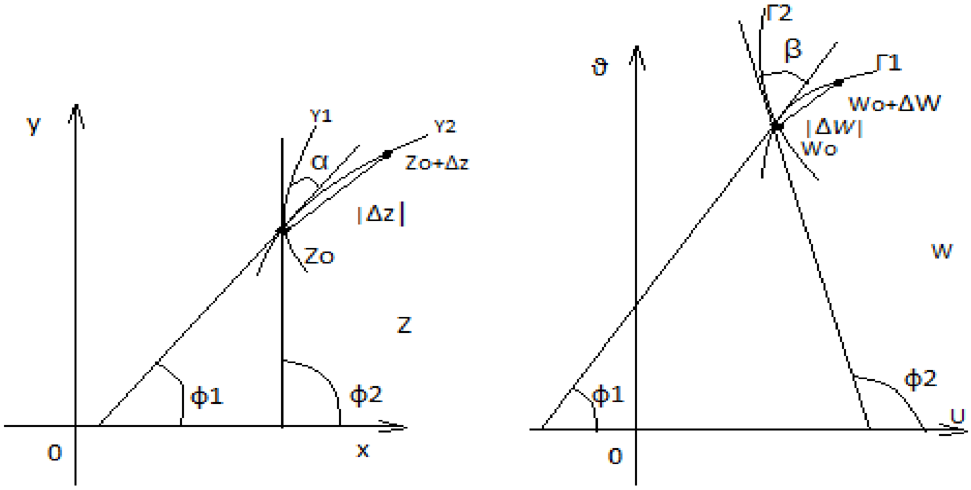


Рис. 10.

Из существования предела $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z)$ следует существование предела $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)|$, (10)

а также, если $f'(z_0) \neq 0$, и предела $\lim\limits_{\Delta z\to 0} Arg\,\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = Arg\, f'(z_0)^{1})$. (11)

С другой стороны,

$$Arg\,\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = Arg\,\Delta\omega - Arg\,\Delta Z,$$

где $Arg\,\Delta z$ и $Arg\,\Delta\omega -$ углы, образованные векторами, изображающими числа Δz и $\Delta\omega$ с положительными направлениями соответствующих действительных осей. При выбранном нами способе предельного перехода эти векторы направлены по хордам кривых γ_1 и Γ_1 (Рис.10) и пределы величин $Arg\,\Delta z$ и $Arg\,\Delta\omega$ при $\Delta z \to 0$ равны соответственно по углам φ_1 и Φ_1 между касательными к кривым γ_1 и Γ_1 в точках z_0 и ω_0 и положительными направлениями соответствующих действительных осей.

Следовательно, $Arg f'(z_0) = \Phi_1 - \varphi_1$ (12)

Повторив те же рассуждения для случая, когда точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0 по кривой γ_2, и принимая во внимание, что величина $Arg\, f'(z_0)$, определенная равенством (11), не зависит от закона, по которому $\Delta z \to 0$, получим:

$$Arg f'(z_0) = \Phi_2 - \varphi_2, \qquad (13)$$

где φ_2 и Φ_2 — соответственно углы между касательными к кривым γ_2 и Γ_2 в точках z_2и ω_0 и положительными направлениями осей Ox и Ou.

Из (12) и (13) получим:

$$\Phi_1 - \varphi_2 = \Phi_2 - \varphi_2, \quad \text{или} \quad \Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1, \qquad (14)$$

Но $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ является углом между касательными к кривым γ_1 и γ_2 в точке z_0, т.е. углом между этими кривыми в точке z_0, а $\beta = \Phi_2 - \Phi_1$ — углом между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке ω_0, причем, в силу (14), $\beta = \alpha$.

Следовательно, при отображении, осуществляемом аналитической функцией, *угол между двумя кривыми, пересекающимися в точке, в которой производная отображающей функции отлична от нуля, сохраняется как по величине, так и по направлению отсчета (свойство постоянство углов)*).

Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Равенства (12) и (13) показывают, что если совместить плоскость z с плоскостью ω так, чтобы точка z_0 совпадала с точкой ω_0, а ось Ox была бы направлена параллельно оси Ou, причем положительные направления этих осей совпали бы, то угол, на которой после этого нужно повернуть вокруг точки z_0 плоскость z для того, чтобы касательная к кривой γ_1 (или γ_2) совпала с касательной к отображенной кривой Γ_1 (соответственно Γ_2), равен $Arg\, f'(z_0),$ — таков геометрический смысл аргумента производной отображающей функции.

Для выяснения геометрического смысла модуля производной заметим, что $|\Delta z|$ является расстояние от точки z_0 до точки $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta\omega|$ —расстояние между точками ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega$ и, следовательно, величина $\frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|}$ указывает, в каком отношении в результате отображения изменяется расстояние между этими точками. Величину $|f'(z_0)|$, являющуюся пределом отношения $\frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|}$ при $\Delta z \to 0$, естественно назвать коэффициентом растяжения в точке z_0 при отображении с помощью функции $\omega = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$,то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояния между точками при отображении увеличиваются и происходит растяжение; если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение в окрестности точки z_0 приводит к сжатию.

Так как, в силу аналитичности функции $f(z)$, производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому закону точка $z_0 + \Delta z$ стремится к точке z_0, то *коэффициент растяжения в данной точке постоянен,* т.е. одинаков во всех направлениях, – таково второе свойство отображения, осуществляемого с помощью аналитической функции.

Отображение, обладающее свойством постоянства углов и свойством постоянства коэффициента растяжения в каждой точке, называют *конформным* или точнее, *конформным отображением* 1-*го рода.* Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным во всех точках, в которых производная этой функции отлична от нуля. Можно доказать и обратное утверждение: *если отображение, осуществляемое функцией* $f(z)$ *,конформно в области D, то функция* $f(z)$ *является аналитической в области D.*

Пример 1. Рассмотрим отображение, осуществляемое функцией $\omega = 3z$.

Так как $\frac{d\omega}{dz} = 3 \neq 0$, то отображение конформно во всей плоскости и коэффициент растяжения в любой точке равен 3.

Так как $Arg\frac{d\omega}{dz} = 0$, то направление при отображении не изменяется.

Если учесть, наконец, что $\omega = 0$ при $z = 0$ и следовательно, начало координат остается при рассматриваемом отображении неподвижным, то можно утверждать, что отображение с помощью функции $\omega = 3z$ сводится к преобразованию подобия с центром подобия в нулевой точке и коэффициентом подобия, равным 3.

Пример 2. Отображение $\omega = z^2$ конформно во всех точках плоскости z, за исключением точки $z = 0$.

Действительно, $\frac{d\omega}{dz} = 2z$ и лишь при $z = 0$ $\frac{d\omega}{dz} = 0$. Так как $Arg\,\omega = 2\,Arg\,z$, то лучи $Arg\,z = \alpha$ и $Arg\,z = \beta$, выходящие из точки $z = 0$ и образующие между собой угол, равный $\beta - \alpha$, отображаются соответственно в лучи $Arg\,\omega = 2\alpha$ и $Arg\,\omega = 2\beta$, образующие между собой угол $2\,(\beta - \alpha)$.

Следовательно, в точке $z = 0$ конформность отображения нарушается: углы в этой точке не сохраняются, а удваиваются.

Отображение, отличающиеся от конформного тем, что углы сохраняются только по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное, называют *конформным отображением 2-го рода.* Таково, например, отображение, осуществляемое функцией $\omega = \bar{z}$. Действительно, если значения z и ω изображать точками одной и той же плоскости, то ввиду того, что точки z и $\bar{z}$ взаимно-симметричны относительно действительной оси (Рис. 11), это отображение сводится к симметрии относительно действительной оси, при этом не происходит искажения масштаба (коэффициент растяжения в каждой точке равен 1) а все углы сохраняются по абсолютной величине, но изменяют направление отсчета на противоположное.

В дальнейшем, говоря о конформном отображении, мы всегда будем иметь в виду лишь конформное отображение 1-го рода.

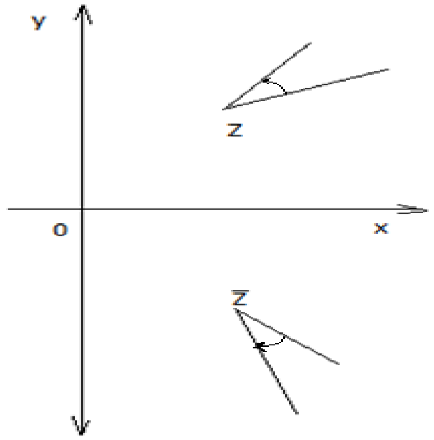


Рис. 11.

Дифференциалом $df(z)$ аналитической функции $\omega = f(z)$ в точке z называется главная линейная по отношению к Δz часть приращения $\Delta\omega = f(z + \Delta z) - f(z)$ этой функции.

Так как $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z)$, то $\frac{\Delta\omega}{\Delta z} = f'(z) + \alpha(z, \Delta z)$,

где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha\,(z, \Delta z) = 0$. Следовательно, $\Delta\omega = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z) * \Delta z$

и ввиду того, что произведение $\alpha(z, \Delta z) * \Delta z$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем Δz, дифференциал функции $f(z)$ равен произведению $f'(z)\Delta z$ или $f'(z)\,dz$ (так как при $f(z) = zdf(z) = dz = \Delta z$).

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется дифференцируемой?
2. Какие условия называется условиями Даламбера-Эйлера?
3. Запишите уравнения Лапласа.
4. Что такое гармонические функции.
5. Что такое конформное отображения 1- го рода?

Индивидуальные задание

1. Проверить условия Даламбера-Эйлера для пути:
   1.$\omega = \sin z$; 2. $\omega = \cos z$; 3. $\omega = \ln z$; 4. $\omega = \arcsin z$; 5.$\omega = z^4$.

2. Найти аналитическую функцию, действительные части которой равны: 1. $x^3 - 3xy^2$; 2. $x^2 - y^2 + 2x$; 3.$\frac{x}{x^2+y^2}$; 4. $\frac{x}{x^2+y^2} - 2y$; 5. $2e^x siny$.
3. Найти аналитическую функцию аргумента z, мнимая часть которой равна: 1. $-\frac{y}{(x+1)^2+}$; 2. $2xy + 3x$. 3. $arctg\frac{y}{x}$, $x > 0$; 4. $e^x(ycosy + xsiny) + x + y$.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОМПЛЕКСНОМУ АРГУМЕНТУ

Понятие интеграла функции комплексной переменной, основные свойства этих интегралов и формулы интегрирования элементарных функций почти не отличаются от аналогичных понятий и свойства интегралов функций действительного переменного. Однако определенный интеграл аналитической функции обладает еще одним замечательным свойством, присущим далеко не всем криволинейным интегралам дифференцируемых функций действительных переменных, а именно: в односвязных областях интеграл аналитической функции не зависит от пути интегрирования. Это свойство влечет за собой далеко идущие следствия, изложение которых и рассмотрим дальше.

5. 1. Интеграл от функции комплексного переменного

Предположим, что в плоскости z дана замкнутая или незамкнутая дуга C, которую будем в дальнейшем считать гладкой или кусочно-гладкой . Граничные точки кривой C обозначим z_0 и z; если кривая замкнута, то z_0 = Z . Одному из этих точек, например z_0 , будем считать начальной , а другую конечной и тем самым установим положительное направление на кривой C, которое на чертеже будем отмечать стрелкой (Рис.12). Предположим, далее, что функция $f(z)$ комплексного аргумента z непрерывна во всех точках дуги C.

Разобьем дугу C произвольным способом на n «элементарных» дуг и занумеруем точки деления z_k в направлении от начальной точки к конечной , причем $z_n = Z$ (Рис. 12) . Введем обозначения :

$$z_1 - z_0 = \Delta z_1, \quad z_2 - z_1 = \Delta z_2 \quad \ldots, \quad z_n - z_{n-1} = \Delta z_n,$$

Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|\Delta z_k|$ – длина этого вектора т.е. длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем по одной точке и обозначим эти точки $\zeta_1,\ \zeta_{2,}, \dots ,\ \zeta_n$ (точка ζ_k находится на элементарной дуге с концами в точках z_{r-1} и z_k)

Составим сумму

$$f(\zeta_1)\Delta z_1 + f(\zeta_{2,})\Delta z_2 + \cdots + f(\zeta_n)\Delta z_n \qquad (1)$$

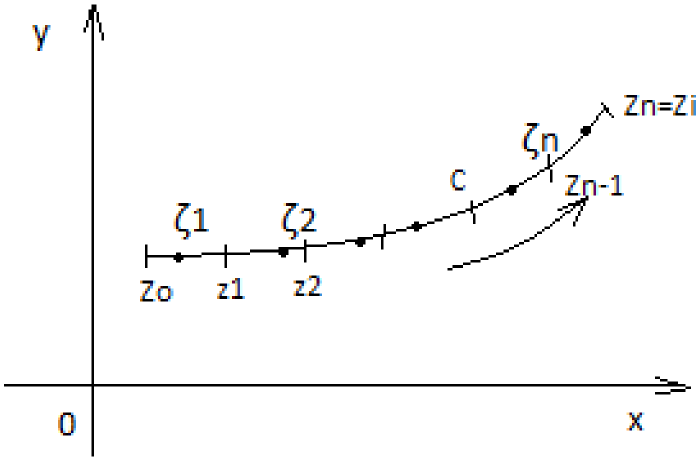


Рис. 12

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \to \infty$ и длина наибольшей из элементарных дуг стремится к нулю (ввиду того, что дуга кусочно-гладкая, это равносильно тому, что стремится к нулю максимальная из величин ($|\Delta z_k|$), называется интегралом функции *f(z)* по дуге С;

$$\int f(z)\,dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k)\Delta z_k) \qquad (2)$$

Из этого определения непосредственно получим следующие свойства интеграла);

1) $\int_C [f(z) \pm f_2(z)]\,dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz$,

2) $\int_C kf(z)d\,z = k \int_C f(z)dz$,

где k – действительная или комплексная постоянная.

3) Если дуга $\bar{C}$ геометрически совпадает с дугой С, но имеет направление, противоположное направлению дуги С, то

$$\int_{\bar{c}} f(z)dz = -\int_{c} f(z)dz,$$

так как при замене дуги C дугой $\overline{C}$ все множители Δz_k в правой части (2) изменяет знаки на противоположные.

4) Если дуга C состоит из дуг $C_1, C_2, \dots, C_n$ (Рис. 13), то

$$\int\limits_{c} f(z)dz = \int\limits_{c_1} f(z)dz + \int\limits_{c_2} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{c_n} f(z)dz.$$

5) $\int_c \ dz = Z - z_{0,}$

так как при $f(z) \equiv 1$ сумма в правой части (2) принимает вид
$\Delta z_1 + \Delta z_2 + \cdots + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (Z - z_{n-1}) = Z - z_0$.

6) Если $|f(z)| < M$ во всех точках дуги C и длина дуги C равна l, то

$$\left|\int_c f(z)dz\right| \le Ml.$$

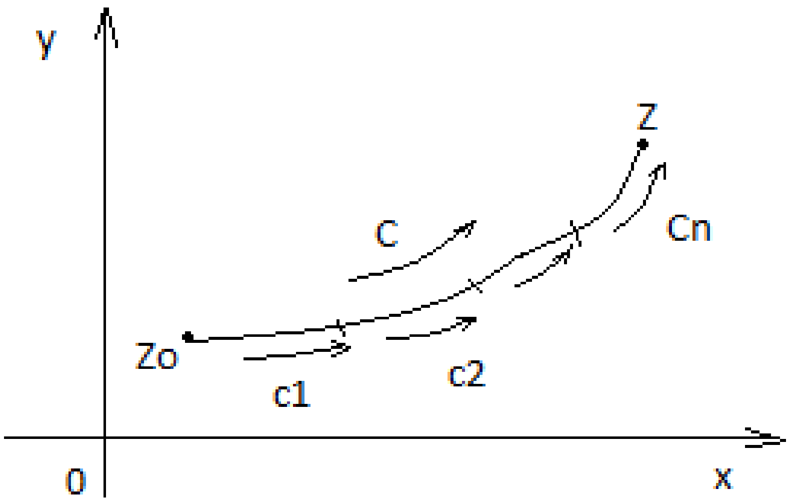


Рис.13

Действительно,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\,|\Delta z_k| \le M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k| \le Mi,$$

так как сумма $\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|$ равна длине ломаной, вписанной в дугу C, и следовательно, эта сумма не больше чем длина l дуги C.

7) $\left|\int_c f(z)dz\right| \le \int_c |f(z)|\,|dz|$, где символ, $\int_c |f(z)|\,|dz|$ обозначен предел $\lim\limits_{max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k|$.

Это свойство становится очевидным, если принять во внимание, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||\Delta z_k|.$$

Вычисление интеграла (2) сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных аргументов. В самом деле, пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где u и v являются функциями аргументов x и y: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$.

Обозначим $z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$,

$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$;

тогда

$$\Delta z_k = (x_{k+1} + iy_{k+1}) - (x_k + iy_k) =$$
$$= (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) = \Delta x_k + i\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$,

а так как $f(\zeta_k) = u(\xi_k, \eta_k) + iv(\xi_k, \eta_k)$, то

$f(\zeta_k)\Delta z_k = [u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)](\Delta x_k + i\Delta y_k) = u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k + i[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k]$ и

$$\int_C f(z)dz = \lim_{max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} [u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k] +$$
$$+ i \lim_{max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{n} [v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k],$$

или в соответствии с определением криволинейного интеграла

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (3)$$

Существование криволинейных интегралов в правой части формулы (3), а следовательно и существование интеграла $\int_C f(z)dz$,

следует из кусочной гладкости кривой C и из непрерывности вдоль дуги C функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, являющихся действительной и мнимой частями непрерывной вдоль кривой C функции $f(z)$.

Формула (3) показывает, что для того, чтобы свести вычисление интеграла по комплексному аргументу к вычислению обычных криволинейных интегралов, достаточно выделить из подынтегральной функции действительную и мнимую части

$$f(z) = u + iv$$

и умножить $u + iv$ на $dz = dx + idy$,

после чего подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy).$$

Если дуга C задана параметрическими уравнениями:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad (4)$$

а начальная и конечная точки дуги соответствует при этом значениям параметра $t = t_0$ и $t = T$:

$$z_0 = x(t_0) + iy(t_0),$$
$$Z = x(T) + iy(T),$$

то, как известно из правила вычисления криволинейного интеграла, подставив под знак интеграла вместо x и y функции, стоящие в правых частях уравнений (4), а вместо dx и dy дифференциалы этих функций, можно свести вычисление криволинейных интегралов в правой части (3) к вычислению определенных интегралов с нижним пределом t_0 и верхним пределом T С другой стороны, уравнения (4) равносильны одному уравнению в комплексной форме

$$z = z(t), \qquad (5)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$, и подстановка в правую часть формулы (3) вместо x и y функции, стоящие в правых частях (4), а вместо dx и dy соответствующих дифференциалов равносильна подстановка в левую часть формулы (3) вместо z функции, стоящей в правой части (5), а вместо dz дифференциала этой функции.

Следовательно, интеграл по комплексному аргументу можно вычислять, пользуясь формулой $\int_C f(z)dz = \int_{t_0}^{T} f[z(t)]z'(t)dt.$

Пример. Вычислить интеграл $\int_C Re\, zdz$, где дугой C является:

1) прямолинейный отрезок, соединяющий точку 0 с точкой $1 + i$;
2) ломаная, состоящая из прямолинейного отрезка, соединяющего точку 0 с точкой 1, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку 1 с точкой $1 + i$.

Решение.

1) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1+i$в параметрической форме, имеет вид $x = t$, $y = t$, а в комплексной форме $z = (1 + i)t$, где действительное переменное t изменяется от 0 до 1.

Находим: $dz = (1 + i)dt$

$$\int_C Re\, z\, dz = \int_0^1 Re[(1 + i)t](1 + i)dt = (1 + i)\int_0^1 t\, dt = \frac{(1 + i)t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1 + i}{2}.$$

2) Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и 1 в комплексной форме: $z=t$, где t изменяется от 0 до 1; уравнение в комплексной форме отрезка, соединяющего точки *1* и *1*+i: $z = 1 + it$, где t изменяется от 0 до *1*.

Итак, $\int_C Rezdz = \int_0^1 Ret\,dt + \int_0^1 Re(1+it)idt = \int_0^1 tdt + i\int_0^1 dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + it\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i.$

5. 2. Теорема Коши

Если f(z) является аналитической функцией на замкнутом контуре C и в односвязной области, ограниченной этим контуром, то $\int_C f(z)dz = 0$ (теорема Коши).

Справедливость теоремы Коши следует из формулы (3), если предположить, что производная $f'(z)$ данной функции непрерывна на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, так как в этих предположениях криволинейные интегралы $\int_C udx - vdy$ и $\int_C v\,dx + u\,dy$, будучи интегралами по замкнутому контуру от полных дифференциалов, равны нулю.

Действительно, для того чтобы выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ - непрерывно дифференцируемые функции, было полным дифференциалом, как известно, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. В применении к интегралам $\int_C u\,dx - v\,dy$ и $\int_C v\,dx + u\,dy$ это условие сводится к условиям Эйлера-Даламбера $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$, выполненным в силу аналитичности функции $\int(z)$, а непрерывность производной $f'(z)$ обеспечивает непрерывность частных производных функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$. Таким образом, каждый из двух интегралов в правой части (3) равен нулю, и теорема Коши тем самым доказана.

Можно доказать теорему Коши и без предположения о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в области, ограниченной этим контуром, однако при этом доказательство значительно усложнится.

Распространим теорему Коши на случай многосвязной области. Рассмотрим многосвязную область G, ограниченную внешним контуром C_0 и внутренними контурами C_1, C_2, …, C_n (Рис.14); и предположим, что функция $\int(z)$ является аналитической как в этой многосвязной области, так и на контурах C_0, C_1, C_2, …, C_n .

Пусть $\int_{C_k} f(z)dz$ $(k=0,1,2\ldots,n)$

обозначает интеграл по контуру C_k, проходимому против часовой стрелки. *Сложный контур*, являющийся границей данной многосвязной области и состоящий из контуров C_0, C_1, C_2,…, C_n , обозначим Г и выберем на нём в качестве положительного такое направление, при движении по которому область G остаётся слева. Иными словами, интеграл по контуру Г будем считать равным сумме интеграла по контуру C_0 , проходимому против часовой стрелки, и интегралов по контурам $C_1, C_2, \dots, C_n$, проходимым по часовой стрелке:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz - \cdots - \int_{C_n} f(z)dz \qquad (7)$$

Теорема Коши будет распространяется и на случай многосвязной области. Примем это без доказательство. Следовательно, можно записать в виде

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz. \qquad (8)$$

В частности, если функция *f(z)* является аналитической на контурах C_0 *и* C_1 (Рис. 14) и в двухсвязной области, ограниченной этими контурами, то из (8) при $n=1$ получим:

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz. \qquad (9)$$

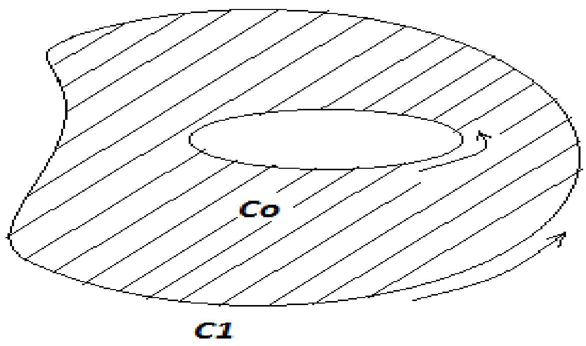


Рис. 14

5. 3. Вычисление интеграла от аналитической функции

Если интеграл от функции *f(z)* по всякому замкнутому контуру, расположенному в некоторой области G, равен нулю, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области G**,** зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги и, следовательно, одинаков для всех дуг, имеющих общую начальную и общую конечную точки. Другими словами, интеграл не зависит от пути интегрирования. Действительно, если дуги C_1 *и* C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку Z (Рис. 15), то величина $\int_{C_1} f(z)dz - \int_2 \ f(z)dz$ (10)

представляет собой интеграл от функции *f(z)* по замкнутому контуру С, состоящему из дуги C_1 и дуги $\overline{C_2}$, геометрически совпадающей с дугой C_2, но противоположной ей по направлению. Если этот интеграл равен нулю, то равна нулю и разность (10), откуда $\int_{C_1} f(z)dz = \int_2 \ f(z)dz$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция *f(z)* аналитична в некоторой односвязной области G, то, какова бы ни была дуга С внутри этой области, величина $\int_{C} \ f(z)dz$ зависит только от начальной точки z_0 и конечной точки Z дуги С и, следовательно, для этого интеграла можно пользоваться обозначением $\int_{z_0}^{z} f(z)dz$.

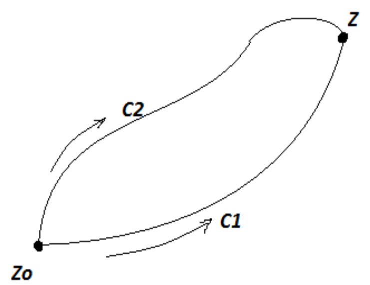


Рис.15.

Докажем, что *если величина* z_0 *постоянна, а Z изменяется в области G, то в этой области функция* $F(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ *является аналитической* и $\frac{dF(Z)}{dZ} = f(Z)$.

Какова бы ни была точка Z внутри области G, можно взять столь малый круг с центром в этой точке, что все точки рассматриваемого круга будут также принадлежать области *G*. Поэтому, если $|\Delta Z|$ достаточно мал, то можно точку Z соединить с точкой Z+ΔZ прямолинейным отрезком, лежащим в области G (Рис. 16). Пусть С-какая - нибудь дуга, лежащая внутри области G и соединяющая точку z_0с точкой Z; тогда

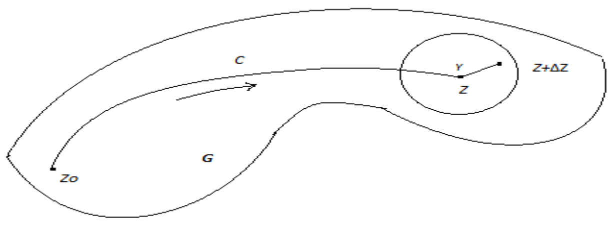


Рис . 16

$$\int_{c} f(z)dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz = F(Z),$$

$$F(Z+\Delta Z) = \int_{z_0}^{Z+\Delta z} f(z)dz, \qquad (11)$$

причем в (11) можно считать путь интегрирования, состоящим из дуги C и прямолинейного отрезка γ, соединяющего точку Z с точкой Z+ΔZ. Тогда на основании свойства 4 $F(Z+\Delta Z) - F(Z) = \int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$

$$\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} = \frac{1}{\Delta Z}\int_{\gamma} f(z)dz. \qquad (12)$$

Функция *f(z)* является функцией аналитической, а следовательно и непрерывной в области G и, в частности, на отрезке γ . Поэтому как бы мало ни было положительное число ε для любой точки z отрезка γ, соединяющего точку Z с точкой Z+ΔZ, выполнено неравенство $|f(z) - f(Z)| < \varepsilon,$
если только величина |ΔZ|, то на основании свойства 6) получим:

$$|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\gamma} f(Z)dz| = |\int_{\gamma} [f(z) - f(Z)]dz| < \varepsilon|\Delta Z|,$$

откуда

$$\left|\frac{1}{\Delta Z}\int_{\gamma} f(z)dz - \frac{1}{\Delta Z}\int_{\gamma} f(Z)dz\right| < \varepsilon. \qquad (13)$$

Но в соответствии со свойствами 2 и 5

$$\int_{\gamma} f(Z)dz = f(Z)\int_{\gamma} dz = f(Z)[(Z+\Delta Z) - Z] = f(Z)\Delta Z$$

и неравенство (13) принимает вид $\left|\frac{1}{\Delta Z}\int_{\gamma} f(z)dz - f(Z)\right| < \varepsilon,$
откуда, учитывая (12), при достаточно малом $|\Delta Z|$ получим:

$$\left|\frac{F(Z+\Delta Z) - F(Z)}{\Delta Z} - f(Z)\right| < \varepsilon.$$

Но это неравенство означает, что предел $\lim\limits_{\Delta Z\to 0}\frac{F(Z+\Delta Z)-F(Z)}{\Delta Z} = F'(Z)$
существует и равен *f(Z)*. Утверждение доказано.

Если две функции имеют в некоторой области одинаковые производные, то в этой области разность между функциями постоянна. Действительно, если $\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z)$ и $F'_1(z) = F'_2(z)$, то $\varphi'(z) = 0.$ (14)
Но если $\varphi(z) = u(x,y) + iv(x,y),$ то $\varphi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$
и из (114) получим: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$ $\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$

Отсюда, в силу условий Даламбера-Эйлера и $\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$ $\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

Следовательно, функции $u(x,y), v(x,y)$, а значит и функция $\varphi(z)$, постоянны.

Если Ф(z) какая-нибудь функция, для которой $\Phi'(z) = f(z)$, где *f(z)*- аналитическая функция, то по доказанному $\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \Phi(Z) + C$, где С-постоянная. Положив в этом равенстве $Z = z_0$ (точнее, перейдя к пределу при $Z \to z_0$, получим: $0 = \Phi(z_0) + C$, откуда $C = -\Phi(z_0)$ и

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \Phi(Z) - \Phi(z_0) = \Phi(z)\,\Big|_{z_0}^{Z}.$$

Эта формула совпадает с известной из интегрального исчисления формулой Ньютона-Лейбница.

5. 4. Интегралы вида $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n}$

Вычислим интеграл

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} \tag{15}$$

по замкнутому контуру С в предположении, что n является целым положительным числом (если целое число $n \le 0$, то по теореме Коши $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_C (z-a)^m dz = 0,\ m = -n \ge 0$).

Если точка $z=a$ находится вне области, ограниченной контуром С, то в соответствии с теоремой Коши $\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$.

Предположим теперь, что контур *С* один раз обходит точку a, и будем считать, что направление обхода выбрано так, что точка a остается слева. Тогда, в силу теоремы Коши (см. (9)), величина интеграла (15) не зависит от вида контура *С*, хотя, быть может, и отлична от нуля. Поэтому в качестве контура С можно взять, окружность радиуса R с центром в точке a. Уравнение такой окружности в комплексной форме имеет вид

$$z - a = Re^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Отсюда $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$ и на основании (6)

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{i\varphi}d\varphi}{R^n e^{in\varphi}} = \frac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi} d\varphi \tag{16}$$

При $n \neq 1$ (n=2,3…) получим:

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \frac{i}{R^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)R^{n-1}} e^{i(1-n)\varphi}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

так как $e^{2\pi i(1-n)} = e^0 = 1$.

Если же n=1, то из (16) следует, что

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{17}$$

Итак, если даже точка а находится внутри контура С, то интеграл (15) отличен от то интеграл (15) отличен от нуля только при n=1.

Из (17) следует, что если контур С обходит k раз точку a в положительном направлении (Рис. 17), то $\int_C \frac{dz}{z-a} = 2k\pi i;$ (18)

Если же контур C обходит k раз точку a в отрицательном направлении, то $\int_C \frac{dz}{z-a} = -2k\pi i;$ (18′)

Равенства (17), (18), (18′) находится в тесной связи с определением логарифмической функции. Действительно, для неопределённого интеграла имеем: $\int \frac{dz}{z-a} = \ln(\mathrm{z}-\mathrm{a}) + \mathrm{C}.$

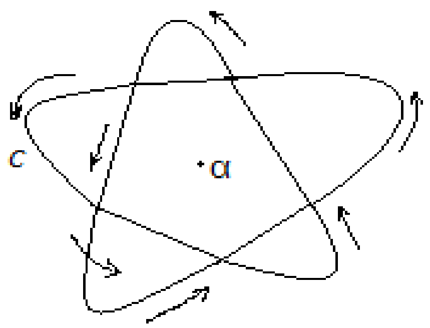


Рис.17

Подынтегральная функция аналитична всюду, кроме точки z=a, и поэтому в любой односвязной области, не содержащей точки z=a, интеграл

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a},$$

где γ- дуга, принадлежащей этой области, не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной точки z_2 дуги γ.

Допустим для простоты, что a=0, и рассмотрим интеграл $\int_\gamma \frac{dz}{z}$.

Пусть $z_1 = 1$ и $z_2 = z$ является соответственно начальной и конечной точками дуги γ и пусть дуга γ не пересекает отрицательной части действительной оси и не проходит через точку z=0. Тогда можно дугу γ включить в односвязную область, не содержащую точки z=0 и точек отрицательной части действительной оси; в такой области функция lnz будет непрерывной и аналитической (отрицательная часть действительной оси является для функции lnz=ln|z|+$iarg\ z$ линией разрыва, так как в силу определения главного значения аргумента величина $arg\ z$ терпит разрыв при действительных отрицательных значениях z. При этих условиях независимо от формы дуги γ будем иметь: $\int_{\gamma}\frac{dz}{z}=\int_{1}^{z}\frac{dz}{z}=\ln z-\ln 1=\ln z.$

Если теперь соединить точку 1 с точкой z дугой γ' так, чтобы дуги γ и γ' образовали замкнутый контур l, один раз окружающий точку $z=0$, то в соответствии с равенством (17) получим: $\int_{l}\frac{dz}{z}=2\pi i$; если направление на контуре l выбрано так, что он обходится против часовой стрелки. Но так как (Рис.18) $\int_{l}\frac{dz}{z}=\pm(\int_{\gamma}\frac{dz}{z}-\int_{\gamma'}\frac{dz}{z})$ (знак зависит от того, какое из расположений, указанных на рис.18 имеет место, а именно: верхний знак относится к Рис. 18, а, нижний- к Рис18,б), то

$$\int_{\gamma'}\frac{dz}{z}=\ln z\pm 2\pi i.$$

Если дуга γ' такова, что замкнутый контур, образованный ею и дугой γ k раз, обходит точку z=0, то на основании формулы (18) или (18′) получим:

$$\int_{\gamma'}\frac{dz}{z}=ln\,z\pm 2k\pi i.$$

Поэтому, если Г- любая, не проходящая через точку z=0 дуга с начальной точкой l и конечной точкой z, то

$$\int_{\Gamma}\frac{dz}{z}=\int_{1}^{z}\frac{dz}{z}=Ln\,z, \qquad (19)$$

причем выбор значения многозначной функции $Ln\,z$ в правой части этого равенства зависит от выбора дуги Г.

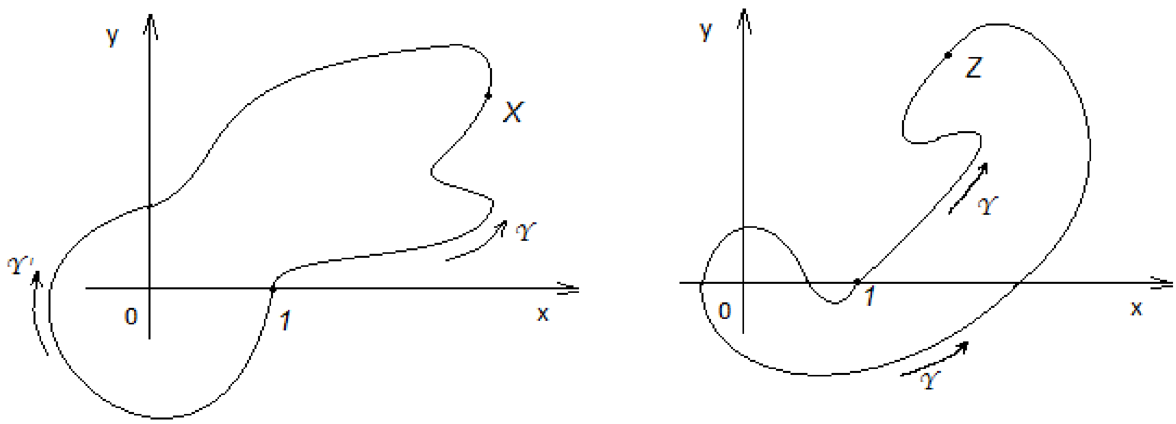


Рис. 18

5.5. Интеграл Коши

Предложим, что функция *f(z)* является аналитической на некотором контуре *Г* и в односвязной области *G*, ограниченной этим контуром. Пусть, далее, z−любая точка внутри области *G* (Рис.19). Описав из точки z, как из центра, лежащую в области G окружность γ радиуса ρ, в силу основанной

на теореме Коши формулы (12) получим: $$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (20)$$

Теорема Коши применима, так как единственной особой точкой в области G для подынтегральной функции является точка $\zeta=z$ и, следовательно, в двусвязной области между контурами *Г* и γ эта функция является аналитической. Заметим, что в равенстве (20) радиус ρ окружности γ может быть выбран произвольно, лишь бы эта окружность лежала внутри области *G*.

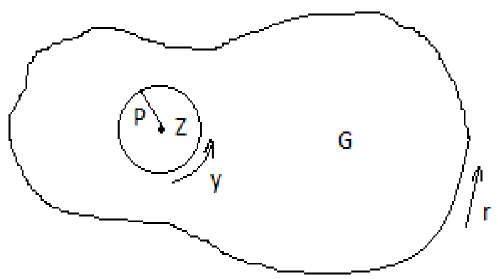


Рис.19.

Так как функция *f(z)* является аналитической, а следовательно и непрерывной в области *G*, то для каждого ε>0, как бы мало оно ни было, и для любой точки ζ на окружности γ справедливо неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon,$$

если только радиус ρ окружности γ достаточно мал (напоминаем, что точка z—центр этой окружности и, следовательно, $|\zeta-z|=\rho$).

Поэтому

$$\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_{\gamma}\frac{f(z)d\zeta}{\zeta-z}\right|=\left|\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\,\zeta\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}*2\pi\rho=2\pi\varepsilon. \qquad (21)$$

Здесь мы воспользовались свойством 6) и тем, что $|\zeta-z|=\rho$) на дуге γ.

Так как ε можно взять сколь угодно малым, то неравенство (21) означает, что $$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\gamma}\frac{f(z)d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (22)$$

Но, как уже было отмечено, величина $\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$ при уменьшении ρ не изменяется, поэтому знак предела в левой части (22) можно опустить. Если учесть также, что в силу (17)

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = f(z)\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i f(z)\ ,$$

То из (19) будем иметь: $\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = 2\pi i f(z).$

Сопоставляя последнее равенство с равенством (22), получим так называемую *интегральную формулу Коши*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}\ .$$

Величина, состоящая в правой части интегральной формулы Коши, называется *интегралом Коши.* Для вычисления интеграла Коши нужно знать значения функции *f(z)* только на контуре Г и, следовательно, интегральная формула Коши позволяет находить значения аналитической функции в любой точке, лежащей внутри области G, если известны значения этой функции на контуре *Г*, ограничивающем область *G*.

Если точка z лежит вне области G, то интеграл Коши равен нулю в силу теоремы Коши, так как в этом случае подынтегральная функция является аналитической в области G.

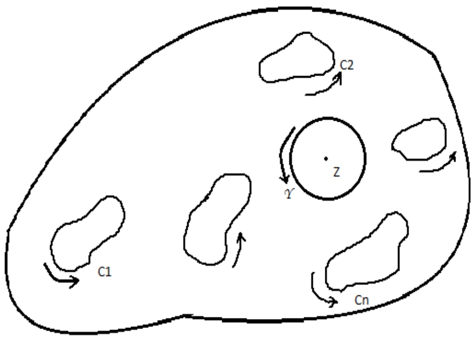


Рис.20.

Интегральная формула Коши легко обобщается на случай сложного контура Г, ограничивающего многосвязную область G. Действительно, пусть функция $f(\zeta)$ является аналитической на сложном контуре Г, состоящем из простых контуров $C_0, C_1, \dots, C_n$ (Рис.20), и в многосвязной области, ограниченной контуром Г. Пусть, далее, z - любая точка внутри этой многосвязной области и γ – лежащая в этой области окружность с центром в точке z. Рассмотрим многосвязную область, границей которой является сложный контур Γ', состоящий из простых контуров $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n\ , \gamma.$ В этой области и на её границе функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ является аналитической и, в силу теоремы Коши,

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} = 0.$$

Так как

$\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{C_0}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_{C_1}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\ldots-\int_{C_n}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$,

то
$$\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \qquad (23)$$

Но область, ограниченная контуром γ односвязна и для нее справедливость интегральной формулы Коши доказана, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=f(z),$$

и на основании (23) получим:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

Применим интегральную формулу Коши к случаю, когда контуром Г является окружность с центром в точке $z=a$,уравнение которой имеет вид

$\zeta-a=Re^{i\varphi},\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,$ или $\zeta=a+Re^{i\varphi},$ откуда

$$d\zeta=Re^{i\varphi}id\varphi.$$

На основании интегральной формулы Коши

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}id\varphi}{Re^{i\varphi}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(a+Re^{i\varphi})d\varphi. \qquad (24)$$

Для того чтобы выяснить смысл этого равенства, представим себе, что на окружности Г задана некоторая непрерывная функция $F(\varphi)$,значения

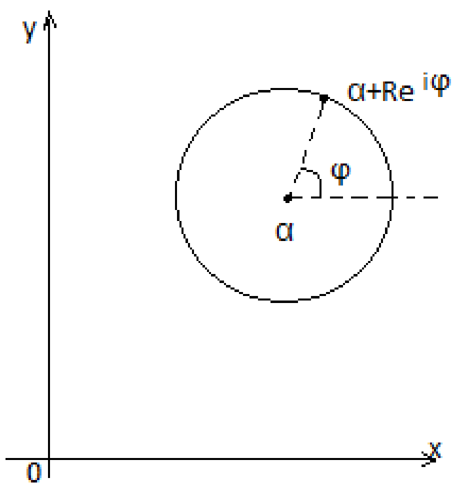


Рис.21.

которой зависят от угла φ (Рис.21) между радиусом, идущим из центра a в данную точку окружности, и положительным направлением действительной оси. Разобьём окружность Γ на n равных дуг лучами, идущими из центра (каждые два соседних луча образуют между собой угол $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$), и выберем на каждой из этих дуг по одной точке, обозначив $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ значения угла φ, соответствующие выбранным точкам.

Величина

$$\frac{F(\varphi_1)+F(\varphi_2)+\ldots+F(\varphi_n)}{n} = \frac{1}{2\pi}[F(\varphi_1)\Delta\varphi + F(\varphi_2)\Delta\varphi + \ldots + F(\varphi_n)\Delta\varphi] \qquad (25)$$

является средним арифметическим из значений функции $F(\varphi)$ в точках окружности Г, соответствующих углам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Предел выражения (25) при $n \to \infty$ естественно назвать средним арифметическим значений функции $F(\varphi)$ на окружности Γ. Из (25) и из определения интеграла следует, что этот предел равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\varphi)d\varphi.$$

Следовательно, формула (24) показывает, что значение аналитической функции в центре круга равно среднему арифметическому из её значений на окружности этого круга.

Если $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – комплексные числа, а n – целое положительное число, то

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{n}\right| \le \frac{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|}{n},$$

т.е. модуль среднего арифметического не больше, чем среднее арифметическое из модулей. Путем предельного перехода это неравенство распространяется на среднее арифметическое из значений функции на окружности Г:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} F(\varphi)d\varphi\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\varphi)|d\varphi$$

(впрочем, к тому же выводу приводит и свойство 7),). В то же время очевидно, что среднее арифметическое нескольких действительных чисел не может быть больше, чем каждое из этих чисел. Путем предельного перехода это свойство также распространяется на среднее арифметическое значений непрерывной функции на окружности, если эта функция принимает в точках окружности только действительные значения. Учитывая, что модуль аналитической функции является непрерывной функцией, принимающей только действительные значения, можно доказать весьма важное свойство аналитических функции, носящее название принципа *максимума модуля: модуль функции, отличной от тождественной постоянной и аналитической в некоторой области, не может ни в одной внутренней точке этой области принять максимальное для этой области значение.*

Действительной, предположим, что z_0 −внутренняя точка области G, в которой функция $f(z)$ аналитична, и допустим, что $|f(z_0)|$ больше, чем $|f(z))|$, для любой другой точки области.

Опишем из точки z_0, как из центра, окружность γ столь малого радиуса, что все точки этой окружности лежат в области G. По доказанному, значение $f(z_0)$ равно среднему арифметическому из значений $f(z)$ на окружности γ . Следовательно, $|f(z_0)|$ не больше, чем среднее арифметическое из значений $|f(z)|$ на окружности γ, и, тем более, не может быть больше, чем каждое из значений $|f(z)|$ на этой окружности. Но это заключение противоречит предположению о том, что значение $|f(z_0)|$ больше, чем значение $|f(z)|$ во всякой точке области G, и в частности во всякой точке окружности γ. Если бы мы допустили, что значение модуля аналитической функции $f(z)$ в некоторой внутренней точке z_0 больше или равно значению $|f(z)|$ в любой другой точке области G, то можно было бы доказать, что функция $f(z)$, постоянна (доказательство мы опускаем).

Пользуясь тем, что действительная и мнимая части аналитической функции являются функциями гармоническими, можно, исходя из интегральной формулы Коши, выразить значения гармонической функции во всякой точке, лежащей внутри круга, через значения этой функции на окружности круга. Для этого следует в левой и правой частях интегральной формулы Коши отделить действительную часть от мнимой.

Выберем для упрощения вычислений систему координат так, чтобы центр круга совпал с началом координат. Тогда уравнение ограничивающий окружности будет иметь вид

$$\zeta = Re^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \text{откуда} \qquad d\zeta = Re^{i\varphi} i d\varphi.$$

Положив z= r$e^{i\theta}(r < R)$, получим с помощью интегральной формулы Коши:

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}-re^{i\theta}}. \qquad (26)$$

С другой стороны, если в правую часть формулы Коши подставить вместо z число, соответствующее точке, лежащей вне данного круга, то интеграл, в силу теоремы Коши, будет равен нулю. Вне данного круга лежит, в частности, точка z^*, определенная равенствами

$$|z^*| = \frac{R^2}{|z|} = \frac{R^2}{r}, \qquad Arg\, z^* = Arg\, z = \theta, \text{ т.е. } \qquad z^* = \frac{R^2}{r}e^{i\theta} \quad .$$

Действительно, из r < R следует, что $|z^*| > R$.

Подставляя в правую часть формулы Коши z^* вместо z, получим:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})Re^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}-\frac{R^2}{r}e^{i\theta}}, \quad \text{или} \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\varphi})re^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}-Re^{i\theta}}. \quad (27)$$

Вычитая из левой и правой частей (26) соответственно левую и правую части (27), получим:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}\left(\frac{R}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{r}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})e^{i\varphi}\frac{(r^2 - R^2)e^{i\theta}}{(Re^{i\varphi} - re^{i\theta})(re^{i\varphi} - Re^{i\theta})}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{(R^2 - r^2)e^{i(\theta+\varphi)}}{R^2e^{i(\theta+\varphi)} + r^2e^{i(\theta+\varphi)} - Rr(e^{2i\theta} + e^{2i\varphi})}d\varphi.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла в правой части последнего равенства на $e^{i(\theta+\varphi)}$, найдем:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2-r^2-Rr\left(e^{i(\theta+\varphi)}+e^{-i(\theta+\varphi)}\right)}d\varphi.$$

Но $e^{i(\theta-\varphi)} + e^{-i(\theta-\varphi)} = 2\cos(\theta - \varphi)$, следовательно,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rrcos(\theta-\varphi)}d\varphi. \qquad (28)$$

Отделив действительную часть от мнимой

$$f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta), \qquad f(Re^{i\varphi}) = u(R,\varphi) + iv(R,\varphi)$$

и приравняв действительные части в равенстве (28), получим:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rrcos(\theta-\varphi)}d\varphi \qquad (29)$$

Эта формула позволяет найти значение гармонической функции в любой точке (r,θ), находящейся внутри круга, если известны значения *u(R,φ)* этой функции в точках (R,φ) на окружности круга радиуса R. Правую часть равенства (29) называют *интегралом Пуассона*.

Положив в (29) $r = 0$ и обозначим через u_0 значение функцииu (r,θ) при *r=0*, получим: $u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\varphi)\,d\varphi.$

Следовательно, значение гармонической функции в центре круга равно среднему арифметическому её значений на окружности круга. Так как, среднее арифметическое значений *u(R, φ)* не может быть больше наибольшего из этих значений и меньше наименьшего из них, то рассуждения, аналогичные изложенным выше, приводят к принципу *максимума и минимума для гармонической функции*: *функция, отличая от тождественной постоянной и гармоническая в некоторой области, ни в одной внутренней точке этой области не может принять максимальное или минимальное для этой области значение.*

5.6. Производные высших порядков от аналитической функции

Докажем, что производная аналитической функции также является аналитической функцией.

Пусть $f(z)$ является аналитической функцией на замкнутом контуре С и в ограниченной этим контуром области; тогда в соответствии с интегральной формулой Коши $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$,

где z- любая точка внутри рассматриваемой области.

Какова бы ни была внутренняя точка z рассматриваемой области, величину $|h|$ можно выбрать столь малой, что точка $z+h$ будет также лежать внутри этой области. Будем, например, считать, что $|h|$ меньше кратчайшего расстояния точки z до контура C. На основании той же интегральной формулы Коши $f(z+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z - h}$ и

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int_C \left[\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z - h} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right] d\zeta,$$

или после несложных преобразований

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \qquad (30)$$

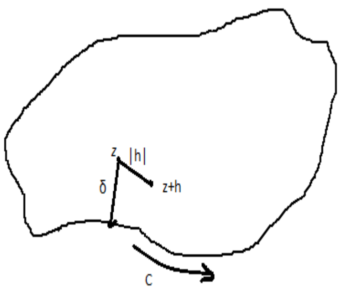
При $h \to 0$ левая часть этого равенства стремится к $f'(z)$, а подынтегральная функция в правой части$-\ k\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$. Следовательно, мы приходим к формуле

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \qquad (31)$$

справедливость которой будет доказана, если будет обоснован предельный переход под знаком интеграла в правой части (30), т.е. если будет доказано, что $\lim\limits_{h \to 0}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} = \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2}$.

Для этого достаточно установить, что разность

$$\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2} =$$



$$\int_C f(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right] d\zeta =$$

$$h\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} \qquad (32)$$

стремится к нулю при $h \to 0$.

й $|\zeta - z| \ge \delta$, $|\zeta - z - h| \ge \delta - |h|$ δ кратчайшее расстояние точки z от контура С (Рис. 2

Если, далее, М- наибольшее значение модуля функции $f(z)$ на контуре С, то для любой точки ζ этого контура $\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right| \leq \frac{M}{(\delta-|h|)\delta^2}$ и на основании уже неоднократного использованного свойства 6) .

Рис.22

$\left|\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right| \leq \frac{Ml}{(\delta-|h|)\delta^2}$, где l – длина дуги С.

Но тогда на основании (32) $\left|\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)} - \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}\right| \leq$
$|h|\frac{Ml}{(\delta-|h|)\delta^2} \to 0$
При $h\to 0$, и формула (31) доказана.

Составим с помощью (31) отношение $\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}$ и перейдя к пределу при $h\to 0$, можно с помощью аналогичных выкладок доказать, что

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^3}. \qquad (33)$$

Так же доказывается, что при любом целом положительном n

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}} \qquad (34)$$

Равенство (34) получено в предположении, что функция $f(z)$ является аналитической как на контуре С, так и в области, ограниченной этим контуром. Но если функция $f(z)$ является аналитической в точке z, то всегда можно провести из этой точки, как из центра, окружность С столь малого радиуса, что функция $f(z)$ останется аналитической на этой окружности и в круге, ею ограниченном, и следовательно, на основания формулы (34) можно заключить, что в точке z и в любой другой точке достаточно малой окрестности точки z существует производная любого порядка n этой функции. Итак, *из аналитичности функции в некоторой точке, т.е. из существования первой производной данной функции в какой-либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а следовательно и аналитичность этих производных.*

Интегральная формула Коши и формула (34) могут служить для вычисления интегралов по замкнутым контурам.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$.

где С- окружность радиуса 2 с центром в точке $3i$. Функция $f(z)=\frac{e^z}{z}$, внутри круга, ограниченного окружностью C, аналитична, поэтому, применяя интегральную формулу Коши, получим:

$$\int_C \frac{e^z dz}{z(z-2i)} = \int_C \frac{f(z)dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(cos2 + isin2).$$

Пример 2. Вычислить $\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}$,

где C- замкнутый контур, однократно обходящий точку i. применяя формулу (34) к функции *f(z)=cos z* , получим:

$$\int_C \frac{\cos z dz}{(z-i)^3} = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2}|_{z=i} = -\pi i \cos i = -\pi i \frac{e^{-1}+e}{2}.$$

5.7. Теорема Морера

Докажем следующую теорему, называемую теоремой Морера, в известном смысле обратную теореме Коши: если функция *f(z)* непрерывна в области G и если для любого замкнутого конура C, расположенного внутри области G $\int_C f(\zeta)d\zeta = 0$, то функция *f(z)* является аналитической в области G.

Действительно, в силу условий теоремы, интеграл $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ не зависит от пути интегрирования, лежащего в области *G* и соединяющего точку z_0 с произвольной точкой z области *G*, и, следовательно, при данном z_0 определяет однозначную функцию *F(z).* Возьмем величину $|h|$ столь малой, чтобы круг радиуса $|h|$ с центром в точке *z* находился целиком внутри области *G*; тогда

$$F(z+h) = \int_{z_0}^{z+h} f(\zeta)d\zeta \quad \text{и} \quad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta, \qquad (36)$$

причем за путь интегрирования в последнем интеграле можно взять прямолинейный отрезок, соединяющий точку z с точкой *z+h.*

Так как $\int_z^{z+h} d\zeta = h.$ то $f(z) = f(z)\frac{1}{h}\int_z^{z+h} d\zeta = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)d\zeta,$

и, принимая во внимание (36), получим:

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int_z^{z+h}[f(\zeta) - f(z)]d\zeta. \qquad (37)$$

Пользуясь непрерывностью функции *f(z)* и учитывая, что точка ζ находится на прямолинейном отрезке, соединяющем точку *z* с точкой *z+h,* можно утверждать, что при достаточно малом |h| $f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon,$

Как бы мало не было положительное число ε. Следовательно ,

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{z+h} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta\right| \le \frac{1}{|h|}\, \varepsilon\, |h| = \varepsilon\, ,$$

И на основании равенства (37) получаем:

$$\left|\frac{F\ (z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|<\varepsilon$$

При достаточно малом $|h|$. Но это равенство означает, что

$$\lim_{n\to 0}\frac{F\ (z+h)-F(z)}{h}=F^{'}(z)=f(z).$$

Итак, функция $F(z)$ имеет производную во всякой точке области G и является в этой области аналитической функцией, а на основании доказанного в предыдущем параграфе функция $f(z)$, будучи производной аналитической функции, так же аналитична в области G .

Контрольные вопросы

1. Как вычисляется интеграл от комплексного аргумента?
2. Какими свойствами обладает интеграл комплексного аргумента?
3. Сформулируйте теорему Коши?
4. Как вычисляется интеграл от аналитической функции?
5. Как вычисляется интеграл вида $\int_{\boldsymbol{C}} \frac{\boldsymbol{dz}}{(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{n}}}$ **?**
6. Приведите интегральную формулу Коши.
7. Что такое интеграл Пуассона?
8. Как вычисляются производных высших порядков?
9. Теорема Морера.

Индивидуальные задание

1. Вычислить . $\int_{\mathrm{c}} \ In\ zdz$, если путь интегрирования С:

   A. является прямолинейным отрезком, соединяющим точку 0 с точкой 2+i:

   B. состоит из прямолинейного отрезка, соединяющим точку 0 с точкой i и прямолинейным отрезком, соединяющим точку i с точкой 2+i.

2. Вычислить $\int_C |z|dz$, если путь интегрирования С является:

   A. прямоугольным отрезком соединяющим точку -1 с точкой 1;

   B. полуокружностью R=1 с центром в начале координат лежащей в верхней полуплоскости, причем точка -1 является начальной; а точка +1 конечной (теория Коши с однократным отходом против часовой стрелки).

3. Вычислить $\int_{\mathrm{c}} \frac{z^2dz}{z-2i}$, если:

1) C- окружностью R=3 и с центром в начале координат;
2) C- окружностью R=1 и с центром в начале координат.

4. Вычислить $\int_C \frac{sinzdz}{z+i}$, если С окружность R=3 с центром в точке –i.

6. РЯДЫ

6. 1. Числовые ряды

Выше были введены основные понятия теории рядов с комплексными членами. Там было также доказано, что для сходимости ряда

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad (1)$$

достаточно, чтобы сходился ряд

$$|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots \qquad (2)$$

Однако ряд (1) может сходиться, как известно, и тогда, когда ряд (2) расходится, в этом случае ряд (1) называется *не абсолютно (условно) сходящимся.*

Для исследования сходимости ряда (2) можно применять известные признаки сходимости знакоположительных рядов, например признаки Даламбера и Коши. Ряд (2) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} < 1$ и расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$, (признак Даламбера).

Ряд (2) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} < 1$ и расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, (признак Коши).

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} > 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} > 1$,

то расходится не только ряд (2), но и ряд (1), так как в этом случае, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

6. 2. Функциональные ряды

Функциональный ряд, членами которого являются функции комплексного аргумента *z:* $f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$, (3)
может в одних точках сходится, в других расходиться. Сумма такого ряда

$$f(z)=\lim_{n\to\infty}S_n(z),\qquad \text{где}\qquad \mathrm{S_n}(z)=f_0(z)+f_1(z)+\cdots+f_n(z),$$

является функцией аргумента z, определённой в точках, в которых ряд (3) сходится. Множество точек, в которых ряд (3) сходится, будем называть *областью сходимости* этого ряда.

Остатком ряда (3) называется разность

$$R_n(z)=f(z)-S_n(z)=f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots$$

В каждой точке сходимости ряда (3) $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(z)=0.$ Другими словами, если ряд в данной точке z сходится, то для каждого $\varepsilon>0$ можно подобрать столь большое число N, что при $n>N$ модуль остатка ряда удовлетворяет неравенству

$$|R_n(z)|<\varepsilon. \tag{4}$$

Наименьшее число N, определяющее номер n, начиная с которого справедливо неравенство (4), вообще говоря, зависит не только от ε, но и от z и не является, следовательно, одинаковым для всех точек области сходимости ряда; чтобы подчеркнуть эту зависимость, лучше вместо N писать $N(\varepsilon,z)$. Может случиться, что значения $N(\varepsilon,z)$ для всех точек некоторой области не превышают некоторого числа $N^*(\varepsilon)$, и тогда, следовательно, существует такое число $N^*(\varepsilon)$. ($N^*(\varepsilon)$ не зависит от z, а зависит только от ε), что при $n>N^*(\varepsilon)$ неравенство (4) будет справедливо во всех точках области, - в этом случае говорят, что ряд (3) сходится в данной области *равномерно*.

Пример 1. Известная формула для суммы n членов геометрической прогрессии

$$a+az+az^2+\cdots+az^n=\frac{a(1-z^{n+1})}{1-z}, \tag{5}$$

как видно из ее доказательства, справедлива при любом комплексном z ($z\neq1$). Принимая во внимание, что $\lim\limits_{n\to\infty}z^{n+1}=0$, если $|z|<1$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}z^{n+1}=\infty$, если $|z|>1$, получим:

$$\lim_{n\to\infty}(a+az+az^2+\cdots az^n)=\begin{cases}\dfrac{a}{1-z}, \text{если } |z|<1;\\ \infty\ \text{ если } |z|>1 \text{ и } a\neq0.,\end{cases}$$

Но сумма (5) является частичной суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$a+az+az^2+\cdots az^n+\cdots \tag{6}$$

и, следовательно, ряд (6) сходится внутри круга $|z|<1$, и сумма этого ряда равна

$$f(z)=\frac{a}{1-z}.$$

Вне единичного круга (при $|z|>1$) ряд (6), как установлено выше, расходится; нетрудно видеть, что он расходится и на окружности $|z|=1$, так как в этом случае не выполнен необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0, \text{ где } f_n(z)\text{-общий член ряда.}$$

Рассмотрим круг $|z| \le \frac{1}{2}$, лежащий внутри круга $|z| < 1$. Подберём к каждой точке z, лежащей в этом круге, и любому $\varepsilon > 0$ такое N (ε, z), чтобы при $n>N(\varepsilon, z)$ остаток ряда удовлетворял неравенству (4) $|R_n(z)| < \varepsilon$.

Как указано выше, $f(z) = \frac{a}{1-z}$, $S_n(z) = \frac{a(1-z^{n+1})}{1-z}$, откуда

$R_n(z) = f(z) - S_n(z) = \frac{az^{n+1}}{1-z}$, и для того, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\left|\frac{az^{n+1}}{1-z}\right| < \varepsilon \qquad (7)$$

или $|z|^{n+1} < \frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}$, т.е. $(n+1)\ln|z| < \ln\frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}$, достаточно, чтобы $n+1 > \frac{\ln\frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}}{\ln|z|}$ (знак неравенства изменился , так как $\ln|z| < 0$ при $|z| \le \frac{1}{2}$), откуда

$$n > \frac{\ln\frac{\varepsilon|1-z|}{|a|}}{\ln|z|} - 1. \qquad (8)$$

При достаточно малом ε не только знаменатель, но и числитель первого члена в правой части неравенства (8) отрицателен, поэтому правая часть (8) тем больше, чем больше абсолютная величина знаменателя первого члена. Так как $|1-z| \ge 1 - |z|$ и $|z| \le \frac{1}{2}$, то наибольшее значение абсолютной величины числителя первого члена в правой части (8) равно $\ln\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{|a|}$, а наименьшее значение абсолютной величины знаменателя $\left|\ln\frac{1}{2}\right|$, следовательно, правая часть неравенства (8) во всяком случае не превышает для всех точек круга $|z| \le \frac{1}{2}$ числа $N(\varepsilon) = \frac{\ln\frac{\varepsilon}{2|a|}}{\ln\frac{1}{2}} - 1$, и следовательно, при $n>N(\varepsilon)$ неравенство (7) будет удовлетворяться во всех точках круга $|z| \le \frac{1}{2}$, т.е. ряд (6) сходится в круге $|z| \le \frac{1}{2}$ равномерно.

Часто равномерную сходимость ряда можно установить, пользуясь следующим признаком: *если в любой точке z области G модуль каждого члена ряда*

$$f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots \qquad (9)$$

не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (10)$$

то ряд (9) сходится в области G равномерно.

Пусть $R_n(z)$ – остаток данного ряда (9), а r_n– остаток числового ряда (10):

$$R_n(z) = f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots, \qquad (11)$$

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \qquad (12)$$

По условию $|f_{n+1}(z)| \le a_{n+1}$, $|f_{n+2}(z)| \le a_{n+2}$,…,

следовательно, таким же неравенствам удовлетворяют частичные суммы рядов (11) и (12), а значит и их пределы: $| R_n(z)| \leq r_n$.
Но, в силу сходимости числового ряда (10), для каждого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно подобрать такое $N(\varepsilon)$ (N зависит, конечно, только от ε, так как ряд (10) числовой), что при $n > N(\varepsilon)$ $r_n < \varepsilon$.
Следовательно, тем более при $n > N(\varepsilon)$ $|R_n(z)| < \varepsilon$ во всех точках области G. Таким образом, ряд (9) сходится равномерно.

Докажем несколько теорем о равномерно сходящихся рядах.

1. *Если члены ряда* $f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ (9) *являются непрерывными функциями в некоторой области G и если ряд сходится в этой области равномерно, то сумма ряда f(z) также непрерывна в области G.*

Пусть $S_n(z)$- частичная сумма данного ряда, $R_n(z)$-остаток ряда (9), z_0 и $z_0 + h$ - две произвольные точки области G; тогда $f(z_0 + h) - f(z_0) = [f(z_0 + h) - S_n(z_0 + h)] + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] + [S_n(z_0) - f(z_0)] = R_n(z_0 + h) + [S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)] - R_n(z_0)$ и, следовательно,

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| \leq |R_n(z_0 + h)| + |S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| + |R_n(z_0)|. \quad (13)$$

Так как в области G данный ряд сходится равномерно, то в соответствии с определением равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое, не зависящее от *z* число N* (ε), что неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon$ удовлетворяется при *n*>*N** (ε) во всех точках области G и, в частности, в точках z_0 и $z_0 + h$.

Итак, пусть *n*>*N** (ε); тогда $|R_n(z_0)| < \varepsilon$, $|R_n(z_0 + h)| < \varepsilon$, (14)
каковы бы не были z_0 и h (при условии, что z_0 и $z_0 + h$ принадлежат области G). Функция $S_n(z)$ непрерывна в области G, так как является суммой конечного числа непрерывных функции. Следовательно, в частности, функция $S_n(z)$ непрерывна в точке z_0, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, при достаточно малом $|h|$ удовлетворяется неравенство

$$|S_n(z_0 + h) - S_n(z_0)| < \varepsilon. \quad (15)$$

Пользуясь (14) и (15), мы заключаем, что при достаточно малом $|h|$ из (13) следует $|f(z_0 + h) - f(z_0)| < 3\varepsilon$, а это и означает, что функция *f(z)* непрерывна в произвольной точке z_0 области *G*.

2. *В условиях предыдущей теоремы ряд можно почленно интегрировать вдоль всякой дуги C, лежащей внутри области G, причем сумма ряда, полученного в результате такого интегрирования, равна*

$\int_C f(z)dz$, *где f(z)-сумма данного ряда.*

Пусть, по-прежнему, $S_n(z)$– частичная сумма данного ряда:

$S_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ и

$$\sigma_n(z) = \int_C f_0(z)\,dz + \int_C f_1\,(z)dz + \cdots + \int_C f_n(z)dz = \int_C S_n(z)dz.$$

Теорема будет доказана, если мы обнаружим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(z) = \int_C f(z)dz.$$

Но $\int_C f(z)dz - \sigma_n(z) = \int_C f(z)dz - \int_C S_n(z)dz = \int_C [f(z) - S_n(z)]dz = \int_C R_n(z)dz,$ (16)

где $R_n(z) = f(z) - S_n(z)$ – остаток данного ряда. Ввиду равномерной сходимости данного ряда в области G для любого $\varepsilon > 0$ при $n > N(\varepsilon)$ во всех точках области G и, в частности, во всех точках дуги C будет выполнено неравенство $|R_n(z)| < \varepsilon,$ если $N(\varepsilon)$ достаточно велико. Но тогда из (16) при $n > N(\varepsilon)$получим:

$$\left|\int_C f\,(z)dz - \sigma_n(z)\right| = \left|\int_C R_n(z)dz\right| < \varepsilon l,$$

где l – длина дуги C. Так как число ε сколь угодно мало, то из полученного неравенства следует, что $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(z) = \int_C f\,(z)dz.$

3. Если члены ряда $f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = f(z)$ *являются аналитическими функциями в односвязной области G и ряд сходится в этой области равномерно, то сумма ряда* $f(z)$ *также является функцией, аналитической внутри области G (теорема Вейерштрасса).*

Пусть C– любой замкнутый контур внутри области G. Так как данный ряд сходится в области G по условию равномерно, то его можно вдоль контура C интегрировать почленно и

$$\int_C f(z)dz = \int_C f_0(z)dz + \int_C f_1(z)dz + \cdots + \int_C f_n(z)dz + \cdots$$

Так как $f_0(z), f_1(z), \dots, f_n(z), \dots$являются аналитическими функциями в области G, то на основании теоремы Коши каждый из интегралов в правой части последнего равенства равен нулю, а следовательно,

$$\int_C f(z)dz = 0, \qquad (17)$$

при любом выборе контура C в области G. Так как, кроме того, функция $f(z)$ будучи суммой равномерно сходящегося ряда аналитических, а следовательно и непрерывных функции, также, по ранее доказанному, непрерывна, то из (17) на основании теоремы Морера следует, что функция $f(z)$ аналитична внутри области G.

Теорема Вейерштрасса остаётся, конечно, справедливой и в случае многосвязной области *G*, так как каждая внутренняя точка z_0 многосвязной области может быть включена в односвязную часть области *G*, например в достаточно малую окрестность точки z_0 ; по доказанному функция $f(z)$ будет аналитической в этой односвязной области и, в частности, в данной точке z_0.

6.3. Степенные ряды

Ряд вида $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + .. + c_n z^n + \cdots$ (18)
где c_i - постоянные, называются *степенным*. Основной теоремой теории степенных рядов является *теорема Абеля.*

Если степенной ряд (18) сходится в точке z_0, то он сходится и притом абсолютно во всех точках, лежащих внутри окружности C с центром в точке z=0 и проходящей через точку z_0 (т.е. во всех точках z, для которых $|z| < |z_0|$). При этом во всяком круге $|z| \le \rho$ (Рис. 23) радиуса ρ, меньшего, чем $|z_0|$, ряд (18) сходится равномерно.

Из сходимости ряда (18) при $z = z_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, и следовательно, модули членов ряда (18) ограничены, т.е. существует такая постоянная *M*, что $|c_n z_0^n| < M$ при любом *n*. Пусть z-любая точка, лежащая внутри окружности С; тогда $|z| < |z_0|$ *и* $\left|\frac{z}{z_0}\right| = q < 1$. Общий член ряда (18) можно преобразовать к виду $c_n z^n = c_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$.

Отсюда видно, что $|c_n z^n| < Mq^n$, и следовательно, модули членов ряда (18) в точке z меньше соответствующих членов геометрической прогрессии

$$M + Mq + Mq^2 + \cdots + Mq^n \ldots$$

со знаменателем q, меньшим единицы. Следовательно, ряд (18) сходится в точке z абсолютно, и первая часть теоремы доказана.

Возьмем теперь произвольный круг $|z| \le \rho$ (Рис. 23), лежащий внутри окружности $C(\rho < |z_0|)$. По доказанному ряд (18) сходится абсолютно во всякой точке, расположенной внутри окружности С, и в частности во всякой точке, лежащей на окружности выбранного нами круга радиуса ρ. Итак, если z*-какая-нибудь точка на окружности этого круга (т.е. $|z^*| = \rho$), то числовой ряд $|c_0| + |c_1 z^*| + |c_2 z^{*2}| + \cdots + |c_n z^{*n}| + \ldots$сходится. Но для любой другой точки z, лежащей внутри или на окружности круга $|z| \le \rho$, справедливо неравенство $|z| \le |z^*|$, следовательно,

$$|c_n z^n| \le |c_n z^{*n}| \qquad (19)$$

при любом n. На основании признака равномерной сходимости, из (19) следует, что ряд (18) равномерно сходится в круге $|z| \leq \rho$. Этим доказана и вторая часть теоремы.

Рассмотрим теперь любой луч, выходящий из нулевой точки.
Возможны три случая:

1. Ряд (18) сходится во всех точках этого луча. Тогда, в силу теоремы Абеля, ряд (18) сходится внутри круга сколь угодно большого радиуса, т.е. сходится во всей плоскости;

2. Ряд расходится во всех точках луча, кроме точки $z = 0$ (в точке $z = 0$ сходится всякий степенной ряд вида (18), так как при $z = 0$ все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль);

В этом случае ряд расходится во всех точках плоскости, кроме точки $z = 0$.

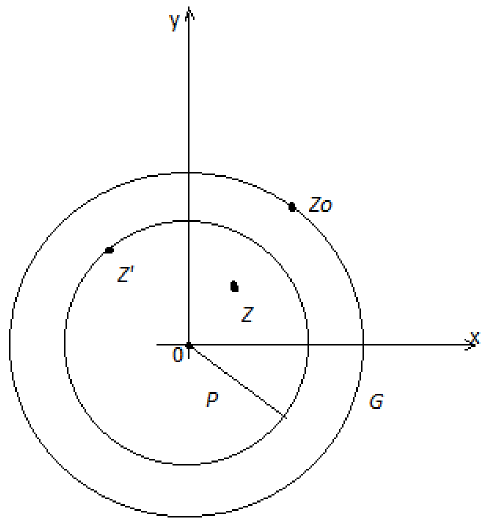


Рис.23.

Действительно, из теоремы Абеля следует, что если ряд (18) в некоторой точке z расходится, то он расходится и всюду вне круга с центром в начале координат, окружность которого проходит через точку z, так как из сходимости ряда в некоторой точке вне такого круга следовала бы сходимость его и в точке z. Следовательно, в рассматриваемом случае ряд расходится вне круга сколь угодно малого радиуса с центром в нулевой точке, т.е. всюду, кроме точки $z = 0$.

3. На луче имеются, как точки сходимости, отличные от $z = 0$, так и точки расходимости ряда (18).

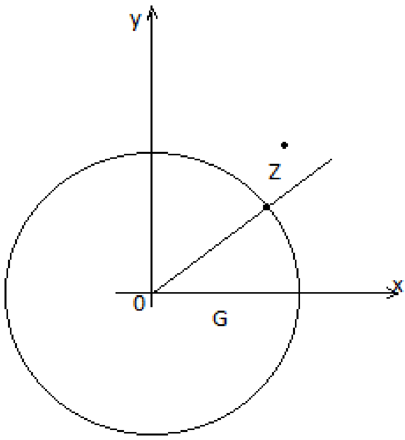


Рис.24

Как было указано выше, из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к нулевой точке, чем всякая точка расходимости. Следовательно (Рис. 24), на луче найдется точка z*, отделяющая точки луча, в которых ряд (18) сходится от точек, в которых ряд расходится. Сама точка z* принадлежит или к числу точек сходимости, или к числу точек расходимости ряда (18). Ряд (18) будет сходится внутри круга G с центром в нулевой точке, окружность которого проходит через точку z*, и расходится вне этого круга.

Круг G называют *кругом сходимости,* а его радиус - *радиусом сходимости* степенного ряда (18). На окружности круга сходимости могут лежать как точки сходимости, так и точки расходимости ряда (18). В рассмотренных выше случаях 1 и 2 можно считать, что радиус сходимости равен, соответственно, бесконечности и нулю.

Так как во всяком круге, находящемся целиком внутри круга сходимости, как было доказано выше, степенной ряд сходится равномерно, то из теоремы Вейерштрасса следует, что сумма степенного ряда внутри круга сходимости является аналитической функцией.

Радиус сходимости степенного ряда можно определять, пользуясь известными признаками сходимости рядов. Например, если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, то ряд (18) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$, т.е. при $|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$,

и расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$, т.е. при

$$|z| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}.$$

Следовательно, в этом случае радиус сходимости r можно определять по формуле $$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}. \qquad (20)$$

Если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, то ряд (18) сходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} < 1$, т.е. при

$$|z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}},$$

и расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} > 1$, т.е. при

$$|z| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В этом случае радиус сходимости r можно определить по формуле
$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}. \qquad (21)$$

Ряд $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$, (22)
где a- любое комплексное число, также называется степенным.
Этот ряд подстановкой $z - a = t$ сводится к ряду (18), причем точке $t = 0$ соответствует точка $z = a$. Следовательно, областью сходимости ряда (22) является круг с центром в точке $z = a$. Радиус этого круга (радиус сходимости ряда (22)) можно определять по формулам (20, 21).

6. 4. Ряд Тейлора

Рассмотрим однозначную функцию $f(z)$, аналитическую внутри круга G, ограниченного окружностью C с центром в точке $z = a$ (Рис.25.). Разложим эту функцию в степенной ряд вида (22).

Пусть z -любая внутренняя точка круга G. Проведем внутри круга G окружность C' с центром в точке a так, чтобы точка z оказалась внутри этой окружности. Тогда в соответствии с интегральной формулой Коши
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (23).$$

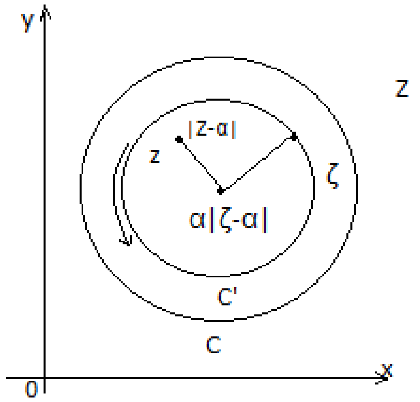


Рис.25

Преобразуем один из множителей подынтегральной функции

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}, \qquad (24)$$

где ζ – любая точка окружности $C^{'}$. Модуль разности $|\zeta-a|$ равен радиусу окружности $C^{'}$, а так как модуль разности $|z-a|$ равен расстоянию точки z от центра окружности $C^{'}$, то, как бы ни перемещалась точка ζ по окружности $C^{'}$, величина $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|$ при фиксированном z сохраняет постоянное значение, меньшее единицы (Рис.25).

Следовательно, функция $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$ является суммой, сходящейся во всякой точке z внутри окружности $C^{'}$ геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}+\cdots \qquad (25)$$

Эта прогрессия равномерно сходится на окружности $C^{'}$ относительно ζ, потому что при фиксированном z величина $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|=q$ постоянна на этой окружности и, следовательно, модули членов ряда (25) совпадают с соответствующими членами сходящегося числового ряда

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots, \quad \text{где } q<1.$$

Следовательно, подынтегральную функцию в правой части (23) можно, пользуясь (24) и (25), представить в виде суммы ряда, равномерно сходящегося на окружности $C^{'}$

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}+\frac{(z-a)f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2f(\zeta)}{(\zeta-a)^3}+\cdots+\frac{(z-a)^nf(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots$$

и произвести почленное интегрирование, что приводит к разложению функции $f(z)$в степенной ряд:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} + \frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^3} + \dots + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} + \dots \qquad (26)$$

(множители $(z-a)$, $(z-a)^2, \dots, (z-a)^n$ вынесены за знаки соответствующих интегралов).

Итак, во всякой точке z, находящейся внутри круга G, функция $f(z)$ представлена с помощью (26) в виде суммы степенного ряда

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots,$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (27)$$

где C' - любая окружность с центром в точке $z = a$, лежащая внутри круга G, или любой другой простой замкнутый контур, однократно обходящий точку a в положительном направлении и лежащий внутри круга G, так как, в силу теоремы Коши, величина интеграла (27) не зависит от выбора контура C'. Полученный ряд называется *рядом Тейлора*.

Пользуясь интегральной формулой Коши, и вытекающей из нее формулой (34) предыдущей главы, можно для коэффициентов ряда Тейлора получить иное представление: $c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-a} = f(a)$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

и записать разложение в ряд Тейлора в форме, совпадающей с известной из курса математического анализа для функции действительного аргумента

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots \qquad (28)$$

Отсюда, в частности, легко получить известные разложения элементарных функции $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$, $arctg\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots$

и другие. Равенства $e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$, $\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$,

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots,$$

Служившие нам для определения функции $e^z, \sin z, \cos z$ можно рассматривать, как разложения этих функции в ряд Тейлора.

Всякая однозначная элементарная функция является аналитической во всех точках, в которых она определена. Но может случится, что ряд Тейлора для какой-либо элементарной функции сходится и в такой точке, в которой эта элементарная функция не определена. Условимся в этом случае приписывать рассматриваемой элементарной функции в соответствующей точке значение, равное сумме ряда Тейлора в этой точке.

Так, например, разложение $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$ справедливо, как мы знаем, во всей плоскости. Поделив обе части этого равенства на z, что допустимо, если $z \neq 0$, получим:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots$$

Это равенство справедливо при любом $z \neq 0$. Однако ряд, стоящий в правой части этого равенства, сходится и при $z = 0$, причем его сумма при $z = 0$ равна 1. Условимся поэтому считать, что $\frac{\sin z}{z} = 1$ при $z = 0$.

Из предыдущего следует, что при таком условии радиус сходимости ряда Тейлора для всякой однозначной элементарной функции $f(z)$ равен расстоянию ρ точки $z = a$, являющейся центром круга сходимости, до ближайшей особой точки этой функции.

Действительно, радиус сходимости не может быть больше указанного расстояния ρ, так как в противном случае внутрь круга сходимости попала бы по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$, причем эта точка была бы особой и для суммы ряда Тейлора (внутри круга сходимсти ввиду принятого условия элементарная функция $f(z)$ и сумма ее ряда Тейлора тождественны). Это противоречило бы тому, что сумма ряда является функцией, аналитической во всякой точке, лежащей внутри его круга сходимости (см. теорема Вейерштрасса).

С другой стороны, радиус сходимости ряда Тейлора не может быть и меньше расстояния ρ точки $z = a$ до ближайшей особой точки функции $f(z)$, потому что внутри круга радиуса ρ с центром в точке $z = a$ функция $f(z)$ аналитична и поэтому, как было доказано, допускает разложение в сходящийся ряд Тейлора.

Если R- радиус круга сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ и эта функция ограничена в круге сходимости, т.е. существует такая постоянная M, что $|f(z)| \leq M$ при $|z| < R$, то пользуясь интегральной формулой для коэффициентов ряда Тейлора и выбрав в качестве пути интегрирования в этой формуле окружность радиуса ρ с центром в точке $z = a$, уравнение которой $|\zeta - a| = \rho$, получим:

$$|c_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho, \qquad \text{или} \qquad |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n},$$

Так как радиус ρ окружности C' можно брать сколь угодно близким к радиусу круга сходимости R, то $|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$, (n=0,1,2,…). (29)

Если функция *f(z)* является аналитической во всей плоскости, то радиус круга сходимости ряда Тейлора бесконечен, и следовательно, из неравенств (29) находим, что все коэффициенты c_n, кроме c_0, равны нулю и, значит, $f(z) = c_0$. Тем самым доказано, *что функция, аналитическая и в то же время ограниченная во всей плоскости, постоянна (теорема Лиувилля)*.

Ряд Тейлора можно почленно дифференцировать. Действительно, если ряд *f(z)* – аналитическая функция, то аналитической является и её производная $f'(z)$; разложив по формуле (28) в ряд Тейлора функцию $f'(z)$, получим: $f'(z) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \cdots$

Но к этому же равенству приводит почленное дифференцирование равенства (28). Полученный после дифференцирования ряд имеет тот же круг сходимости, что и исходный ряд, так как, с одной стороны, при дифференцировании степенного ряда модули его коэффициентов увеличиваются (коэффициент c_n умножается на *n)* и поэтому радиус сходимости не может увеличится, а, с другой стороны, радиус сходимости не может и уменьшится, так как сумма ряда (28), а следовательно, и её производная являются функциями аналитическими во всякой внутренней точке круга сходимости ряда Тейлора для функции *f(z)*.

В качестве точки a в формуле (28) можно взять любую точку, в которой функция *f(z)* аналитична. Разложение (28) называют разложением функции *f(z)* в окрестности точки a. Если $f(z) = 0$, то точка a называется нулем функции *f(z)*. Если точка a является нулем функции *f(z),* то разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots,$$

так как $c_0 = f(a) = 0$. Если в разложении функции *f(z)* в ряд Тейлора в окрестности точки a $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$,
но $c_n \neq 0$ и, следовательно, разложение имеет вид

$$f(z) = c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots, \qquad (30)$$

то точка a называется нулём функции $f(z)$ порядка или кратности *n*. Если *n=1*, то нуль называется простым. Продифференцировав (30), приходим к выводу, что если a – нуль порядка n функции $f(z)$, то эта же точка является нулем порядка *n-1* для функции $f'(z)$.

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что если точка a является нулем порядка *n* функции $f(z)$, то

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad \text{но} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Разложение (30) можно переписать в виде

$$f(z) = (z-a)^n[c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots] = (z-a)^n\varphi(z), \qquad (31)$$

где функция $\varphi(z)$ определяется как сумма степенного ряда

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots,$$

имеющего, очевидно, тот же круг сходимости, что и данный ряд (30). Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a) = c_n \neq 0$. Справедливо и обратное утверждение: всякая функция вида

$f(z) = (z-a)^n\, \varphi(z)$, где n- целое положительное число, $\varphi(a) \neq 0$ и $\varphi(z)$ аналитична в точке a, имеет в этой точке нуль порядка n. Действительно, разложив $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a, получим: $\varphi(z) = \bar{c_0} + \bar{c_1}(z-a) + \cdots$ где $\overline{c_0} = \varphi(a) \neq 0$. Отсюда

$$f(z) = (z-a)^n \varphi(z) = \bar{c_0}(z-a)^n + \bar{c_1}(z-a)^{n+1} + \cdots$$

Мы пришли к разложению вида (30) и, следовательно, точка a является нулем порядка n функции $f(z)$.

6.5. Теорема единственности и аналитическое продолжение

Докажем следующую теорему о единственности аналитической функции.

Если значения аналитических в области G функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ *совпадают на некоторой бесконечной последовательности точек* $z_1,\ z_2 \dots,\ z_n, \dots,$ *сходящейся к точке* a, *которая является внутренней точкой области G, то функции* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ *тождественны во всей области G.*

Для доказательства этой теоремы заметим сначала, что если точка a является нулем функции $f(z)$ и функция $f(z)$ не равна тождественно нулю в некоторой окрестности точки a, то из (31) следует, что в достаточно малой ε - окрестности точки a функция $f(z)$ других нулей не имеет. Для того чтобы в этом убедится, достаточно заметить, что множитель $(z-a)^n$ в правой части (31) отличен от нуля всюду, кроме точки $z = a$, а функция $\varphi(z)$ отлична от нуля в точке a, а следовательно, в силу непрерывности, и в некоторой окрестности точки a.

Для функции $f_1(z) - f_2(z)$ точки $z_1, z_2 \dots, z_n, \dots,$ являются, по условию, нулями, следовательно, точка a также является нулем этой функции, так как, если бы в точке a функция $f_1(z) - f_2(z)$ была бы отлична от нуля, то в силу непрерывности она была бы отлична от нуля и в некоторой окрестности точки a, что невозможно, так как из определения предела следует, что в любой, сколь угодно малой окрестности точки a находится бесконечное множество точек последовательности $z_1,\ z_2 \dots, z_n, \dots,$ в которых $f_1(z) - f_2(z) = 0$. Итак, точка a является нулем аналитической функции $f_1(z) - f_2(z)$ и в то же время в любой, сколь угодно малой окрестности точки a имеются другие нули этой функции, что, как указано выше, возможно лишь в случае тождественного равенства нулю функции $f_1(z) - f_2(z)$ в некоторой окрестности точки a, но тогда равны нулю все коэффициенты разложения этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a, и тождество $f_1(z) - f_2(z) \equiv 0$ или $f_1(z) \equiv f_2(z)$ справедливо по крайней мере во всем круге сходимости указанного разложения и тем более в круге с центром в точке a и радиусом, равным расстоянию этой точки до ближайшей к ней точки границы области G.

Пусть теперь z^*- любая внутренняя точка области G. Соединим точку a с точкой z^* непрерывной дугой γ, лежащей внутри области G (Рис. 26).
Пусть d – кратчайшее расстояние точек этой дуги от границы области G. Опишем из точки a, как из центра, окружность радиуса d. Тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$, по доказанному, справедливо внутри круга G_0, ограниченного этой окружностью. Пусть a_1 — первая, если перемещаться по дуге γ от точки a к точке z^*, точка пересечения построенной окружности с дугой γ. В любой окрестности точки a_1 имеется бесконечное множество точек круга G_0 — точек, в которых значения функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, по доказанному, совпадают. Следовательно, повторив для точки a_1 рассуждения, примененные к точке a, мы придем к выводу, что тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$

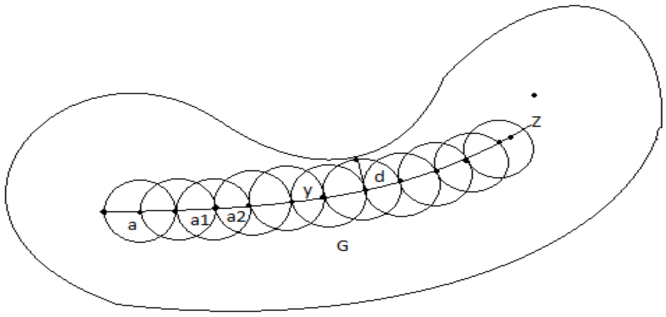


Рис.26

справедливо в круге G_1 радиуса d с центром в точке a_1. Обозначим a_2 первую при движении по дуге γ от точки a_1 к z^* точку пересечения окружности круга G_1 с дугой γ, рассмотрим круг G_2 радиуса d с центром в точке a_2 и будем повторять аналогичные рассуждения до тех пор, пока не докажем тождество $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в круге, содержащем точку z^*, откуда, в частности, $f_1(z^*) = f_2(z^*)$. Так как z^* — любая точка области G, то теорема доказана.

Из теоремы единственности, в частности, следует, что две функции, аналитические и некоторой области, тождественны, если их значения одинаковы на сколь угодно малой площадке, принадлежащей этой области, и даже на сколь угодно малой дуге.

Выше мы определили для комплексных значений аргумента функции Ln z, e^z, sin z, cos z, причем было доказано, что:

1. Значения функций e^z, sin z, cos z на действительной оси и главные значения функции $Ln\ z$ на положительной части действительной оси совпадают со значениями соответствующих функций, определяемых в курсе математического анализа для действительных значений аргумента;
2. Функции e^z, sin z, cos z являются аналитическими во всей конечной части плоскости, а функция Ln z всюду, кроме точек z=0 и z=∞.

Из теоремы единственности следует, что никакие другие функции, кроме введенных нами, указанными двумя свойствами обладать не могут.

Всякое тождество (например, sin^2z+cos^2z=1, sin2z=2sin zcos z и т.д.), справедливое на действительной оси (или даже только на некотором отрезке действительной оси), остается справедливым во всей комплексной плоскости, если левая и правая части этого тождества являются функциями, аналитическими во всей плоскости.

С теоремой единственности связано очень важное понятие *аналитического продолжения*. Предположим, что в некоторой области G задана функция $f(z)$, аналитическая в этой области. Встает вопрос, существует ли функция, аналитическая в области более широкой, чем область G, и совпадающая в области G с функцией $f(z)$. Если такая функция существует, то она называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Если данную функцию $f(z)$ можно продолжить, то такое продолжение является единственным в следующем смысле: функции f_1 (z) и f_2 (z), аналитические в некоторой области G', частью которой является данная область G, тождественны между собой, если они являются аналитическими продолжениями одной и той же функции $f(z)$, аналитической в области G.

Действительно, так как в соответствии с определением аналитического продолжения эти функции совпадают с функцией $f(z)$ в области G, то они совпадают также между собой в области G, а следовательно, в силу теоремы единственности, они тождественны и в области G'.

В качестве примера рассмотрим функцию $f(z)$, которую определим как сумму ряда $1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots=f(z)$. Радиус сходимости этого ряда равен 1, и функция $f(z)$ является аналитической в круге |z|<1. Вне этого круга ряд расходится, и функция $f(z)$ вне круга |z|<1 не определена. Нетрудно видеть, что функция $f_1(z)=\frac{1}{1-z}$, аналитическая во всей плоскости, кроме точки z=1, является аналитическим продолжением данной функции *f(z),* так как в соответствии с формулой для суммы геометрической прогрессии *f(z)*=$\frac{1}{1-z}$ в круге |z|<1 и, следовательно, в этом круге функции f_1*(z) и f(z)* совпадают.

Обычно аналитическое продолжение функции *f(z)* обозначают тем же символом *f(z).*

6. 6. Ряд Лорана

Предположим, что *f(z)* является однозначной аналитической функцией внутри кольца между концентрическими окружностями C' и C'' с центром в точке z=a (Рис.27), и пусть z- произвольная внутренняя точка этого кольца. Проведем окружности Γ' и Γ'' с центром в точке a так, чтобы каждая из них находилась внутри данного кольца и чтобы точка z оказалась между Γ' и Γ''. Пользуясь интегральной формулой Коши для многосвязной области, получим:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \qquad (32)$$

(окружности Γ' и Γ'' обходятся против часовой стрелки (Рис.27). Если ζ - точка на контуре Γ'', то $|\zeta-a|>|z-a|$ и

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{(\zeta-a)\left(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=\frac{1}{\zeta-a}\left[1+\frac{z-a}{\zeta-a}+\frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}+\cdots\right]$$

Ряд в правой части этого равенства сходится на окружности Γ'' равномерно; умножив его почленно на $f(\zeta)d\zeta$ и проинтегрировав вдоль Γ'', получим для первого из интегралов в правой части (32) разложение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\frac{z-a}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^3}+\cdots+$$
$$\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{\Gamma''}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots \qquad (33)$$

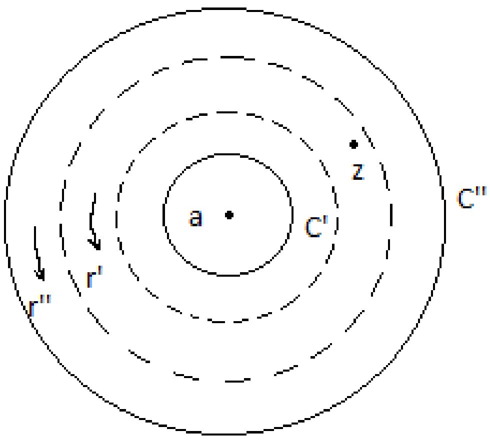


Рис.27

Если же точка ζ находится на контуре Г”, то $|z-a|>|\zeta-a|$ и, следовательно, $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right|<1$; поэтому для того, чтобы получить ряд, равномерно сходящийся на Г”, преобразуем $\frac{1}{\zeta-z}$ иначе: $\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=-\frac{1}{(z-a)(1-\frac{\zeta-a}{z-a})}=-\frac{1}{z-a}\left[1+\frac{\zeta-a}{z-a}+\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots\right]$.

После такого преобразования для второго из интегралов в правой части (32) получим: $-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}=\frac{1}{z-a}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}f(\zeta)d\zeta+\frac{1}{(z-a)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta-a)f(\zeta)d\zeta+\cdots+\frac{1}{(z-a)^n}*\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\zeta-a)^{n-1}\,f(\zeta)d\,\zeta\,+\ldots$ (34)

Так как в силу теоремы Коши для двусвязной области вместо путей интегрирования Г''и Г' в (33) и (34) можно взять любую окружность Г с центром в точке *a*, лежащую в данном кольце между С″ и С′, то из (32) получим следующие различные функции *f(z)*, сходящееся во всякой точке *z* внутри кольца между С” и С’ и называемое *рядом Лорана*:

$$f(z)=\ c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots+\frac{b_1}{z-a}+\frac{2}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{b_n}{(z-a)^n}+\cdots,$$

где $$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\qquad(n=0,1,2,\ldots.),\qquad(35)$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}d\zeta\qquad(n=1,2,\ldots)\qquad(36)$$

и Г - любая окружность в данном кольце, с центром в точке *a.*

При замене *n* на -*n* правая часть (36) переходит в правую часть (35), поэтому, обозначив для удобства $\mathrm{b_n}=\mathrm{c_{-n}}$, разложение в ряд Лорана можно записать в виде

$f(z)=\ c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\frac{c_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\ldots,$ где коэффициенты c_n как при *n* = 0,1, 2,… , так и при *n* =-1, -2, … определяются формулой

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\ ,\qquad(37)$$

Г-любая расположенная в данном кольце окружность с центром в точке $z=a$.

Разложив функцию *f(z)* в ряд Лорана, мы тем самым представили ее в виде суммы $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, (38)

а $f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$. (39)

Ряд (38) называется *правильной частью*, а ряд (39) *главной частью* ряда Лорана. Областью сходимости степенного ряда (38) является, как доказано выше, некоторый круг радиуса R с центром в точке $z=a$, на окружности которого имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_1(z)$. Что касается ряда (39), то подстановка $\frac{1}{z-a}=t$ преобразует его в степенной ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n \qquad (40)$$

Областью сходимости степенного ряда (40) является некоторый круг радиуса p с центром в точке $t=0$, на границе которого находится по крайней мере одна особая точка суммы этого ряда. С помощью преобразования $\frac{1}{z-a}=t$ или $z=\frac{1}{t}+a$ внутренность этого круга плоскости t отображается на внешность круга радиуса $r=\frac{1}{\rho}$ плоскости z с центром в точке $z=a$, так как $|z-a|=\frac{1}{\rho}$ при $|t|=\rho$ и $|z-a|>\frac{1}{\rho}$ при $|t|<\rho$; следовательно, областью сходимости ряда (39) является внешность некоторого круга радиуса r с центром в точке $z=a$, на границе которого находится по крайней мере одна особая точка функции $f_2(z)$, являющейся суммой этого ряда. Если учесть, наконец, что по доказанному ряды (38) и (39) сходятся в концентрическом кольце с центром в точке $z=a$ и, что в этом кольце функция $f(z)$ аналитична, то мы придем к выводу, что областью сходимости ряда Лорана (т.е. областью, в которой сходятся как ряды (38) и (39)) является кольцо, ограниченное окружностями, имеющими центр в точке a, причем на каждой из этих окружностей имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$. При этом на граничной окружности радиуса R (большего радиуса) имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_1(z)$, являющейся суммой правильной части Лорана, в то время как функция $f_2(z)$ (сумма главной части ряда Лорана) на этой окружности особых точек не имеет, так как она аналитична всюду вне граничной окружности радиуса r (меньшего радиуса) и, в частности, на граничной окружности радиуса R. Аналогично на граничной окружности радиуса r имеется по крайней мере одна особая точка функции $f_2(z)$, но нет особых точек функции $f_1(z)$, так как функция $f_1(z)$ аналитична всюду внутри области, ограниченной окружностью радиуса R.

Если считать, что точка $z=a$ выбрана, то имеется все же, вообще говоря, несколько колец с центром в этой точке, в которых функция $f(z)$ аналитична, причем на граничных окружностях лежат особые точки функции $f(z)$. Каждому из этих колец соответствует свое разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана: контур Г, по которому производится интегрирование в формуле (37), при вычислении коэффициентов ряда Лорана должен находиться внутри того кольца, в котором происходит разложение, и поэтому разным кольцам соответствуют различные коэффициенты разложения одной и той же функции *f(z).* В частности, если в точке $z=a$ данная функция *f(z)* аналитична (точка a- правильная точка данной функции), то круг с центром в точке a, радиус которого равен расстоянию точки a до ближайшей особой точки функции *f(z),* также является одним из «колец», в которых можно произвести разложение в ряд Лорана. Все коэффициенты b_n=c_{-n}такого разложения, как это видно из формул (36), в силу теоремы Коши, равны нулю, так как функция $f(\zeta)(\zeta - a)^{n-1}$, стоящая под знаком интеграла в правой части формулы для вычисления b_n, при любом целом положительном n не имеет особых точек внутри окружности Г. Следовательно, в этом случае ряд Лорана состоит только из правильной части, а так как формулы для вычисления коэффициентов правильной части ряда Лорана ничем не отличаются от интегральных формул для коэффициентов ряда Тейлора то ряд Лорана, превращается в ряд Тейлора. Итак, ряд Тейлора, является частным случаем ряда Лорана.

Пример 1. Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, выбрав $a=0$.

Функция *f(z)* имеет две особые точки: $z=1$ и $z=2$. Следовательно, имеется три круговых «кольца» с центром в точке О, в каждом из которых функция аналитична, а именно (Рис.28):

1) Круг |z|<1;
2) Кольцо 1<|z|>2;
3) Внешность круга |z|>2.

В рассматриваемом примере нетрудно получить разложение в ряд Лорана в каждом из перечисленных «колец», не прибегая к формулам для вычисления коэффициентов.

1) Разложение в круге |z|<1.

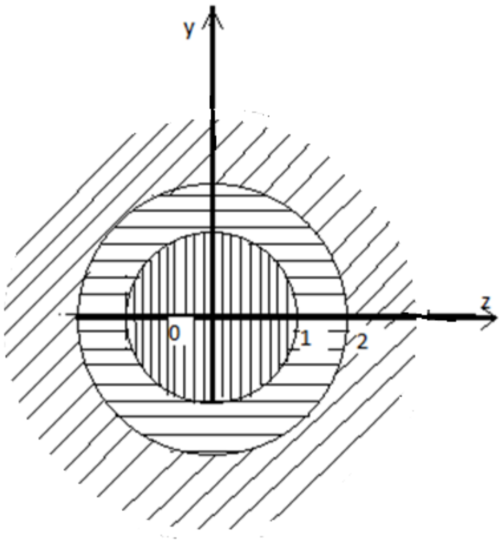


Рис.28

Функцию *f(z)* можно представить в виде суммы двух элементарных дробей: $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$. Так как $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} * \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$, а функция $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ является суммой геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой

$$|\frac{z}{2}| < 1; \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots + \frac{z^n}{2^n} + \ldots,$$

$$\text{то} \quad \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{z^2}{2^2} - \ldots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \ldots \qquad (41)$$

Аналогично

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots, \qquad (42)$$

Причем ряд в правой части сходится, так как | z|<1.

Складывая (41) и (42), получаем;

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2^2})z + (1-\frac{1}{2^3})z^3 + \ldots + (1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n + \ldots, \quad \text{откуда}$$

$$c_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad (n=0,1,2,3,\ldots), \ b_n = c_{-n} = 0 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Полученное разложение является рядом Тейлора.

2) Разложение в кольце 1 < |z| < 2.

Ряд (41) остается сходящимся, так как |z|>2, но ряд (42) расходится, потому что |z|>1; поэтому разложение (42) заменяем следующим:

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} * \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots \qquad (43)$$

В рассматриваемом кольце ряд (43) сходится, так как |z|>1 и, следовательно, $|\frac{1}{z}| < 1$.

Складывая (41) и (43), получим:

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \frac{z^2}{2^3} - \ldots - \frac{z^n}{2^{n+1}} - \ldots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots - \frac{1}{z^n} - \cdots,$$

откуда $c_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$ (n=0,1,2,…), $b_n = c_{-n}$=-1 (n=1,2,…).

3) Разложение в области |z|>2.

Равенство (43) сохраняется, так как если |z|>2, то тем более |z|>1;но ряд в правой части (41) расходится, и равенство (41) заменяем следующим:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\cdots\right) = \frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{z^n}+\cdots \qquad (44)$$

Ряд в правой части (44) сходится, так как |z|>2, и, следовательно, $|\frac{2}{z}|<1$. Складывая (43) и (44), получаем

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z^2}+\frac{2^2-1}{z^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}-1}{z^n}+\cdots$$

откуда c_n=0 (n=0,1,2,…), $b_n = c_{-n} = 2^{n-1}-1$ (n=1,2,…).

Пример 2. Найдем разложения в ряд Лорана в различных областях той же функции $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, выбрав $a=1$.

В данном случае имеется два круговых «кольца» с центром в точке 1 (Рис.29).

1) круг, из которого удален центр 0< |z-1|<1;
2) внешность круга |z-1 |> 1. В каждом из этих «колец» функция *f(z)* аналитична, а на границах имеет особые точки.

Разложим в каждом из этих «колец» функцию *f(z)* по степени разности (z-1).

1) Разложение в области 0< |z-1| <1.

Как и в примере 1, получим: $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$.

Далее, $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -[1+(z\text{-}1)+(z-1)^2+\cdots+(z-1)^n+\cdots]$,

причем, ряд в правой части сходится, так как |z-1|<1. Следовательно,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1)(-z-1)^2 - \cdots - (z-1)^n - \cdots,$$

откуда $c_n = -1$ (n=0,1,2,…), $c_{-1} = -1,\ c_{-2} = c_{-3} = \cdots c_{-n} = \cdots = 0.$

Главная часть ряда Лорана состоит здесь только из одного члена.

2) Разложение в области |z-1| >1.

В этой области

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots,$$

причем ряд в правой части равенства сходится, так как $|z\text{-}1|>1$ и, следовательно, $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$. Итак, $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots + \frac{1}{(z-1)^n} + \cdots$, откуда $c_n = 0$ $(n = 0,1,2,\dots)$, $c_{-1} = 0, c_{-2} = c_{-3} = \cdots = c_{-n} = \cdots = 1$.

Нетрудно доказать единственность разложения функции в ряд Лорана, т.е. в ряд вида

$$f(z)=c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$
$$+\frac{c_{-1}}{z-2} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots \qquad (45)$$

Иными словами, нетрудно доказать, что если функция *f(z)* является в некотором кольце с центром в точке a аналитической, то не существует двух различных рядов указанного вида, сходящихся в этом кольце и имеющих своей суммой функцию *f(z)*.

Действительно, как доказано выше, областью сходимости рассматриваемого ряда является некоторое кольцо G с центром в точке a, и во всяком кольце, целиком внутреннем к кольцу G, ряд сходится равномерно. В частности, он сходится равномерно и на всякой окружности Г с центром в точке a, расположенной внутри кольца сходимости, и следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать вдоль такой окружности. В 5.4 было доказано, что интеграл вида $\int_\Gamma (z-a)^n dz$, где замкнутый контур Г однократно обходит в положительном направлении точку *a,* равны нулю при всяком целом *n*, кроме *n*=-1, а в этом последнем случае интеграл равен 2πi.

Следовательно, при почленном интегрировании ряда (45) исчезнут все члены, кроме первого члена главной части, и мы получим

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{c_{-1}dz}{z-a} c_{-1} * 2\pi i, \quad \text{откуда} \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz.$$

Чтобы определить c_{-1} , достаточно до интегрирования умножить все члены ряда (45) на $(z-a)^{n-1}$. Тогда после интегрирования все интегралы, кроме одного, опять обратятся в нуль, и мы получим:

$$\int_\Gamma f(z)(z-a)^{n-1}dz = \int_\Gamma \frac{c_{-n}dz}{z-a} = c_{-n} * 2\pi i, \quad \text{откуда} \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(z-a)^{n-1}dz.$$

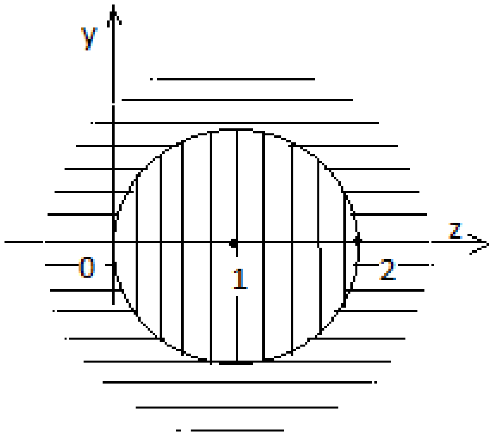


Рис.29

Аналогично, для того чтобы определить c_n при n=0,1,2,…достаточно, прежде чем почленно проинтегрировать ряд (45), разделить члены ряда на $(z-a)^{n+1}$. Тогда после интегрирования получим:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_\Gamma \frac{c_n dz}{z-a} = c_n * 2\pi i \quad \text{и} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Мы пришли к формулам (35) и (36) для коэффициентов ряда Лорана и тем самым доказали, что никакое другое разложение функции *f(z)* в ряд указанного вида невозможно. Так как ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, то доказана и единственность разложения в ряд Тейлора.

6.7. Изолированные особые точки

Особая точка функции *f(z)* называется *изолированной*, если в некоторой окрестности этой точки функция *f(z)* не имеет других особых точек. Разложение функции в ряд Лорана, сходящийся к этой функции во всех точках круга с центром в данной изолированной особой точке a, кроме этой точки a (радиус такого круга равен расстоянию данной особой точки a до ближайшей другой особой точки суммы ряда), будем называть разложением функции в ряд Лорана *в окрестности данной изолированной особой точки.*

Выясним, как связано поведение функции *f(z)* в окрестности точки $z=a$ с разложением функции в ряд Лорана в окрестности этой точки. Предположим сначала, что при разложении функции в окрестности точки $z=a$ главная часть ряда Лорана отсутствует, т.е. все коэффициенты c_{-n} равны нулю, и следовательно, разложение имеет вид

$$f(z)=c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \qquad (46)$$

Ряд Лорана превращается в этом случае в степенной ряд, и его сумма есть функция аналитическая внутри круга сходимости, и в частности в точке $z=a$, являющейся центром этого круга. Если в точке a функция $f(z)$ аналитична, то равенство (46) дает разложение этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки a; если же точка a является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то сумма ряда (46) совпадает с функцией $f(z)$ всюду в круге сходимости этого ряда, кроме самой точки $z=a$, и так как сумма ряда в точке a аналитична и, следовательно, непрерывна, а значение этой суммы при $z=a$ равно c_0, то $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$. Следовательно, если изменить определение функции в точке a и считать $f(a)=c_0$, то функция $f(z)$ станет в точке a аналитической, а равенство (46) будет разложением этой функции в ряд Тейлора. Точку a называют в этом случае *устранимой особой точкой*.

Пусть теперь главная часть разложения функции в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ содержит лишь конечное число членов. Следовательно, разложение имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \qquad (47)$$

(здесь m-номер последнего из отличных от нуля коэффициентов главной части, т.е. $c_{-m} \neq 0,\ c_{-(m+1)} = c_{-(m+2)} = \cdots = 0$).

Если обозначить $\varphi(z)=(z-a)^m f(z)$, то из (47) получим: $\varphi(z)=(z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_{-2}(z-a)^{m-2} + \cdots + c_{-m}$. (48)

Равенство (47), а следовательно, и равенство (48) справедливы во всей области сходимости ряда (47), т.е. во всех точках некоторого круга с центром в точке a, кроме самой точки a. Так как правая часть (48) при $z=a$ принимает значение c_{-m}, то $\lim\limits_{z\to a}\varphi(z) = c_{-m} \neq 0$.

Но $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, следовательно, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m} = \infty$.

Итак, если главная часть разложения функции $f(z)$ в окрестности точки a содержит лишь конечное число членов, то функция $f(z)$ стремится к бесконечности при $z\to a$. В этом случае изолированная особая точка a называется *полюсом*, а число m (номер последнего из отличных от нуля коэффициентов главной части ряда Лорана) - *порядком полюса*. Если $m=1$, полюс называется *простым*.

В примере 2 вид разложения в ряд Лорана показывает, что точка z=1 является простым полюсом рассмотренной в этом примере функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$.

Если в точке $z=a$ функция $f(z)$ имеет полюс порядка m, то функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке нуль порядка m. Действительно, как было показано выше, функцию $f(z)$, имеющую в точке a полюс порядка m, можно представить в виде $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}$, где функция $\varphi(z)$определяется как сумма ряда (48) и является аналитической функцией в точке a, если считать $\varphi(a)=\lim\limits_{z\to a}\varphi(z)=c_{-m}\neq 0$.

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ также является аналитической и отличной от нуля в точке $z=a$ и, следовательно, разлагается в окрестности точки a в ряд Тейлора: $\frac{1}{\varphi(z)}=\tilde{c_0}+\tilde{c_1}(z-a)+\cdots+\tilde{c_n}(z-a)^n+\cdots$,

причем $\tilde{c_0}=\frac{1}{\varphi(a)}\neq 0$. Следовательно, $\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}=(z-a)^m[\tilde{c_0}+\tilde{c_1}(z-a)+\cdots]=\tilde{c_0}(z-a)^m+\tilde{c_1}(z-a)^{m+1}+\cdots$

Но такой вид разложения в ряд Тейлора и означает, что для функции $\frac{1}{f(z)}$ точка a является нулем порядка m.

Справедливо и обратное утверждение: нуль порядка m функции $f(z)$ является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Действительно, если точка a является нулем порядка m функции $f(z)$, то в соответствии с (31) функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$, где $\varphi(z)$-функция, аналитическая в точке a, причем $\varphi(a)\neq 0$. Но тогда функция $\varphi(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ также является аналитической и отличной от нуля в точке a и может быть в окрестности этой точки разложена в ряд Тейлора

$$\varphi(z)=\bar{c_0}+\bar{c_1}(z-a)+\cdots+\bar{c_n}(z-a)^n+\cdots,$$

где $\bar{c_0}=\varphi(a)\neq 0$. Отсюда

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}=\frac{1}{(z-a)^m}\varphi(z)=\frac{1}{(z-a)^m}[\bar{c_0}+\bar{c_1}(z-a)+\cdots]$$

$$=\frac{\bar{c_0}}{(z-a)^m}+\frac{\bar{c_1}}{(z-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{\bar{c}_{m-1}}{z-a}+\bar{c_m}+\bar{c}_{m+1}(z-a)+\cdots$$

Ряд в правой части равенства является рядом Лорана, причем в главной части этого ряда коэффициенты при $\frac{1}{(z-a)^m}$ отличен от нуля, а коэффициенты при $\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$, $\frac{1}{(z-a)^{m+2}}$, … равны нулю, так как соответствующие члены ряда отсутствуют. Следовательно, в соответствии с определением точка a является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$.

Если главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ содержит бесконечное множество членов (т.е. бесконечное множество коэффициентов c_{-n} отлично от нуля), то точка a называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$. Поведение функции в окрестности существенно особой точки подчиняется следующей теореме Ю. В. Сохоцкого, доказательство которого мы опускаем: *если точка а является существенно особой точкой функции f(z), то для любого заданного комплексного числа А найдется последовательность точек, сходящаяся к точке а, вдоль которой значения f(z) стремятся к А, при этом случай А=∞ не исключается.*

Пример. Найти особые точки функции $e^{\frac{1}{z}}$ и определить их типы. Принимая во внимание, что

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

получим

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots, \qquad (49)$$

причем ряд в правой части сходится всюду, кроме точки z = 0. Равенство (49) можно рассматривать как разложение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в ряд Лорана в окрестности точки z=0, и так как его главная часть содержит бесконечное множество членов, то точка z=0 является существенно особой точкой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

Рассмотрим поведение функции $e^{\frac{1}{z}}$ в окрестности точки z = 0. При z→0 вдоль положительной части действительной оси получим $\frac{1}{z} \to +\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \to \infty$; если z→0 вдоль отрицательной части действительной оси, то $\frac{1}{z} \to -\infty$ и $e^{\frac{1}{z}} \to 0$. Пусть теперь А=$re^{i\varphi}$- любое комплексное число, отличное от нуля и от бесконечности. Из равенства $e^{\frac{1}{z}} = A$ или $\frac{1}{z} \to LnA$ находим:

$$z = \frac{1}{LnA} = \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i}.$$

Полагая, что k=0, $\pm1, \pm2, \pm3, \dots$, получим последовательность точек, сходящуюся к точке z=0, так как $\lim\limits_{k\to\pm\infty} \frac{1}{\ln r + i\varphi + 2k\pi i} = 0,$

причем функция $e^{\frac{1}{z}}$ не только стремится к А вдоль этой последовательности, но даже в точности равна А в каждой точке рассматриваемой последовательности.

Других особых точек функция $e^{\frac{1}{z}}$ не имеет.

Мы рассмотрели все возможные виды главной части ряда Лорана в окрестности изолированной особой точки *а* (правильную часть ряда мы все время считали произвольной) и условились называть особую точку *а* устранимой, если главная часть разложения в окрестности этой точки отсутствует, полюсом, если главная часть содержит лишь конечное число членов, и существенно особой, если главная часть представляет собой бесконечный ряд. Мы установили, далее, что предел $\lim_{z\to a} f(z)$ существует и конечен, если особая точка a является устранимой, что этот предел бесконечен, если рассматриваемая точка является полюсом, и что предел *f(z)* при $z \to a$ не существует, если a- существенно особая точка. Так как были рассмотрены все возможные случаи изолированных особых точек, то справедливы и обратные случаи заключения: если а - изолированная особая точка функции *f(z),* то она является:

а) устранимой, если предел $\lim_{z\to a} f(z)$ существует и конечен,

б) полюсом, если этот предел бесконечен,

в) существенно особой точкой, если $\lim_{z\to a} f(z)$ не существует.

Классификацию изолированных особых точек можно распространить и на случай, когда изолированной особой точкой является бесконечно удаленная точка. Назовем бесконечно удаленную точку изолированной особой точкой функции *f(z)*, если в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. вне круга с центром в начале координат достаточно большого радиуса нет других особых точек функции *f(z).*

Разложение функции в ряд Лорана, сходящееся всюду вне круга достаточно большого радиуса с центром в точке z=0 (кроме, быть может, самой бесконечно удаленной точки), будем называть разложением в окрестности бесконечно удаленной точки. Последнее из разложений в примере 1 является разложением функции $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Ряд (49) является разложением функции $e^{\frac{1}{z}}$ не только в окрестности точки *z=0*, но также и в окрестности бесконечно удаленной точки. При разложении функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки следует в соответствии с определением считать в (45) *a=0.* Запишем члены разложения в следующем порядке:

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \qquad (50)$$

Назовем ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}$ правильной частью, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ главной частью разложения в окрестности бесконечно удаленной точки. Такая терминология вполне естественна, если учесть, что при замене $z = \frac{1}{z^n}$ окрестность бесконечно удаленной точки отображается на окрестность точки $\tilde{z} = 0$ и разложение (50) превращается в разложение функции $f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$ в ряд Лорана в окрестности точки $\tilde{z} = 0$:

$$f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = c_0 + c_{-1}\tilde{z} + c_{-2}\tilde{z}^2 + \cdots + c_{-n}\tilde{z}^{-n} + \cdots + \frac{c_1}{\tilde{z}} + \frac{c_2}{\tilde{z}^2} + \cdots + \frac{c_n}{\tilde{z}^n} + \cdots, \qquad (51)$$

в котором ряд $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\tilde{z}^n$ является правильной, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\tilde{z}^n}$ главной частью.

Бесконечно удаленную точку будем называть устранимой особой точкой функции *f(z)*, если в разложении (50), а следовательно и в разложении (51), отсутствует главная часть. Нулевая точка является в этом случае устранимой особой точкой функции $f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$, и следовательно, предел $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\tilde{z}\to 0} f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$ существует и конечен. Разложение функции *f(z)* в этом случае имеет вид $f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots$ (52)

Если предел $\lim_{z\to\infty} f(z) = c_0$ принять за значение функции *f(z)* в бесконечно удаленной точке, то функцию *f(z)* можно считать аналитической в бесконечно удаленной точке. В частности, если $c_0 = 0$, то бесконечно удаленная точка будет нулем функции *f(z);* при этом если $c_0 = c_{-1} = \cdots = c_{-(m-1)} = 0$, но $c_{-m} \neq 0$, то бесконечно удаленная точка будет нулем порядка m функции *f(z).*

Если главная часть (50), а, следовательно, и главная часть (51), состоит лишь из конечного числа членов, т.е. если (45) имеет вид

$$c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m,$$

где $c_m \neq 0$,то бесконечно удаленная точка называется полюсом порядка m функции *f(z),* В этом случае $\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{\tilde{z}\to 0} f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right) = \infty$. Если бесконечно удаленная точка является нулем порядка m функции *f(z),* то она является полюсом порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$, и наоборот: нуль $z=\infty$ порядка m функции $\frac{1}{f(z)}$ является полюсом порядка m функции *f(z).*

Если главная часть (50), а, следовательно, и главная часть (51), состоит из бесконечного множества отличных от нуля членов, то бесконечно удаленная точка называется существенно особой точкой функции *f(z)*. В этом случае $\lim_{z\to\infty} f(z)$, т.е. $\lim_{\tilde{z}\to 0} f\left(\frac{1}{\tilde{z}}\right)$ не существует и справедлива теорема Сохоцкого.

6.8. Некоторые приемы разложения функций в ряд Лорана

Общие формулы (37) для коэффициентов ряда Лорана обычно мало удобны для вычислений. В некоторых случаях могут быть применены более простые приемы.

Для того, чтобы разложить в ряд Лорана рациональную функцию, достаточно воспользоваться представлением правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей, как это было сделано в 6.6 (примеры 1 и 2). Простейшая дробь вида $\frac{1}{z-a}$ разлагается в ряд, являющийся геометрической прогрессией, а дробь вида $\frac{1}{(z-a)^k}$ (k>1 целое) - в ряд, полученный с помощью (k-1)- кратного дифференцирования геометрической прогрессии. Заметим, что всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму дробей вида $\frac{A}{(z-a)^k}$, где А, a- комплексные числа.

При разложении в ряд Лорана иррациональных и трансцендентных функций иногда можно использовать разложения в ряд Тейлора функций $e^z, \sin z, \cos z, \ln(1+z)$, биномиальный ряд и другие известные разложения. Так, например, в окрестности точки z =2

$$cos\frac{1}{z-2} = 1 - \frac{1}{2!\,(z-2)^2} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!\,(z-2)^{2n}} + \cdots$$

При этом иногда следует предварительно преобразовать разлагаемую в ряд функцию.

Пример 1. Разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z=1$ функцию $sin\frac{z}{z-1}$.

Имеем: $sin\frac{z}{z-1} = \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) = \sin 1\, cos\frac{1}{z-1} + \cos 1 \sin\frac{1}{z-1}$,

откуда $\sin\frac{z}{z-1} = sin1 + \frac{\cos 1}{z-1} - \frac{sin1}{2!(z-1)^2} - \frac{cos1}{3!(z-1)^3} + \cdots + (-1)^n\frac{sin1}{(2n)!(z-1)^{2n}} + (-1)^n\frac{cos1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}} + \cdots$

Если бесконечно удаленная точка является правильной (или устранимой особой) для функции *f(z)*, то разложение в ряд в окрестности удаленной точки сводится подстановкой $z = \frac{1}{\zeta}$ к разложению функции $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$в ряд Тейлора в окрестности точки ζ=0.

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{e^{z+2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки z=∞.

Положив $z=\frac{1}{\zeta}$, получим $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=e^{\frac{\frac{1}{\zeta}}{\frac{1}{\zeta}+2}}=e^{\frac{1}{1+2\xi}}$, причем точка ζ =0 является для этой функции правильной точкой. Обозначим $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\varphi(\zeta)$, будем иметь:

$$\varphi'(\zeta)=-\frac{2}{(1+2\zeta)^2}e^{\frac{1}{1+2\xi}},\qquad \varphi^n(\zeta)=e^{\frac{1}{1+2\xi}}\left[\frac{8}{(1+2\zeta)^3}+\frac{4}{(1+2\xi)^4}\right]$$

и т.д. Следовательно, φ(0)=e, $\varphi'(0)=-2e, \varphi''(0)=-12e,$ и т.д.
Отсюда $\varphi(\zeta)=e(1-2\zeta+6\zeta^2+\cdots),$ т.е.

$$\frac{z}{e^{z+1}}=e\left(1-\frac{2}{z}+\frac{6}{z^2}+\cdots\right).$$

Ряд сходится вне единичного круга (т.е. при |z|>1), так как единственной особой точкой функции является точка z= -1

Контрольные вопросы

1. Какие существуют признаки сходимости рядов?
2. Что такое остаток функционального ряда?
3. Как можно установить равномерную сходимость ряда?
4. Какой ряд называется степенной?
5. Как гласит теорема Абеля?
6. Как вычисляются коэффициенты ряда Тейлора?
7. Что показывает терема единственности и аналитическое продолжение?
8. Что такое ряд Лорана?
9. Какие точки называются изолированные особые точки?

Индивидуальные задание

1. Определить радиусы сходимости следующих рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^n}{2^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!};\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^nz^n;\qquad \sum_{n=1}^{\alpha}\frac{n!}{n^n}z^n;\qquad \sum_{n=1}^{\alpha}n^{Ln\,n}z^n$$

2. Написать первые 4 числа разложения в ряд Тейлора в окрестности нулевой точки

1.$c^{\frac{1}{1-z}}$; 2. $sin\frac{1}{1-z}$; 3. $Ln(1+c^z)$

Литература

1.И.И.Баврин Высшая математика: учебник М.,2008-Академия

2.А.А.Туганбаев Функции комплексного переменного М.,2012 Флинта

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ 2005 Тт.1-3
4.Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. М.: НАУКА, 1988г.
5.Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. М.: НАУКА, 1970г.
6.Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.: Наука, 1970г. Т1-Т3.
7.Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976г.
8.Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

Канаев Магомедимин Муталимович

Комплексный анализ