Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

М.М.Мирземагомедова
Т.И.Исабекова

Учебное пособие

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

для студентов направления бакалавриата 01.03.02 –
«Прикладная математика и информатика»

Махачкала 2020

УДК 683.1
«Методы оптимизации». Учеб.пособие./*М.М.Мирземагомедова, Т.И.Исабекова*; - Махачкала: ДГТУ, 2020.-150 с.

Представлены основные разделы курса «Методы оптимизации» для изучения в техническом вузе. Каждый раздел пособия содержит теоретическую часть, примеры решения типовых задач, систематизированную подборку контрольных заданий.

.

Предназначено для бакалавров направления 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» всех форм обучения.

Рецензент:
Доцент кафедры ИТиПИвЭ ДГТУ, к.э.н. Мурадов М.М.
Доцент кафедры ИиИТ ДГУ, к.ф.-м.н. Ахмедова З.Х.

Печатается согласно постановлению
Ученого Совета Дагестанского Государственного Технического Университета.

от «______»_______________2020г

Оглавление

Предисловие

Каждая глава учебного пособия состоит из двух частей: теоретической и практической. В первой части содержится теоретический материал справочного характера: понятия, определения, утверждения, формулы по курсу «Методы оптимизации», а также примеры решения типовых задач, графические иллюстрации. Вторая часть включает систематизированную подборку заданий для самостоятельного решения.

По содержанию данное пособие соответствует требованиям ФГОС ВО направлений подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» всех форм обучения и включает в себя в соответствии с учебной программой основные разделы:

— постановка задачи конечномерной оптимизации;
— оптимизация функции одной переменной;
— численные методы минимизации функции одной переменной;
— оптимизация функции нескольких переменных;
— численные методы минимизации функции нескольких переменных;
— линейное программирование.

Математический аппарат, применяемый в данном пособии и используемый при изучении курса «Методы оптимизации» и решении задач, не выходит за пределы обычного (стандартного) курса высшей математики в технических вузах.

1. Постановка оптимизационной задачи

1.1. Экстремальные задачи. Определения

Задачи отыскания наибольших и наименьших величин часто возникают в науке, технике и экономике. Чтобы применять математические методы для их решения и анализа, необходимо уметь переходить от содержательной к математической постановке задачи. Для этого нужно определить:

— целевую функцию $f(x): R^n \to R$;

— множество допустимых решений $X \subset R^n$ (допустимое множество) для функции $f(x)$;

— критерий оптимизации $\mathrm{extr} \in \{\min, \max\}$.

Таким образом, тройка вида (f, X, extr) задает экстремальную или оптимизационную задачу. Формально математическая постановка выглядит следующим образом:

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\mathrm{extr}}.$$

Задача оптимизации заключается в следующем: требуется найти $x_0 \in X$ (если он существует), доставляющее экстремальное (минимальное или максимальное) значение целевой функции $f(x)$ на множестве X, а именно для x_0 должно выполняться одно из условий:

$$\text{либо } f(x_0) \le f(x) \text{ для всех } x \in X, \quad (1.1)$$

$$\text{либо } f(x_0) \ge f(x) \text{ для всех } x \in X. \quad (1.2)$$

Если такого элемента на множестве X не существует, то требуется построить последовательность

$$\{x_k\},\ k = 1, 2, \ldots,\ x_k \in X, \quad (1.3)$$

такую, что выполняется одно из соотношений

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in X} f(x), \quad (1.4)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \sup_{x\in X} f(x). \quad (1.5)$$

Ниже приведем несколько определений различных объектов.

Определение 1.1. Точка $x_0 \in X$, удовлетворяющая условию (1.1), называется точкой глобального минимума функции $f(x)$ на множестве X, следовательно, $x_0 \in X$, удовлетворяющая условию (1.2), — точкой глобального максимума функции $f(x)$ на X.

Последовательность $\{x_k\}$ (1.3), удовлетворяющая равенству (1.4), — минимизирующая для функции $f(x)$ на множестве X, следовательно, последовательность $\{x_k\}$, удовлетворяющая (1.5), — максимизирующая для $f(x)$ на множестве X.

Если $X = R^n$, то задача оптимизации — задача безусловного экстремума $f(x)$. Если $X \ne R^n$, то имеем задачу на условный экстремум $f(x)$.

Определение 1.2. Функция $f(x)$ называется ограниченной снизу на множестве X, если существует такое число m, что выполняется $m \le f(x)$ для $\forall x \in X$.

Для функции $f(x)$, ограниченной сверху на множестве X, существует такое число M, что выполняется $f(x) \le M$ для $\forall x \in X$.

Определение 1.3. Число $m_0 = \inf\limits_{x\in X} f(x)$ называется нижней гранью функции $f(x)$ на множестве X:

1) если $m_0 \le f(x)$ для $\forall x \in X$;

2) для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) < m_0 + \varepsilon$.

Если $f(x)$ не ограничена снизу на множестве X, то полагают

$$m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = -\infty.$$

Число $M_0 = \sup_{x \in X} f(x)$ называется верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X:

1) если $f(x) \le M_0$ для $\forall x \in X$;

2) для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) > M_0 - \varepsilon$.

Если $f(x)$ не ограничена сверху на множестве X, то

$$M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = +\infty.$$

Рассмотрим примеры целевых функций.

Пример 1.1

Рассмотрим целевую функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $X = [1, +\infty)$. Показать, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто и $m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0$, а максимум функции $f(x)$ на множестве X существует и равен 1.

Решение

Предположим, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X не пусто, то есть существует хотя бы одна точка минимума $x_0 \in X$ функции $f(x)$. Возьмем произвольное число $x > x_0$. Тогда $x \in X$ и $f(x_0) = \dfrac{1}{x_0} > \dfrac{1}{x} = f(x)$, то есть x_0 не является точкой минимума $f(x)$ на множестве X. Полученное противоречие и доказывает, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто.

Покажем, что $m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0$. Очевидно, для произвольного $x \in X = [1, +\infty)$ справедливо равенство $f(x) = \frac{1}{x} > 0$. Далее пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $x_\varepsilon > \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, 1\right)$. Тогда $x_\varepsilon \in X$ и $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. Поэтому $m_0 = 0$.

Для $f(x) = \frac{1}{x}$ имеем $M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = f(1) = 1$.

Пример 1.2

Пусть целевая функция $f(x) = e^{-|x|}$, $X = R$. Показать, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто и $m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0$, найти $M_0 = \sup_{x \in X} f(x)$.

Решение

Предположим, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X не пусто, то есть существует хотя бы одна точка минимума $x_0 \in X$ функции $f(x)$. Возьмем произвольное число $x > x_0$. Тогда $x \in X$ и $f(x_0) = e^{-|x_0|} > e^{-|x|} = f(x)$, то есть x_0 не является точкой минимума $f(x)$ на множестве X. Полученное противоречие и доказывает, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто.

Покажем, что $m_0 = \inf_{x \in X} f(x) = 0$. Очевидно, для произвольного $x \in X$ справедливо равенство $f(x) = e^{-|x|} > 0$. Далее пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем произвольное $x_\varepsilon > \left|\ln \frac{1}{\varepsilon}\right|$. Тогда $x_\varepsilon \in X$ и $f(x_\varepsilon) < \varepsilon = 0 + \varepsilon$. Поэтому $m_0 = 0$.

Для $f(x) = e^{-|x|}$ имеем $M_0 = \sup_{x \in X} f(x) = 1$, кроме того, $\sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) = f(0) = 1$.

Пример 1.3

Пусть функция $f(x) = \ln x$, $X = (0,1]$. Найти $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$.

Р е ш е н и е

Функция $f(x)$ не ограничена снизу на множестве X, поэтому по определению нижней грани полагаем $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x) = -\infty$.

С учетом равенства $\min\limits_{x \in X} f(x) = -\max\limits_{x \in X}(-f(x))$ задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации.

Контрольные задания

1. Найти множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X:
   а) $f(x) = \sin^2 \pi x$, $X = R$;
   б) $f(x) = \left|x - x^2\right|$, $X = [-1, 2]$;
   в) $f(x) = \cos\dfrac{\pi}{2}$, $X = [0,1]$;
   г) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1, \\ 1, & |x| \le 1, \end{cases}$ $X = R$.
2. Показать, что множество точек минимума функции $f(x)$ на множестве X пусто и найти $m_0 = \inf\limits_{x \in X} f(x)$:
   а) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $X = R$;
   б) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$, $X = (-\infty, 5)$;
   в) $f(x) = x \sin x$, $X = R$;
   г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $X = (-\infty, -1]$;
   д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $X = [-2, 2]$;

е) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $X=(0,1)$;

ж) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $X=(1,+\infty)$.

3. Показать, что если $\min\limits_{x\in X} f(x)$ существует, то $\inf\limits_{x\in X} f(x)=\min\limits_{x\in X} f(x)$.

1.2. Разрешимость задачи оптимизации

Из условий, гарантирующих существование точек глобального минимума или максимума функции $f(x)$ на множестве X, вытекают следующие теоремы.

Теорема 1.1 (Вейерштрасса). Если множество $X\subset R^n$ не пусто и компактно (ограничено и замкнуто), а функция $f(x)$ непрерывна на нем, то множество точек глобального минимума (и множество точек глобального максимума) функции $f(x)$ на нем не пусто и компактно.

В условиях теоремы Вейерштрасса любая минимизирующая последовательность $\{x_k\}$ сходится к множеству точек глобального минимума.

Теорема 1.2. Пусть множество $X\subset R^n$ непусто и замкнуто, а функция $f(x)$ непрерывна на нем. Пусть выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) существует такая точка $X_*\subset X$, что множество вида

$$X_*=\{x\in X: f(x)\le f(x_*)\}$$

ограничено;

2) для любой последовательности $\{x_k\}$, $k=1,2,\dots$, $x_k\in X$, такой что

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k\|=+\infty,$$

если такая последовательность найдется, справедливо равенство

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = +\infty.$$

Тогда множество точек глобального минимума функции $f(x)$ на множестве X непусто и компактно.

В теоремах 1.1 и 1.2 условие непрерывности целевой функции $f(x)$ можно ослабить.

Определение 1.4. Функция $f(x): X \subseteq R^n \to R$ называется полунепрерывной снизу (рис. 1.1) в точке $x_0 \in X$, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \text{ для } \forall x \in X, \text{ удовлетворяющих}$$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

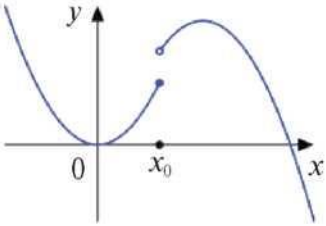


Рис. 1.1. Полунепрерывная снизу функция

Функция $f(x)$ полунепрерывна сверху (рис. 1.2) в точке $x_0 \in X$, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \text{ для } \forall x \in X, \text{ удовлетворяющих}$$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда она в этой точке полунепрерывна и снизу, и сверху.

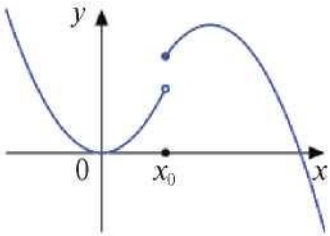


Рис. 1.2. Полунепрерывная сверху функция

Перечислим свойства полунепрерывных функций:

1. Если $f(x)$ — полунепрерывная сверху функция, то $-f(x)$ является полунепрерывной снизу.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две полунепрерывные снизу (сверху) функции, тогда их сумма $f(x)+g(x)$ также полунепрерывна снизу (сверху).

3. Если $f(x)$ — полунепрерывная снизу функция на замкнутом множестве X, то для любой $c = \text{const}$ множество

$$X_c = \{x \in X : f(x) \le c\} \text{ замкнуто (если оно не пусто).}$$

4. Предел монотонно возрастающей (убывающей) последовательности полунепрерывных снизу (сверху) в точке x_0 функций есть полунепрерывная функция снизу (сверху) в x_0. Более точно пусть дана последовательность полунепрерывных снизу (сверху) функций $\{f_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, $f_k : X \to R$, таких что $f_{k+1}(x) \ge (\le) f_k(x)$ для $\forall x \in X$. Тогда если существует предел

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \text{ для } \forall x \in X,$$

то f полунепрерывна снизу (сверху).

Теорема 1.3 (обобщенная теорема Вейерштрасса). Полунепрерывная снизу (сверху) функция $f(x) : R^n \to R$ достигает глобального минимума (максимума) на всяком компакте $X \subset R^n$.

Теорема 1.4. Полунепрерывная снизу (сверху) функция $f(x): R^n \to R$ достигает глобального минимума (максимума) на всем пространстве R^n, если найдется такое число C, что множество $\{x \in R^n : f(x) \le C\}$ (соответственно $\{x \in R^n : f(x) \ge C\}$) не пусто и ограничено.

Определение 1.5. Функция $f(x)$ имеет в точке $x_* \in X$ локальный минимум (максимум) (рис. 1.3), если $f(x_* + \Delta x) > f(x_*)$ ($f(x_* + \Delta x) < f(x_*)$) для любых $x_* + \Delta x$ ($\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$) из достаточно малой окрестности точки x_*.

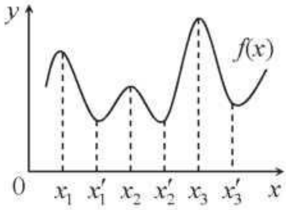


Рис. 1.3. Функция $f(x)$ с локальными максимумами (x_1, x_2, x_3) и локальными минимумами (x_1', x_2', x_3')

Поскольку всякая точка глобального экстремума функции $f(x)$ на множестве X является локальным экстремумом (рис. 1.4), то для нахождения глобального экстремума нужно определить все точки локального экстремума функции $f(x)$, а затем выделить из их числа решение задачи оптимизации (если среди них такое найдется).

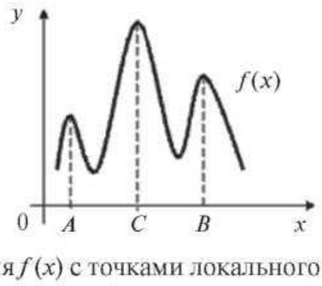


Рис. 1.4. Функция $f(x)$ с точками локального экстремума A и B и точкой глобального экстремума C

Контрольные задания

1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две полунепрерывные снизу функции на множестве $X \subseteq R^n$. Будут ли полунепрерывными снизу на множестве X следующие функции:
   а) $\lambda f(x) + \mu g(x)$, λ, μ — const;
   б) $f_*(x) = \min\{f(x), g(x)\}$;
   в) $f^*(x) = \max\{f(x), g(x)\}$;
   г) $|f(x)|$?
2. При каких значениях параметра c функция $f(x)$ на множестве $X = R$ имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} (5 - 5e^{-|x|})^{-1}, x \neq 0, \\ c, \ x = 0. \end{cases}$$

2. Оптимизация функции одной переменной

В данном разделе рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R$, $X = [a, b]$:

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}}. \qquad (2.1)$$

Теорема Вейерштрасса, ее следствия и обобщения (теоремы 1.1–1.4) для непрерывных (или полунепрерывных) целевых функций определяют условия разрешимости задачи оптимизации. При выполнении этих условий требуется найти решение $x_0 \in X$ задачи (2.1).

2.1. Необходимые и достаточные условия локального экстремума

Теорема 2.1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 — точка локального экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство (от противного)

Пусть $f'(x_0) = c = \text{const} \neq 0$. Для определенности считаем, что $c > 0$. По определению производной функции $f(x)$ в точке x_0 имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда приращение функции

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где величина $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Знак Δf определяется знаком слагаемого $f'(x_0) \cdot \Delta x = c \cdot \Delta x$ в некоторой δ-окрестности $U(x_0) = \{x \in (a,b) : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$:

— при $\Delta x = x - x_0 < 0 \Rightarrow c \cdot \Delta x < 0 \Rightarrow \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, то есть при $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$;

— при $\Delta x = x - x_0 > 0 \Rightarrow c \cdot \Delta x > 0 \Rightarrow \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$, то есть при $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$.

Таким образом, x_0 не является точкой локального экстремума функции $f(x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f'(x_0) = c = 0$.

Замечание к теореме Ферма. Теорема Ферма дает необходимое, но недостаточное условие локального экстремума во внутренней точке $[a,b]$ для дифференцируемой функции.

Пример 2.1

Пусть дана функция $f(x) = x^3$ (рис. 2.1).

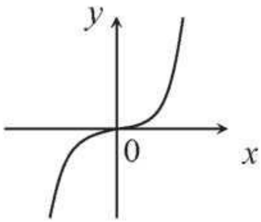


Рис. 2.1. График функции $f(x) = x^3$

Данный пример иллюстрирует необходимый, но недостаточный характер условия. $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ не является экстремумом.

Геометрический смысл необходимого условия экстремума

Если в точке локального экстремума существует касательная к графику функции, то она параллельна оси Ox (рис. 2.2).

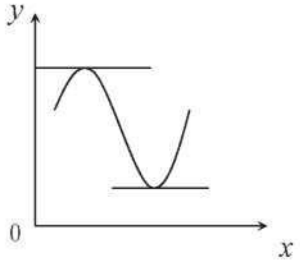
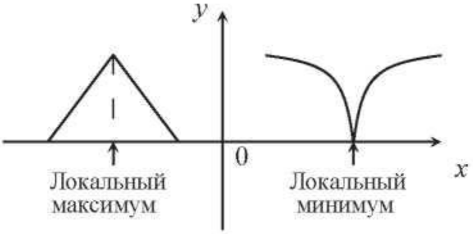


Рис. 2.2. Касательная к графику функции

Следствие 2.1. Если $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она может иметь экстремумы только в тех точках, где $f'(x_0)=0$.

Следствие 2.2. $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где производная не существует.



Рассмотрим достаточные условия локального экстремума.

Теорема 2.2 (для дифференцируемой функции). Если точка C является точкой возможного экстремума $f(x)$, $f(x)$ дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки C:

1) то при условии, что $f'(x)>0\,(<0)$ для $x<C$ и $f'(x)<0\,(>0)$ для $x>C$, C является точкой локального максимума (минимума);

2) то, если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от C, экстремума в точке C нет.

Доказательство

1. Пусть $f'(x)>0$, $x<C$; $f'(x)<0$, $x>C$.

При $x_0<C$

$$f(C)-f(x_0)=f'(\xi)(C-x_0),\text{ где }\xi\in(x_0,C).$$

$$f'(\xi)>0,\ (C-x_0)>0\Rightarrow f(C)>f(x_0)\text{ для }\forall x_0<C.$$

При $x_0>C$

$$f(x_0)-f(C)=f'(\xi)(x_0-C).$$

$$f'(\xi)<0,\ (x_0-C)>0\Rightarrow f(C)>f(x_0)\text{ для }\forall x_0>C.$$

Следовательно, C — точка максимума.

2. Пусть $f'(x)>0$ $\forall x$ из окрестности C.

При $x_0<C$

$$f(C)-f(x_0)=f'(\xi)(C-x_0),$$

$$f(C)>f(x_0).$$

При $x_0>C$

$$f(x_0)-f(C)=f'(\xi)(x_0-C),$$

$$f(x_0)>f(C).$$

Таким образом, C не является точкой экстремума, что и требовалось доказать.

Теорема 2.3 (для функции, недифференцируемой в точке возможного экстремума). Если точка C является точкой возможного экстремума $f(x)$, $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки C, за исключением самой точки C, и непрерывна в этой точке:

1) то при условии, что $f'(x) > 0\ (< 0)$ для $x < C$ и $f'(x) < 0\ (> 0)$ для $x > C$, C является точкой локального максимума (минимума);
2) то если $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от C, экстремума в точке C нет.

Пример 2.2

Пусть дана целевая функция $f(x) = |x|$ (рис. 2.3).

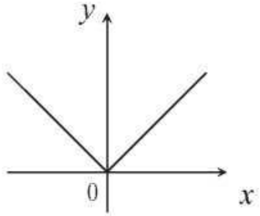


Рис. 2.3. График функции $f(x) = |x|$

В точке $x = 0$ $f(x)$ не дифференцируема, но непрерывна.

$f'(x < 0) < 0$, $f'(x > 0) > 0$. Тогда $x = 0$ — точка локального минимума.

Общая схема отыскания экстремума

Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и дифференцируема на этом интервале за исключением конечного числа точек.

1. Ищем точки возможного экстремума (критические):
   — точки, в которых $f'(x) = 0$;
   — точки, в которых не существует $f'(x)$.

   Располагаем их в порядке возрастания: $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$.
2. Определяем знак $f'(x)$ в областях $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$.
3. Вычисляем (в случае необходимости) $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.
4. Определяем тип экстремума по теореме 2.2 или теореме 2.3.

Пример 2.3

Найти точки экстремума функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

Решение

Найдем первую производную и критические точки:

1) $f'(x) = 2\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 2x$;

2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$;

3) $f'(x)$ не существует в точке $x_3 = 0$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	0	$(1, +\infty)$
$f(x)$	↗	2	↘	0	↗	2	↘
$f'(x)$	+	0	–	нет	+	0	–
экстремум		max		min		max	

График функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$ представлен на рис. 2.4.

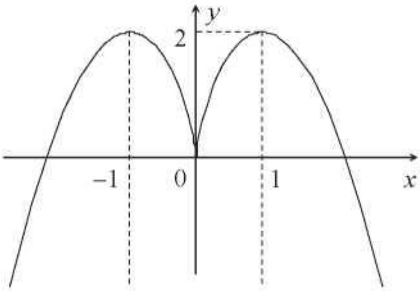


Рис. 2.4. График функции $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$

Теорема 2.4 (второй достаточный признак экстремума). Если $f(x)$ имеет в критической точке C конечную вторую производную $f''(x)$:

1) то при $f''(C) > 0$ C — точка локального минимума;

2) при $f''(C) < 0$ C — точка локального максимума.

Доказательство

Дана конечная вторая производная

$$f''(C)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(C+\Delta x)-f'(C)}{\Delta x}.$$

Пусть $f''(C)>0$.

Поскольку C — критическая точка, то $f'(C)=0$. Тогда если $\Delta x<0$, то $f'(C+\Delta x)<0$, а если $\Delta x>0$, то $f'(C+\Delta x)>0$.

Таким образом, первая производная меняет знак с «–» на «+» при переходе через точку C. Следовательно, C — точка локального минимума.

Второе утверждение ($f''(C)<0$) доказывается аналогично.

Теорема 2.5 (третий достаточный признак экстремума). Если $f(x)$ имеет в критической точке C конечную производную порядка $2n$, то есть $f^{2n}(C)$ и $f'(C)=f''(C)=\ldots=f^{(2n-1)}(C)=0$:

— то при $f^{(2n)}>0$ C — точка локального минимума;

— при $f^{(2n)}<0$ C — точка локального максимума.

Пример 2.4

Пусть $y=f(x)=(x-a)^6$. Производные по 5-й порядок включительно равны нулю:

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(5)}(a)=0.$$

$f^{(6)}(a)=6!>0$. Следовательно, a — точка локального минимума.

График функции $y=f(x)=(x-a)^6$ представлен на рис. 2.5.

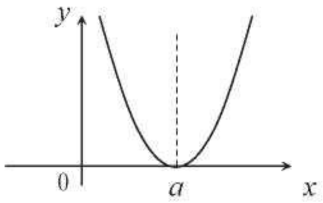


Рис. 2.5. График функции $y = (x-a)^6$

Контрольное задание

Найти интервалы монотонности и точки экстремума следующих функций:

а) $f(x) = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^3 - 15x^2 + 7x + 1}{10}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$;

г) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$;

е) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$;

ж) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x - 2$;

з) $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$;

и) $f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$;

к) $f(x) = (2x^2 + 2x + 3)e^{-2x}$.

2.2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений на отрезке

Рассмотрим $f(x)$, непрерывную на $X=[a,b]$. По теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает на $X=[a,b]$ своих $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in X} f(x)$:

— $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ — наибольшее значение $f(x)$ на $X=[a,b]$;

— $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ — наименьшее значение $f(x)$ на $X=[a,b]$.

Для определения значений $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ следует найти:

— значения $f(x)$ в точках возможного экстремума;

— значения $f(x)$ на концах интервала $[a,b]$.

В результате выбираются $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in X} f(x)$.

Пример 2.5

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\left|4x-x^2\right|-\dfrac{2}{x-2}$ на $[-1,1]$.

Решение

Из условия $4x-x^2=0$ найдем значения $x_1=0$ и $x_2=4$, в которых изменяется знак выражения, стоящего под знаком модуля. Функция не определена в точке $x_3=2$. Заметим, что x_2 и x_3 не принадлежат отрезку $[-1,1]$.

$$f(x)=\left[\begin{array}{ll} -4x+x^2-\dfrac{2}{x-2}, & x\in[-1,0), \\ 4x-x^2-\dfrac{2}{x-2}, & x\in[0,1], \end{array}\right.$$

тогда

$$f'(x)=\begin{cases} -4+2x+\dfrac{2}{(x-2)^2}, & x\in[-1,0), \\ 4-2x+\dfrac{2}{(x-2)^2}, & x\in[0,1]. \end{cases}$$

Критические точки находим из условия $f'=0$ на каждом из интервалов:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2(x-2)^3+2}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow (x-2)^3=-1 \Rightarrow x=1\notin[-1,0); \\ \dfrac{-2(x-2)^3+2}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow (x-2)^3=1 \Rightarrow x=3\notin[0,1]. \end{array}\right.$$

Отрезку $[-1,1]$ принадлежит одна критическая точка $x=0$, в которой производная не существует. Вычислим значения функции $f(0)=1$, $f(-1)=5\dfrac{2}{3}$, $f(1)=5$, $f_{\text{наим}}=1$, $f_{\text{наиб}}=5\dfrac{2}{3}$ для $x\in[-1,1]$.

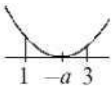
Пример 2.6

Для каждого значения параметра a найти наименьшее значение функции $f(x)=2x^2+4ax+3$ на отрезке $[1,3]$.

Решение

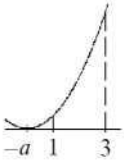
$f'(x)=4x+4a=0$, точка $x=-a$ является точкой локального минимума функции. Наименьшее значение функции достигается в этой точке, если значение $x=-a$ принадлежит интервалу $(1,3)$ и выполняется условие

$$\begin{cases} a\in(-3,-1), \\ f_{\text{наим}}=f(-a)=3-2a^2; \end{cases}$$



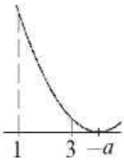
если $-a \le 1$, то

$$\begin{cases} a \in [-1, \infty), \\ f_{\text{наим}} = f(1) = 4a + 5; \end{cases}$$



если $-a \ge 3$, то

$$\begin{cases} a \in (-\infty, -3], \\ f_{\text{наим}} = f(3) = 12a + 21. \end{cases}$$



Пример 2.7

Площадь поверхности сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

Решение

Обозначим высоту цилиндра $AD = h$, $OB = R$ (рис. 2.6).

По условию

$$S = 4\pi R^2 = 27\pi \Rightarrow R^2 = \frac{27}{4},\ R = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Из ΔAOB: $AB^2 = OB^2 - OA^2 = \dfrac{27-h^2}{4}$. Объем цилиндра

$$V(h) = \pi AB^2 h = \frac{\pi}{4}\left(27h - h^3\right).$$

По смыслу задачи $0 < h < 2R$, то есть $0 < h < 3\sqrt{3}$. Исследуем функцию $V(h)$ на этом интервале. Производная

$$V'(h) = \frac{3\pi}{2}\left(9 - h^2\right) = 0,$$

при $h = 3$ вблизи этого значения $V'(h)$ меняет знак с «+» на «–», значит, при этой высоте объем цилиндра будет наибольшим.

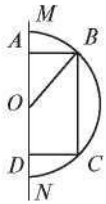


Рис. 2.6. Цилиндр, вписанный в сферу

Контрольные задания

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

а) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$, $[a, b] = [0, 1]$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$, $[a, b] = [-1, 1]$;

в) $f(x) = (x-1)(x+3)^2$, $[a, b] = [-4, 1]$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^2 + 2$, $[a, b] = [-0.5, 2]$;

д) $f(x)=x^4-2x^2-8$, $[a,b]=[-1,2]$;

е) $f(x)=\dfrac{x-1}{1+x}$, $[a,b]=[0,4]$;

ж) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[a,b]=[0,1]$;

з) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[a,b]=[0,1]$;

и) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$, $[a,b]=[0,1]$;

к) $f(x)=x+2\sqrt{x}$, $[a,b]=[0,4]$.

2. Владелец фабрики установил, что если он будет продавать свои изделия по цене x руб., то его годовая прибыль p составит $p=-20x^2+7000x-300000$ руб. Определить x, при котором прибыль будет максимальной.

3. Величина угла при основании равнобедренного треугольника равна α. При каком значении α отношение длины радиуса вписанной в данный треугольник окружности к длине радиуса описанной окружности будет наибольшим?

4. Шоссе пересекает местность с запада на восток. В 9 км к северу от шоссе находится лагерь, а в 15 км к востоку от ближайшей на шоссе к лагерю точки расположен город. Каков должен быть маршрут, чтобы добраться в город в кратчайший срок, если скорость движения по полю 8 км/ч, а по шоссе — 10 км/ч?

5. Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью v км/ч до пункта B, отстоящего от пункта A на 24,5 км. В пункте B автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью v. Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль за наименьшее время проезжал путь от A до полной остановки и обратно до пункта A указанным способом?

6. Требуется построить несколько одинаковых домов общей площадью 40000 м^2. Затраты на постройку одного дома, имеющего S м^2 площади, складываются из стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$, и стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$. Стоимость наземной части составляет 32% стоимости фундамента для дома площадью 1600 м^2. Определите, сколько нужно построить одинаковых домов, чтобы сумма затрат была наименьшей.

2.3. Выпуклые функции

Дадим определение выпуклой функции.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на множестве $X = [a, b]$, называется выпуклой на X, если выполняется условие

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

при всех $x_1, x_2 \in [a, b]$, $\alpha \in [0, 1]$.

Функция $f(x)$ называется вогнутой на X, если выполняется неравенство противоположного знака.

Если $f(x)$ вогнута на $[a, b]$, то $-f(x)$ выпукла на $[a, b]$.

Геометрический смысл выпуклой функции

График выпуклой функции на любом отрезке $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$ (рис. 2.7) находится не выше хорды, соединяющей точки графика функции (y_1, x_1) и (y_2, x_2), где $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$.

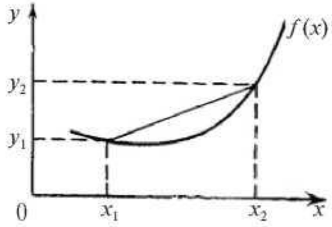


Рис. 2.7. График выпуклой функции

Свойства выпуклых функций

Перечислим свойства выпуклых функций.

Теорема 2.6. Выпуклая на $[a,b]$ функция $f(x)$ в любой точке $x\in(a,b)$ непрерывна, имеет конечные односторонние производные:

$$f'(x+0)=\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(x+\lambda)-f(x)}{\lambda},$$

$$f'(x-0)=\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(x)-f(x-\lambda)}{\lambda},$$

причем $f'(x-0)\le f'(x+0)$.

Замечание к теореме 2.6. На концах $[a,b]$ выпуклая функция $f(x)$ может не иметь соответствующей односторонней производной и, более того, может терпеть здесь разрыв.

Например, функция $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ выпукла и непрерывна на $[-1,1]$, но на концах отрезка не имеет конечных производных $f'(1-0)$ и $f'(-1+0)$.

Функция

$$f(x)=-\begin{cases}|x|, & -2<x<2,\\ 4, & |x|=2\end{cases}$$

выпукла на $[-2, 2]$, но на концах отрезка имеет разрыв.

Теорема 2.7. График выпуклой дифференцируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ лежит не ниже любой касательной к нему, причем для любой точки $x_* \in [a, b]$ выполняется условие

$$f(x) \geq f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*),\ x \in [a, b].$$

Теорема 2.8. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ на $[a, b]$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ не убывала на $[a, b]$.

Теорема 2.9. Для того чтобы дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на $[a,b]$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Контрольные задания

1. Доказать, что выпуклая на $[a,b]$ функция $f(x)$, отличная от постоянной, не может достигать своей верхней границы внутри отрезка $[a,b]$.
2. Пусть выпуклая функция $f(x): R \to R$ дифференцируема в точках a и b, $a < b$. Доказать, что точка минимума принадлежит множеству (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$.
3. Пусть выпуклая на $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет обратную функцию. Является ли обратная функция также выпуклой? Привести иллюстрирующие примеры.

3. Численные методы минимизации функции одной переменной

Рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R$, $X = [a, b]$:

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}}.$$

Аналитические методы исследования функции на экстремум можно использовать в тех случаях, когда функция $f(x)$ и ее производные имеют достаточно простой вид. Однако зачастую в практических задачах решение уравнения

$$f'(x) = 0$$

и даже просто вычисление производной $f'(x)$ представляет большие трудности. Кроме того, в практических задачах часто неизвестно, является ли $f(x)$ дифференцируемой функцией. Поэтому существенное значение приобретают численные методы минимизации, не требующие вычисления производной и основанные на исследовании поведения функции в некоторых специально подбираемых точках в соответствии с определенным алгоритмом. Такие методы называются *прямыми методами* минимизации. При этом задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации.

3.1. Унимодальные функции

Дадим определение унимодальной функции.

Определение 3.1. Функция $f(x)$ называется унимодальной на отрезке $[a, b]$, если существует единственная точка ее минимума x_* и слева от этой точки функция $f(x)$ является строго убывающей, а справа — строго возрастающей:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ для } \forall x_1 < x_2 < x_*,$$

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ для } \forall x_* < x_1 < x_2.$$

На рис. 3.1 приведены некоторые примеры графиков унимодальных функций.

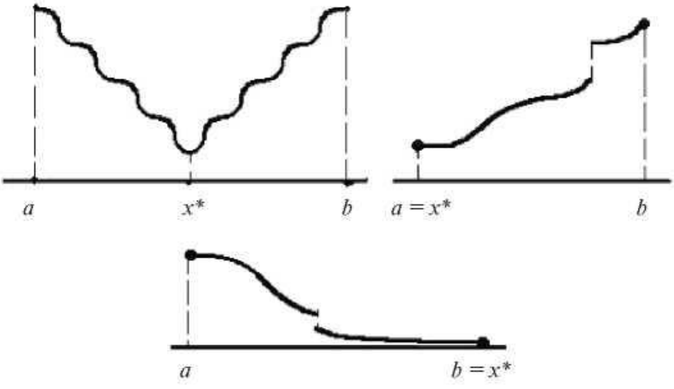


Рис. 3.1. Примеры графиков унимодальной функции

Приведем свойство унимодальной функции:

— если $f(x_1) \le f(x_2)$ при $a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow x_* < x_2$;

— если $f(x_1) \ge f(x_2)$ при $a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow x_* > x_1$.

Для проверки унимодальности функции $f(x)$ на практике обычно используют следующие критерии.

Теорема 3.1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и производная $f'(x)$ не убывает на этом отрезке, то $f(x)$ унимодальная на $[a, b]$.

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f''(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$, то $f(x)$ унимодальная на $[a, b]$.

Пример 3.1

Показать, что функция $f(x) = x^3 - 12x^2 + 87x + 25$ унимодальная на отрезке $[4, 7]$.

Решение

Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид $f''(x) = 6x - 24$. Корень уравнения $6x - 24 = 0$ таков: $x = 4$.

Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если в целом $x \geq 4$ и в частности $x \in [4, 7]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.2), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[4, 7]$.

Пример 3.2

Показать, что функция $f(x) = x^4 + 3$ унимодальная на отрезке $[-1, 1]$.

Решение

Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = 4x^3$. Функция $f'(x)$ не убывает, если в целом $x \in R$ и в частности $x \in [-1, 1]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.1), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[-1, 1]$.

Контрольные задания

1. Показать, что следующие функции $f(x)$ унимодальны на отрезке $[a,b]$:

   а) $f(x)=x^2-3x+x\ln x$, $[a,b]=[1,2]$;

   б) $f(x)=\ln(1+x^2)-\sin x$, $[a,b]=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;

   в) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2-8x+12$, $[a,b]=[0,2]$;

   г) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\sin x$, $[a,b]=[0,1]$.
2. Показать, что любая из точек локального минимума функции $f(x)$, унимодальной на отрезке $[a,b]$, является и точкой ее глобального минимума.
3. Показать, что если функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$ и $a\le c<d\le b$, то $f(x)$ унимодальна на отрезке $[c,d]$.
4. Найти максимальное значение b, при котором функция $f(x)=-x^2+5x-6$ унимодальна на отрезке $[-5,b]$.
5. Будет ли функция $f(x)=ax^3-3x^2-10$ унимодальной на отрезке $[1,2]$ при $a>3$?
6. На какие три части следует разбить отрезок $[-1,2]$, чтобы на каждой из них функция $f(x)=\left||x(x-1)|-1\right|$ была унимодальной?

3.2. Метод перебора

Метод перебора является простейшим из прямых методов минимизации.

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a,b]$ и требуется найти какую-либо из точек минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon>0$.

Схема метода

Отрезок $[a, b]$ разбивается на n равных частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

точками деления $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, где $n \geq \dfrac{b-a}{\varepsilon}$.

Вычисляются значения функции $f(x)$ в этих точках, путем сравнения определяется точка x_m, для которой выполняется условие

$$f(x_m) = \min_{i=0,1,2,\ldots n} f(x_i).$$

В качестве приближения точки минимума x_* выбирается точка x_m, а в качестве приближения минимального значения функции f_* — величина $f(x_m)$. При этом максимальная погрешность ε_n определения точки минимума x_* имеет вид

$$\varepsilon_n = \frac{b-a}{n}.$$

Достоинство метода перебора — простота реализации на компьютере алгоритма поиска глобального минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Недостатки метода перебора:

1. Для того чтобы точность определения точки минимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была приемлемая:

   $$|x_m - x_*| \leq \varepsilon,$$

   необходимо большое число разбиений n отрезка $[a, b]$, что приводит к увеличению объема вычислений.
2. Увеличение объема вычислений приводит к увеличению суммарной ошибки — общей погрешности. Следовательно, необходимо с большей точностью производить вычисления.

3. Требуется вычислить значения функции $f(x)$ в точках разбиения x_i отрезка $[a,b]$, сравнить их с вычисленными ранее значениями, выбрать наименьшее значение, при этом вычисление значений функции $f(x_i)$ может быть трудоемко и приближенно (остаточная погрешность).

Пример 3.3

Найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5, 2]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Сначала проверим, является ли функция $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ унимодальной на отрезке $[1.5, 2]$.

Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12$. Корни уравнения $12x^2 + 48x - 12 = 0$ таковы:

$$x_1 = -2 + \sqrt{5} \text{ и } x_2 = -2 - \sqrt{5}.$$

Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если в целом $x \geq -2 + \sqrt{5}$ и в частности $x \in [1.5, 2]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.2), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[1.5, 2]$.

Далее применим метод перебора для нахождения минимума функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5, 2]$. Выберем число частей разбиения отрезка n:

$$n = \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{2-1.5}{0.05} = 10.$$

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках деления x_i: $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n} = 1.5 + i0.05$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$, поместив их в таблицу:

x_i	$f(x_i)$
1.5	–89.4
1.55	–90.20
1.60	–91.20
1.65	–91.80
1.70	–92.08
1.75	–92.12
1.80	–91.90
1.85	–91.40
1.90	–90.50
1.95	–89.40
2.00	–88.00

Из таблицы определяем $x_* \approx 1.75$, $f_* \approx -92.12$.

Пример 3.4

Найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ на отрезке $[7, 7.5]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Проверим является ли функция $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ унимодальной на отрезке $[7, 7.5]$.

Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = 3x^2 - 24x - 7$. Функция $f'(x)$ не убывает, если в целом $x \geq 4$ и в частности $x \in [7, 7.5]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.1), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[7, 7.5]$.

Далее применим метод перебора для нахождения минимума функции $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ на отрезке $[7, 7.5]$.

Выберем число частей разбиения отрезка n:

$$n = \frac{b - a}{\varepsilon} = \frac{7.5 - 7}{0.05} = 10.$$

Вычислим значения функции $f(x)$ в точках деления x_i:
$x_i = a + i\dfrac{b-a}{n} = 7 + i0.05$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$, поместив их в таблицу:

x_i	$f(x_i)$
7.00	–44.00
7.05	–45.37
7.10	–46.71
7.15	–47.99
7.20	–49.23
7.25	–50.42
7.30	–51.56
7.35	–52.65
7.40	–53.70
7.45	–54.69
7.50	–55.62

Из таблицы определяем $x_* \approx 7.5$, $f_* \approx -55.62$.

Контрольные задания

1. Методом перебора найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью ε и минимальное значение f_*:
   а) $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$, $[a, b] = [1, 2]$, $\varepsilon = 0.05$;
   б) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$, $[a, b] = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon = 0.03$;
   в) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$, $[a, b] = [0, 2]$, $\varepsilon = 0.05$;
   г) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \sin x$, $[a, b] = [0, 1]$, $\varepsilon = 0.03$;
   д) $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$, $[a, b] = [1, 1.5]$, $\varepsilon = 0.05$;
   е) $f(x) = \mathrm{tg}\,x - 2\sin x$, $[a, b] = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon = 0.03$;

ж) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-e^{-2x}$, $[a,b]=[0,1]$, $\varepsilon=0.1$;

з) $f(x)=\dfrac{1}{7}x^7-x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x$, $[a,b]=[1,1.5]$, $\varepsilon=0.05$;

и) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-5x+x\ln x$, $[a,b]=[1.5,2]$, $\varepsilon=0.02$;

к) $f(x)=5x^2-8x^{\frac{5}{4}}-20x$, $[a,b]=[3,3.5]$, $\varepsilon=0.02$.

2. Пусть $f(x)$ — унимодальная дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ функция, причем $|f'(x)|\le M$ при $x\in[a,b]$. Оценить погрешность ε_n нахождения минимума f_* при разбиении отрезка $[a,b]$ на n частей.

3.3. Методы сокращения отрезка поиска

Рассмотрим группу численных методов, состоящих в построении последовательности отрезков $[a_n,b_n]$, стягивающихся к точке глобального минимума x_* функции $f(x)$ на исходном отрезке $[a,b]$.

Процедура, реализующая эти методы, заключается в следующем:

1. Поиск начального отрезка, содержащего точку x_*.

   В результате выделяют начальный отрезок $[a_0,b_0]\subseteq[a,b]$, на котором производится дальнейшая минимизация функции $f(x)$. Полагают $n=1$ и переходят к следующему этапу.

2. Построение отрезка $[a_n,b_n]$.

   Вычисляются определенным образом некоторые точки на отрезке $[a_{n-1},b_{n-1}]$, и на основе анализа значений функции $f(x)$ в этих точках выделяется отрезок

$$[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}],$$

на котором продолжается дальнейший поиск.

3. Проверка на окончание процедуры поиска.

   Если процесс построения не закончен, то полагают $n = n + 1$ и переходят к этапу 2.

   Условие окончания процедуры:

   — построено заранее заданное число итераций n;

   — выполняется требование на точность расчета, например $\Delta_n = b_n - a_n \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число.

4. Выбор решения.

   Имеется правило, по которому указывается точка $x_m \in [a_n, b_n]$, принимаемая в качестве приближения для x_*.

   При этом необходимо достижение заданной степени близости полученного приближения x_m к точному решению, например $|x_m - x_*| \le \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 > 0$ — заранее заданное число.

Сходимость подобного процесса гарантируется, например, унимодальностью функции $f(x)$.

3.3.1. Метод деления отрезка пополам (дихотомии)

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$ и требуется найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм метода

Шаг 0. Выберем $\delta \in (0, 2\varepsilon)$, положим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Найдем две точки, используя формулы

$$x_1^{(0)} = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2} \text{ и } x_2^{(0)} = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2}.$$

Вычислим значения функции $f(x_1^{(0)})$ и $f(x_2^{(0)})$.

Ш а г 1. Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(0)})$ и $f(x_2^{(0)})$:

— если $f(x_1^{(0)}) \le f(x_2^{(0)})$, то $a_1 = a_0$ и $b_1 = x_2^{(0)}$;

— если $f(x_1^{(0)}) > f(x_2^{(0)})$, то $a_1 = x_1^{(0)}$ и $b_1 = b_0$.

На рис. 3.2 изображен один из вариантов выбора отрезка $[a_1, b_1]$.

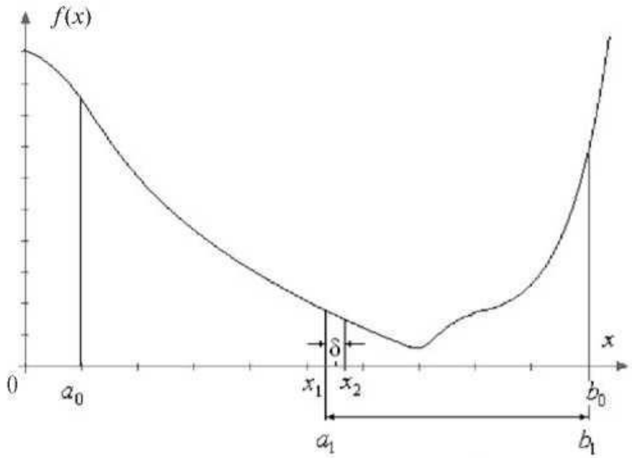


Рис. 3.2. Определение отрезка поиска $[a_1, b_1]$

На новом отрезке поиска $[a_1, b_1]$ рассмотрим точки

$$x_1^{(1)} = \frac{a_1 + b_1 - \delta}{2} \text{ и } x_2^{(1)} = \frac{a_1 + b_1 + \delta}{2}.$$

Вычислим значения функции $f(x_1^{(1)})$ и $f(x_2^{(1)})$.

Ш а г i $(i \ge 1)$. Определим новый отрезок поиска $[a_i, b_i]$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(i-1)})$ и $f(x_2^{(i-1)})$, где

$$x_1^{(i-1)} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1} - \delta}{2} \text{ и } x_2^{(i-1)} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1} + \delta}{2}:$$

— если $f(x_1^{(i-1)}) \le f(x_2^{(i-1)})$, то $a_i = a_{i-1}$ и $b_i = x_2^{(i-1)}$;
— если $f(x_1^{(i-1)}) > f(x_2^{(i-1)})$, то $a_i = x_1^{(i-1)}$ и $b_i = b_{i-1}$.

Поиск заканчивается, если длина интервала поиска $[a_i, b_i]$ на текущей итерации i становится не больше заданной точности ε:

$$|b_i - a_i| \le \varepsilon,$$

то есть количество шагов процедуры поиска $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ определяется условием

$$|b_n - a_n| \le \varepsilon.$$

В качестве приближения точки минимума x_* выбирается любая точка $x_m \in [a_n, b_n]$, например $x_m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, а в качестве приближения минимального значения функции f_* — величина $f(x_m)$. При этом максимальная погрешность ε_n определения точки минимума x_* имеет вид

$$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a - \delta}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2}.$$

Степень близости полученного приближенного значения функции и минимума этой функции на $[a, b]$ определяется неравенством

$$|f_* - f(x_m)| \le L|x_* - x_m| \le L\frac{b_n - a_n}{2} \le L\frac{\varepsilon}{2},$$
$$L = \max_{x \in [a_n, b_n]} |\rho(x)|,$$

где $\rho(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x: $\rho(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Пример 3.5

Методом деления отрезка пополам найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5, 2]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Сначала проверим, является ли функция $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ унимодальной на отрезке [1.5, 2].

Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12$. Корни уравнения $12x^2 + 48x - 12 = 0$ имеют вид $x_1 = -2 + \sqrt{5}$ и $x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

Следовательно, $f''(x) \geq 0$, если в целом $x \geq -2 + \sqrt{5}$ и в частности $x \in [1.5, 2]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.2), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке [1.5, 2].

Далее применим метод деления отрезка пополам для нахождения минимума функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке [1.5, 2].

Положим $\delta = 0.02 < 2\varepsilon = 0.1$. В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, то есть $x_* \approx \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Число итераций n определяется условием $\varepsilon_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \leq \varepsilon = 0.05$.

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$\varepsilon_i = \dfrac{b_i - a_i}{2}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
0	1.5	2.0	0.25	1.74	1.76	–92.135	–92.096	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	1.5	1.76	0.13	1.62	1.64	–91.486	–91.696	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1.62	1.76	0.07	1.68	1.7	–91.995	–92.084	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	1.68	1.76	0.04	—	—	—	—	При $\varepsilon_3 < \varepsilon$ точность достигнута

Следовательно, получим $x_* \approx \dfrac{1.68 + 1.76}{2} = 1.72$, $f_* \approx f(1.72) = -92.13$.

Пример 3.6

Методом деления отрезка пополам найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0, 8]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 1$.

Решение

Сначала проверим, является ли функция $f(x) = 2x^2 - 12x$ унимодальной на отрезке $[0, 8]$.

Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = 4x - 12$. Функция $f'(x)$ не убывает, если в целом $x \in R$ и в частности $x \in [0,8]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.1), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[0, 8]$.

Далее применим метод деления отрезка пополам для нахождения минимума функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0, 8]$.

Положим $\delta = 0.4 < 2\varepsilon = 2$. В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, то есть $x_* \approx \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Число итераций n определяется условием $\varepsilon_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon = 1$.

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$\varepsilon_i = \dfrac{b_i - a_i}{2}$	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
0	0	8	4	3.8	4.2	-16.72	-15.12	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	0	4.2	2.1	1.9	2.3	-15.58	-17.02	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1.9	4.2	1.15	2.85	3.25	-17.955	-17.875	$f(x_1^{(2)}) < f(x_2^{(2)})$, $b_3 = x_2^{(2)}$
3	1.9	3.25	0.675	—	—	—	—	При $\varepsilon_3 < \varepsilon$ точность достигнута

Следовательно, получим $x_* \approx \dfrac{1.9 + 3.25}{2} \approx 2.6$, $f_* \approx f(2.6) = -17.7$.

3.3.2. Метод золотого сечения

В методе золотого сечения две внутренние точки, которые используются для сокращения отрезка поиска, выбираются таким образом, чтобы одна из них использовалась с той же целью и на следующем уже сокращенном отрезке. Данное правило выбора точек приводит к тому, что число вычислений функции сокращается вдвое и одна итерация требует расчета только одного нового значения функции. Такими свойствами обладают точки, называемые *точками золотого сечения*.

Определение 3.2. Точка производит золотое сечение отрезка, если отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длин большей части к меньшей.

В методе золотого сечения на отрезке $[a, b]$ симметрично относительно его концов выбираются точки x_1 и x_2, такие что

$$\frac{b-a}{b-x_1}=\frac{b-x_1}{x_1-a}=\frac{b-a}{x_2-a}=\frac{x_2-a}{b-x_2}.$$

При этом точка x_1 является второй точкой золотого сечения отрезка $[a, x_2]$, а точка x_2 — первой точкой золотого сечения отрезка $[x_1, b]$.

Зная одну из точек золотого сечения отрезка $[a, b]$, другую можно найти по одной из формул

$$x_1 = a + b - x_2,\ x_2 = a + b - x_1.$$

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$ и требуется найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм метода

Шаг 0. Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Найдем две точки $x_1^{(0)}$ и $x_2^{(0)}$ золотого сечения отрезка $[a_0, b_0]$, используя формулы

$$x_1^{(0)} = a_0 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_0 - a_0) = a_0 + 0.381966011(b_0 - a_0),$$
$$x_2^{(0)} = a_0 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_0 - a_0) = a_0 + 0.618033989(b_0 - a_0).$$

Вычислим значения функции: $f(x_1^{(0)})$ и $f(x_2^{(0)})$.

Шаг 1. Определим новый отрезок поиска $[a_1, b_1]$ и точки $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ золотого сечения отрезка $[a_1, b_1]$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(0)})$ и $f(x_2^{(0)})$:

— если $f(x_1^{(0)}) \le f(x_2^{(0)})$, то

$$a_1 = a_0,\ b_1 = x_2^{(0)},\ x_2^{(1)} = x_1^{(0)},\ x_1^{(1)} = a_1 + b_1 - x_1^{(0)},\ \bar{x}_1 = x_1^{(0)};$$

— если $f(x_1^{(0)}) > f(x_2^{(0)})$, то

$$a_1 = x_1^{(0)},\ b_1 = b_0\ x_1^{(1)} = x_2^{(0)},\ x_2^{(1)} = a_1 + b_1 - x_2^{(0)},\ \bar{x}_1 = x_2^{(0)}.$$

На рис. 3.3 изображен один из вариантов выбора отрезка $[a_1, b_1]$.

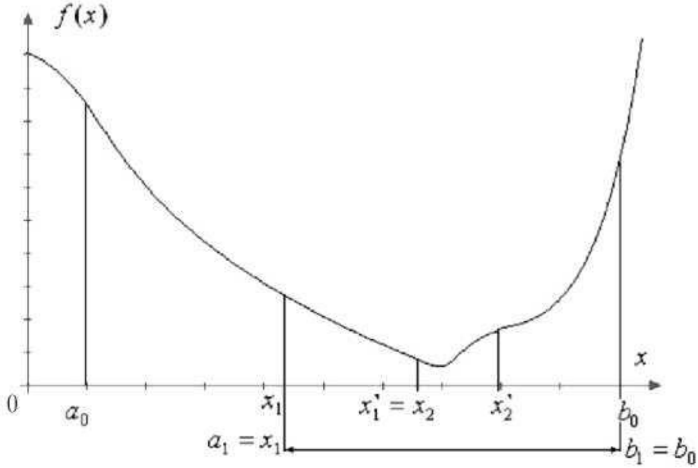


Рис. 3.3. Определение отрезка поиска $[a_1, b_1]$

На новом отрезке поиска $[a_1, b_1]$ вычислим только значение функции в точке $x_1^{(1)}$ в случае $f(x_1^{(1)})$ или в точке $x_2^{(1)}$ в случае $f(x_2^{(1)})$.

Шаг i $(i \geq 2)$. Определим новый отрезок поиска $[a_i, b_i]$ и точки $x_1^{(i)}$ и $x_2^{(i)}$ золотого сечения отрезка $[a_i, b_i]$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(i-1)})$ и $f(x_2^{(i-1)})$:

— если $f(x_1^{(i-1)}) \leq f(x_2^{(i-1)})$, то

$$a_i = a_{i-1},\ b_i = x_2^{(i-1)},\ x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)},\ x_1^{(i)} = a_i + b_i - x_1^{(i-1)},\ \bar{x}_i = x_1^{(i-1)};$$

— если $f(x_1^{(i-1)}) > f(x_2^{(i-1)})$, то

$$a_i = x_1^{(i-1)},\ b_i = b_{i-1},\ x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)},\ x_2^{(i)} = a_i + b_i - x_2^{(i-1)},\ \bar{x}_i = x_2^{(i-1)}.$$

Поиск заканчивается, если длина интервала поиска $[a_i, b_i]$ на текущей итерации i становится не больше заданной точности ε:

$$|b_i - a_i| \leq \varepsilon,$$

то есть количество шагов процедуры поиска $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ определяется условием

$$|b_n - a_n| \leq \varepsilon.$$

В качестве приближения точки минимума x_* выбирается точка $x_m = \bar{x}_n$, а в качестве приближения минимального значения функции f_* — величина $f(x_m)$. При этом максимальная погрешность ε_n определения точки минимума x_* имеет вид

$$\varepsilon_n = b_n - a_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} (b-a),$$

откуда следует, что число шагов метода золотого сечения, обеспечивающее заданную точность ε нахождения точки x_*, должно удовлетворять неравенству

$$n \ge \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)}{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} - 1 \approx -2.1\ln\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right) - 1.$$

Степень близости полученного приближенного значения функции и минимума этой функции на $[a, b]$ определяется неравенством

$$\left|f_* - f(x_m)\right| \le L\left|x_* - x_m\right| \le L(b_n - a_n) \le L\frac{\sqrt{5}-1}{2}\varepsilon,$$

$$L = \max_{x\in[a_n, b_n]}\left|\rho(x)\right|,$$

где $\rho(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x: $\rho(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Пример 3.7

Методом золотого сечения найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5, 2]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Сначала проверим является ли функция $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ унимодальной на отрезке $[1.5, 2]$.

Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид $f''(x) = 12x^2 + 48x - 12$. Корни уравнения $12x^2 + 48x - 12 = 0$ имеют вид $x_1 = -2 + \sqrt{5}$ и $x_2 = -2 - \sqrt{5}$.

Следовательно, $f''(x) \ge 0$, если в целом $x \ge -2 + \sqrt{5}$ и в частности $x \in [1.5, 2]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.2), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[1.5, 2]$. Далее применим метод золотого сечения для нахождения минимума функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5, 2]$. В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \bar{x}_n$, то есть $x_* \approx \bar{x}_n$. Число итераций n определяется условием

$$\varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b_n - a_n) \le \varepsilon = 0.05.$$

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	ε_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
0	1.5	2.0	0.309	1.691	1.809	–92.049	–91.814	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	1.5	1.809	0.191	1.618	1.691	–91.464	–92.049	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1.618	1.809	0.118	1.691	1.736	–92.049	–92.138	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	1.691	1.809	0.073	1.736	1.764	–92.138	–92.083	$f(x_1^{(3)}) < f(x_2^{(3)})$, $b_4 = x_2^{(3)}$
4	1.691	1.764	0.045	–	1.736	–	–92.138	При $\varepsilon_4 < \varepsilon$ точность достигнута

Следовательно, получим $x_* \approx \bar{x}_4 = 1.736$, $f_* \approx f(1.736) = -92.138$.

Пример 3.8

Методом золотого сечения найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0, 8]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 1$.

Решение

Сначала проверим, является ли функция $f(x) = 2x^2 - 12x$ унимодальной на отрезке $[0, 8]$.

Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = 4x - 12$. Функция $f'(x)$ не убывает, если в целом $x \in R$ и в частности $x \in [0, 8]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.1), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[0, 8]$.

Далее применим метод золотого сечения для нахождения минимума функции $f(x) = 2x^2 - 12x$ на отрезке $[0, 8]$. В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \bar{x}_n$, то есть $x_* \approx \bar{x}_n$. Число итераций n определяется условием

$$\varepsilon_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(b_n - a_n) \le \varepsilon = 1.$$

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	ε_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
0	0	8.0	4.944	3.06	4.95	-17.99	-10.44	$f(x_1^{(0)}) < f(x_2^{(0)})$, $b_1 = x_2^{(0)}$
1	0	4.95	3.06	1.89	3.06	-15.53	-17.99	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, $a_2 = x_1^{(1)}$
2	1.89	4.95	1.888	3.06	3.78	-17.99	-16.79	$f(x_1^{(2)}) < f(x_2^{(2)})$, $b_3 = x_2^{(2)}$
3	1.89	3.78	1.167	2.61	3.06	-17.69	-17.99	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)})$, $a_4 = x_1^{(3)}$
4	2.61	3.78	0.721	3.06	–	-17.99	–	При $\varepsilon_4 < \varepsilon$ точность достигнута

Следовательно, получим $x_* \approx \bar{x}_4 = 3.06$, $f_* \approx f(3.06) = -17.99$.

3.3.3. Метод Фибоначчи

Определение 3.3. Последовательность чисел Фибоначчи $\{F_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, подчиняется соотношению

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \text{ где } F_1 = F_2 = 1$$

и имеет вид

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,$$
$$377, 610, 987, 1597, \ldots$$

С помощью метода математической индукции можно показать, что n-е число Фибоначчи вычисляется по *формуле Бинэ:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a, b]$ и требуется найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с абсолютной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм метода

Шаг 1. Положим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Найдем две точки $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, используя формулы

$$x_1^{(1)} = a_1 + \frac{F_n}{F_{n+2}}(b_1 - a_1),$$

$$x_2^{(1)} = a_1 + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}(b_1 - a_1) = a_1 + b_1 - x_1^{(1)}.$$

Вычислим значения функции: $f(x_1^{(1)})$ и $f(x_2^{(1)})$.

Шаг 2. Определим новый отрезок поиска $[a_2, b_2]$ и точки $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(1)})$ и $f(x_2^{(1)})$:

— если $f(x_1^{(1)}) \le f(x_2^{(1)})$, то

$$a_2 = a_1, b_2 = x_2^{(1)}, x_2^{(2)} = x_1^{(1)}, x_1^{(2)} = a_2 + b_2 - x_1^{(1)}, \bar{x}_2 = x_1^{(1)};$$

— если $f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, то

$$a_2 = x_1^{(1)}, b_2 = b_1\, x_1^{(2)} = x_2^{(1)}, x_2^{(2)} = a_2 + b_2 - x_2^{(1)}, \bar{x}_2 = x_2^{(1)}.$$

На новом отрезке поиска $[a_2, b_2]$ вычислим только значение функции в точке $x_1^{(2)}$ в случае $f(x_1^{(2)})$ или в точке $x_2^{(2)}$ в случае $f(x_2^{(2)})$.

Шаг i $(i \ge 3)$. Определим новый отрезок поиска $[a_i, b_i]$ и точки $x_1^{(i)}$ и $x_2^{(i)}$ следующим образом. Сравним значения функции $f(x_1^{(i-1)})$ и $f(x_2^{(i-1)})$:

— если $f(x_1^{(i-1)}) \le f(x_2^{(i-1)})$, то

$$a_i = a_{i-1},\ b_i = x_2^{(i-1)},\ x_2^{(i)} = x_1^{(i-1)},\ x_1^{(i)} = a_i + b_i - x_1^{(i-1)},$$

$$\overline{x}_i = x_1^{(i-1)} = a_i + \frac{F_{n-i+1}}{F_{n-i+3}}(b_i - a_i) = a_i + \frac{F_{n-i+1}}{F_{n+2}}(b_1 - a_1);$$

— если $f(x_1^{(i-1)}) > f(x_2^{(i-1)})$, то

$$a_i = x_1^{(i-1)},\ b_i = b_{i-1},\ x_1^{(i)} = x_2^{(i-1)},\ x_2^{(i)} = a_i + b_i - x_2^{(i-1)},$$

$$\overline{x}_i = x_2^{(i-1)} = a_i + \frac{F_{n-i+2}}{F_{n-i+3}}(b_i - a_i) = a_i + \frac{F_{n-i+2}}{F_{n+2}}(b_1 - a_1).$$

В качестве приближения точки минимума x_* выбирается точка $x_m = \overline{x}_i$, а в качестве приближения минимального значения функции f_* — величина $f(x_m)$.

Нетрудно заметить, что при $i = n$ точка $x_2^{(n)} = a_n + \dfrac{F_1}{F_{n+2}}(b_1 - a_1)$, полученная при условии $f(x_1^{(i-1)}) \le f(x_2^{(i-1)})$, или $x_1^{(n)} = a_n + \dfrac{F_2}{F_{n+2}}(b_1 - a_1)$, полученная при условии $f(x_1^{(i-1)}) > f(x_2^{(i-1)})$, совпадают и делят отрезок $[a_n, b_n]$ пополам.

Следовательно, максимальная погрешность ε_n определения точки минимума x_* имеет вид

$$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{F_{n+2}} \le \varepsilon,$$

откуда следует, что число шагов n метода Фибоначчи, обеспечивающее заданную точность ε нахождения точки x_*, можно выбрать из условия

$$F_{n+2} \ge \frac{b - a}{\varepsilon}.$$

Степень близости полученного приближенного значения функции и минимума этой функции на $[a, b]$ определяется неравенством

$$|f_* - f(x_m)| \le L|x_* - x_m| \le L\frac{b_n - a_n}{2} \le L\varepsilon,$$
$$L = \max_{x \in [a_n, b_n]} |\rho(x)|,$$

где $\rho(x)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x: $\rho(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Пример 3.9

Методом Фибоначчи найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ на отрезке $[7, 7.5]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение

Проверим, является ли функция $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ унимодальной на отрезке $[7,\ 7.5]$.

Производная функции $f(x)$ имеет вид $f'(x) = 3x^2 - 24x - 7$. Функция $f'(x)$ не убывает, если в целом $x \ge 4$ и в частности $x \in [7,\ 7.5]$. Используя критерий унимодальности (см. теорему 3.1), получаем, что $f(x)$ унимодальна на отрезке $[7,\ 7.5]$.

Далее применим метод Фибоначчи для нахождения минимума функции $f(x) = x^3 - 12x^2 - 7x + 250$ на отрезке $[7,\ 7.5]$.

Определим необходимое число шагов n метода из условия

$$F_{n+2} \ge \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{7.5-7}{0.05} = 10,$$

откуда получим число Фибоначчи $F_{n+2} = 13$ и $n + 2 = 7$, следовательно, $n = 5$.

В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \bar{x}_n = \bar{x}_5$, то есть

$$x_* \approx \bar{x}_n = \bar{x}_5.$$

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
1	7	7.50	7.192	7.308	–49.045	–51.734	$f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)}),\ a_2 = x_1^{(1)}$
2	7.192	7.50	7.308	7.385	–51.734	–53.381	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)}),\ a_3 = x_1^{(2)}$
3	7.308	7.50	7.385	7.423	–53.381	–54.160	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)}),\ a_4 = x_1^{(3)}$
4	7.385	7.50	7.423	7.462	–54.160	–54.908	$f(x_1^{(4)}) > f(x_2^{(4)}),\ a_5 = x_1^{(4)}$
5	7.423	7.50	7.462	7.462	–54.908	–54.908	При $i = 5$ число шагов поиска выполнено

Следовательно, получим $x_* \approx \bar{x}_5 = 7.462,\ f_* \approx f(7.462) = -54.908.$

Пример 3.10

Методом Фибоначчи найти минимальное значение f_* и точку минимума x_* функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5,\ 2]$. Точку x_* найти с погрешностью $\varepsilon = 0.07$.

Решение

Функция $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ является унимодальной на отрезке $[1.5,\ 2]$ (см. пример 3.7).

Применим метод Фибоначчи для нахождения минимума функции $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на отрезке $[1.5,\ 2]$.

Определим необходимое число шагов n метода из условия

$$F_{n+2} \geq \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{2-1.5}{0.07} \approx 7,$$

откуда получим число Фибоначчи $F_{n+2} = 8$ и $n + 2 = 6$, следовательно, $n = 4$.

В качестве приближения точки минимума x_* выберем точку $x_m = \bar{x}_n = \bar{x}_4$, то есть $x_* \approx \bar{x}_4$.

Составим итерационную таблицу вычислений.

i	a_i	b_i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$	$f(x_1^{(i)})$	$f(x_2^{(i)})$	Примечание
1	1.5	2.0	1.688	1.812	–92.033	–91.784	$f(x_1^{(1)}) < f(x_2^{(1)})$, $b_2 = x_2^{(1)}$
2	1.5	1.812	1.625	1.688	–91.543	–92.033	$f(x_1^{(2)}) > f(x_2^{(2)})$, $a_3 = x_1^{(2)}$
3	1.625	1.812	1.688	1.750	–92.033	–92.121	$f(x_1^{(3)}) > f(x_2^{(3)})$, $a_4 = x_1^{(3)}$
4	1.688	1.812	1.750	1.750	–92.121	–92.121	При $i = 4$ число шагов поиска выполнено

Следовательно, получим $x_* \approx \bar{x}_4 = 1.750$, $f_* \approx f(1.750) = -92.121$.

Контрольные задания

1. Методом деления отрезка пополам найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ с точностью ε и минимальное значение f_*:

   а) $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x$, $[a,\ b] = [1,\ 2]$, $\varepsilon = 0.05$;

   б) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x$, $[a,\ b] = \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon = 0.03$;

   в) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 8x + 12$, $[a,\ b] = [0,\ 2]$, $\varepsilon = 0.05$;

   г) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin x$, $[a,\ b] = [0,\ 1]$, $\varepsilon = 0.03$;

   д) $f(x) = x^2 - 2x + e^{-x}$, $[a,\ b] = [1,\ 1.5]$, $\varepsilon = 0.05$;

   е) $f(x) = \mathrm{tg}x - 2\sin x$, $[a,\ b] = \left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon = 0.03$;

   ж) $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - e^{-2x}$, $[a,\ b] = [0,\ 1]$, $\varepsilon = 0.1$;

   з) $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$, $[a,\ b] = [1,\ 1.5]$, $\varepsilon = 0.05$;

и) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-5x+x\ln x$, $[a,\ b]=[1.5,\ 2]$, $\varepsilon=0.02$;

к) $f(x)=5x^2-8x^{\frac{5}{4}}-20x$, $[a,\ b]=[3,\ 3.5]$, $\varepsilon=0.02$.

2. Методом золотого сечения найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ с точностью ε и минимальное значение f_*:

   а) $f(x)=x^3-3\sin x$, $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $\varepsilon=0.001$;

   б) $f(x)=x^4+x^2+x+1$, $[a,\ b]=[-1,\ 0]$, $\varepsilon=0.003$;

   в) $f(x)=\dfrac{1}{x}+e^x$, $[a,\ b]=[0.5,\ 1.5]$, $\varepsilon=0.001$;

   г) $f(x)=x^2+x+\sin x$, $[a,\ b]=[-1,\ 0]$, $\varepsilon=0.003$;

   д) $f(x)=x^2+e^{-x}$, $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $\varepsilon=0.001$;

   е) $f(x)=x^2-3x+x\ln x$, $[a,\ b]=[1,\ 2]$, $\varepsilon=0.005$;

   ж) $f(x)=\ln(1+x^2)-\sin x$, $[a,\ b]=\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\varepsilon=0.001$;

   з) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+x^2-8x+12$, $[a,\ b]=[0,\ 2]$, $\varepsilon=0.005$;

   и) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\sin x$, $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $\varepsilon=0.003$;

   к) $f(x)=x^2-2x+e^{-x}$, $[a,\ b]=[1,\ 1.5]$, $\varepsilon=0.001$.

3. Методом Фибоначчи найти точку минимума x_* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ с точностью ε и минимальное значение f_*:

   а) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$, $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $\varepsilon=0.1$;

   б) $f(x)=x^4+2x^2+4x+1$, $[a,\ b]=[-1,\ 0]$, $\varepsilon=0.1$;

   в) $f(x)=x^5-5x^3+10x^2-5x$, $[a,\ b]=[-3,\ -2]$, $\varepsilon=0.05$;

   г) $f(x)=x^2+3x(\ln x-1)$, $[a,\ b]=[0.5,\ 1]$, $\varepsilon=0.05$;

   д) $f(x)=x^2-2x-2\cos x$, $[a,\ b]=[0.5,\ 1]$, $\varepsilon=0.05$;

   е) $f(x)=(x+1)^4-2x^2$, $[a,\ b]=[-3,\ -2]$, $\varepsilon=0.03$;

ж) $f(x)=\sqrt{1+x^2}-e^{-2x}$, $[a,\ b]=[0,\ 1]$, $\varepsilon=0.1$;

з) $f(x)=3(5-x)^{\frac{4}{3}}+2x^2$, $[a,\ b]=[1.5,\ 2]$, $\varepsilon=0.025$;

и) $f(x)=-x^3+3(1+x)(\ln(1+x)-1)$, $[a,\ b]=[-0.5,\ 0.5]$, $\varepsilon=0.05$;

к) $f(x)=2+x^2+x^{\frac{2}{3}}-\ln\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)-2x\,\mathrm{arctg}\,x^{\frac{1}{3}}$, $[a,\ b]=[0.5,\ 1]$, $\varepsilon=0.025$.

3. Может ли применение методов сокращения отрезков поиска привести к неверному определению точки минимума x_*, если функция $f(x)$ не является унимодальной? Ответ пояснить иллюстрацией.

4. Оптимизация функции нескольких переменных

4.1. Необходимые и достаточные условия экстремума

Рассматривается задача безусловной оптимизации целевой функции $f(x): R^n \to R$ (без ограничений):

$$f(x) \to \underset{x \in R^n}{\text{extr}}.$$

Определение 4.1. Градиентом функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $x \in R^n$, в точке $x^* \in R^n$ называется вектор

$$\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n} \right).$$

Определение 4.2. Точка $x^* \in R^n$, в которой выполняются условия

$$\nabla f(x^*) = 0 \text{ или } \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i}, i = 1, 2, ..., n,$$

называется стационарной точкой функции $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорема 4.1 (необходимое условие экстремума 1-го порядка). Пусть функция $f(x): R^n \to R$ дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* — точка безусловного локального экстремума $f(x)$, то $\nabla f(x^*) = 0$.

Доказательство

Пусть для определенности x^* — точка локального максимума функции $f(x)$, то есть существует окрестность $U(x^*)$: $\forall x \in U(x^*) \Rightarrow f(x) \le f(x^*)$.

Докажем методом от противного. Предположим, что $\nabla f(x^*) \ne 0$. Тогда для всякого вектора $s = \alpha \cdot \nabla f(x^*)$, где $\alpha > 0$ такое, что $s \in U(x^*)$, имеем

$$(\nabla f(x^*), s) = (\nabla f(x^*), \alpha \cdot \nabla f(x^*)) = \alpha \left\| \nabla f(x^*) \right\|^2 > 0,$$

то есть вектор s определяет направление возрастания функции $f(x)$ в точке x^*, и следовательно, выполняется неравенство $f(x^* + \alpha s) > f(x^*)$ при достаточно малых $\alpha > 0$. Получили противоречие. Таким образом, $\nabla f(x^*) = 0$.

Определение 4.3. Пусть $A = (a_{ij}), i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — симметричная матрица размером $n \times n$. Матрица A называется положительно определенной, если для любого $h \in R^n$, $h \ne 0$, выполняется условие

$$(h, Ah) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j > 0.$$

Если $(h, Ah) < 0$, то матрица A — отрицательно определенная.

Если $(h, Ah) \ge 0$, то матрица A — неотрицательно определенная.

Если $(h, Ah) \le 0$, то матрица A — неположительно определенная.

Положительная (отрицательная) определенность матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) может быть установлена с помощью критерия Сильвестра.

Теорема 4.2 (критерий Сильвестра). Симметричная матрица A является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:

$$\det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Для отрицательной определенности матрицы A необходимо и достаточно выполнение условий:

$$(-1)^k \det A_k = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Теорема 4.3. Необходимым и достаточным условием неотрицательной определенности симметричной матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) является выполнение следующих $(2^n - 1)$ неравенств:

$$a_{11} \geq 0,\ a_{22} \geq 0,\ \dots,\ a_{nn} \geq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0,\ \dots,\ \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$\dots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Соответственно необходимым и достаточным условием неположительной определенности симметричной матрицы A (или квадратичной формы (h, Ah)) является выполнение следующих $(2^n - 1)$ неравенств:

$$a_{11} \leq 0,\ a_{22} \leq 0, \dots,\ a_{nn} \leq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0,\ \dots,\ \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0,$$

$$\ldots$$

$$(-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Теорема 4.4 (необходимое условие экстремума 2-го порядка). Пусть функция $f(x): R^n \to R$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если x^* — точка безусловного локального минимума функции $f(x)$, то матрица Гессе

$$H(x^*) = \left(\frac{\partial^2 f(x^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\,2,\,\ldots,\,n}$$

неотрицательно определенная.

Если x^* — точка безусловного локального максимума функции $f(x)$, то матрица Гессе $H(x^*)$ — неположительно определенная.

Достаточные условия экстремума

Теорема 4.5. Пусть функция $f(x): R^n \to R$ дважды дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Для того чтобы x^* являлась точкой безусловного локального минимума функции $f(x)$, достаточно:

— чтобы $\nabla f(x^*) = 0$;

— матрица Гессе $H(x^*)$ была положительно определенной.

Для того чтобы x^* являлась точкой безусловного локального максимума функции $f(x)$, достаточно:

— чтобы $\nabla f(x^*) = 0$;

— матрица Гессе $H(x^*)$ была отрицательно определенной.

Доказательство

Поскольку функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^*, то для любого $h=(h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n)\in R^n$ справедливо

$$f(x^*+h)=f(x^*)+(\nabla f(x^*),h)+\frac{1}{2}\Big(h, H(x^*)h\Big)+\alpha(h),$$

где $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{\alpha(h)}{\|h\|^2}=0.$

Учитывая условия теоремы 4.5, получим $(h, H(x^*)h)>0$ при $h\neq 0$,

$$f(x^*+h)-f(x^*)=\frac{1}{2}\Big(h, H(x^*)h\Big)+\alpha(h),$$

причем знак правой части равенства определяется знаком первого слагаемого $\frac{1}{2}\Big(h, H(x^*)h\Big)$ в некоторой окрестности точки x^*:

$$U_\delta(x^*)=\{x\in R^n : x=x^*+h, \|h\|<\delta\},$$

то есть имеем неравенство

$$f(x^*+h)-f(x^*)>0 \Rightarrow f(x^*+h)>f(x^*),$$

следовательно, x^* — точка безусловного локального минимума функции $f(x)$.

Теорема 4.6. Пусть x^* — стационарная точка функции $f(x): R^n\to R$, причем функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $x^*\in R^n$ и все вторые частные производные функции $f(x)$ непрерывны в точке x^*. Тогда:

— если второй дифференциал $d^2 f(x^*,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n)>0$ (сохраняет знак «плюс») $\forall\Delta x_i$ из окрестности точки x^*, то точка x^* — точка безусловного локального минимума функции $f(x)$;

— если $d^2 f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) < 0$ (сохраняет знак «минус») $\forall \Delta x_i$ из окрестности точки x^*, тогда точка x^* — точка безусловного локального максимума функции $f(x)$;

— если $d^2 f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)$ — знакопеременная функция $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, то есть принимает как положительные, так и отрицательные значения, то точка x^* не является точкой экстремума функции $f(x)$;

— если $d^2 f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \geq 0$ или $d^2 f(x^*, \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \leq 0$, причем существуют такие наборы значений $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, не равных одновременно нулю, для которых значение второго дифференциала обращается в нуль, то функция $f(x)$ в точке x^* может иметь экстремум, но может и не иметь его, в этом случае требуется дополнительное исследование.

Общая схема отыскания безусловного экстремума функции:

1. Найти точки возможного экстремума функции $f(x)$ (критические):
   — точки, в которых $\nabla f(x) = 0$ — стационарные точки функции $f(x)$;
   — точки, в которых частные производные $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$, не существуют.
2. Анализировать выполнение достаточных условий экстремума (по теореме 4.5 или теореме 4.6).
3. Вычислить $f_{\text{экстр}}(x)$.

Пример 4.1

Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \frac{1}{2(x_1 + x_2)}.$$

Решение

1. Определим градиент $\nabla f(x)$ функции $f(x)$:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) = \left(x_2 + \frac{1}{2(x_1+x_2)^2},\ x_1 + \frac{1}{2(x_1+x_2)^2} \right),$$

а также матрицу Гессе $H(x)$:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^3} & 1-\dfrac{1}{(x_1+x_2)^3} \\ 1-\dfrac{1}{(x_1+x_2)^3} & -\dfrac{1}{(x_1+x_2)^3} \end{pmatrix}.$$

Найдем стационарные точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, в которых может быть экстремум, используя необходимое условие экстремума (см. теорему 4.1):

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 + \dfrac{1}{2(x_1+x_2)^2} = 0, \\ x_1 + \dfrac{1}{2(x_1+x_2)^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + \frac{1}{8x_1^2} = 0 \Rightarrow x_1^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Нет точек, в которых частные производные функции $f(x)$ не существуют.

Таким образом, функция имеет одну критическую точку $x^* = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

2. Матрица Гессе $H(x_1, x_2)$ в точке $x^* = \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$H(x^*) = H\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку главный минор второго порядка матрицы $H(x^*)$

$$\det H_2(x^*) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0,$$

то матрица $H(x^*)$ не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, следовательно, экстремума в точке $x^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ нет.

Пример 4.2

Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2{}^2 - 2x_2).$$

Решение

1. Определим градиент $\nabla f(x)$ функции $f(x)$:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) = \left(e^{2x_1}(2x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 1),\ e^{2x_1}(2x_2 - 2)\right),$$

а также матрицу Гессе $H(x)$:

$$H(x) = H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} e^{2x_1}(4x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 4) & e^{2x_1}(4x_2 - 4) \\ e^{2x_1}(4x_2 - 4) & e^{2x_1}2 \end{pmatrix}$$

Найдем стационарные точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, в которых может быть экстремум, используя необходимое условие экстремума (см. теорему 4.1):

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{2x_1}(2x_1 + 2x_2^2 - 4x_2 + 1) = 0, \\ e^{2x_1}(2x_2 - 2) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$.

Нет точек, в которых частные производные функции $f(x)$ не существуют.

Таким образом, функция имеет одну критическую точку $x^* = \left(\frac{1}{2},\, 1\right)$.

2. Матрица Гессе $H(x_1,\, x_2)$ в точке $x^* = \left(\frac{1}{2},\, 1\right)$ имеет вид

$$H(x^*) = H\left(\frac{1}{2},\, 1\right) = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix}$$

Поскольку главный минор второго порядка матрицы $H(x^*)$

$$\det H_2(x^*) = \begin{vmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2e \end{vmatrix} = 4e^2 > 0,$$

главный минор первого порядка матрицы $H(x^*)$:

$$\det H_1(x^*) = 2e > 0,$$

то матрица $H(x^*)$ является положительно определенной. Следовательно, по теореме 4.5 в точке $x^* = \left(\frac{1}{2},\, 1\right)$ функция $f(x_1,\, x_2)$ имеет локальный минимум и принимает значение

$$f_{\min}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{e}{2}.$$

Пример 4.3

Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = f(x_1,\, x_2) = x_1^2 x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_2 + 1.$$

Решение

1. Определим градиент $\nabla f(x)$ функции $f(x)$:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x_1, x_2) = \left(2x_1 x_2^2 + x_1 + x_2, 2x_2 x_1^2 + x_2 + x_1\right),$$

а также матрицу Гессе $H(x)$:

$$H(x) = H(x_1,\ x_2) = \begin{pmatrix} 2x_2^2+1 & 4x_1x_2+1 \\ 4x_1x_2+1 & 2x_1^2+1 \end{pmatrix}$$

Найдем стационарные точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$, в которых может быть экстремум, используя необходимое условие экстремума (см. теорему 4.1):

$$\nabla f(x^*) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1x_2^2 + x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_2x_1^2 + x_2 + x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x_2^3 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.$$

Нет точек, в которых частные производные функции $f(x)$ не существуют.

Таким образом, функция имеет одну критическую точку $x^* = (0,\ 0)$.

2. Матрица Гессе $H(x_1,\ x_2)$ в точке $x^* = (0,\ 0)$ имеет вид

$$H(x^*) = H(0,\ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку главный минор второго порядка матрицы $H(x^*)$

$$\det H_2(x^*) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

а главный минор первого порядка матрицы $H(x^*)$

$$\det H_1(x^*) = 1 > 0,$$

то матрица $H(x^*)$ является неотрицательно определенной, достаточные условия экстремума не выполняются. Требуются дополнительные исследования.

3. Исследуем значения функции $f(x) = f(x_1, x_2)$.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_2 + 1 = (x_1 x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + 1,$$

значит, $f(x_1, x_2) > 1$, если $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$. Получили, что $f(x_1, x_2) > f(0, 0)$, следовательно, в точке $x^* = (0, 0)$ функция $f(x_1, x_2)$ имеет локальный минимум и принимает значение

$$f_{\min}(0, 0) = 1.$$

Контрольное задание

Исследовать на максимум и минимум следующие функции $f(x) = f(x_1, x_2)$:

а) $f(x) = f(x_1, x_2) = -x_1^{\ 2} - x_1 x_2 - x_2^{\ 2} + x_1 + x_2$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\ 3} + x_2^{\ 3} - 3a x_1 x_2$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{2x_1}(x_1 + x_2^{\ 2} + 2x_2)$;

г) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} - x_1 x_2 + x_2^{\ 2}$;

д) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} - x_1 x_2 - x_2^{\ 2}$;

е) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\ 2} - 2x_1 x_2 + 2x_2^{\ 2} + 2x_1$;

ж) $f(x) = f(x_1, x_2) = 2 - \sqrt[3]{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}$;

з) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\ 3} - 2x_2^{\ 3} - 3x_1 + 6x_2$;

и) $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{-(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})}(2x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2})$;

к) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \dfrac{1}{2(x_1 + x_2)}$.

4.2. Условный экстремум функции нескольких переменных

В подглаве 4.1 решался вопрос об отыскании локального экстремума функции, аргументы которой являются независимыми, то есть не связанными никакими дополнительными условиями. На практике же часто встречаются задачи об отыскании экстремумов функции, аргументы которой удовлетворяют определенным условиям связи (ограничениям). Такие экстремумы называются *условными.*

Рассматривается задача условной оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R^n$ (с ограничениями равенствами), где $X = \{x \in R^n : \varphi_j(x) = 0, j = 1, 2, ..., m\}$:

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}},$$

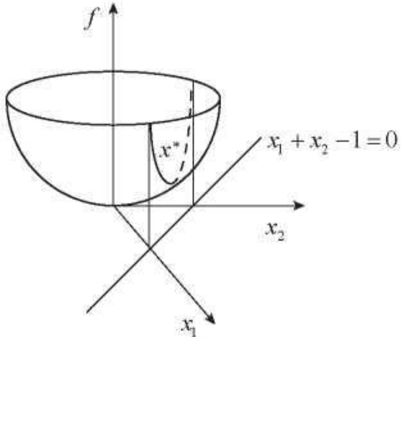
$\varphi_j(x) = 0$ — уравнения связи (условия) для переменных $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример 4.4

Исследовать на экстремум функцию $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ при условии $x_1 + x_2 = 1$.

Решение

Рассмотрим графический способ решения.



Точка $x^* = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ — точка условного минимума функции $f(x_1,\ x_2)$ на прямой $x_1 + x_2 = 1$.

Рассмотрим аналитический способ решения.

Благодаря уравнению связи исключим из функции $f(x_1,\ x_2)$ переменную $x_2 = 1 - x_1$, что сведет задачу к исследованию функции одной переменной:

$$f(x_1, x_2)\big|_{x_2 = 1 - x_1} = f(x_1) = x_1^{\,2} + (1 - x_1)^2 = 2x_1^{\,2} - 2x_1 + 1.$$

1. Найдем производную функции одной переменной $f(x_1)$:

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 4x_1 - 2,$$

а также критические точки функции $f(x_1)$:

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = 4x_1 - 2 = 0 \Rightarrow x_1^{\,*} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $x_1^{\,*} = \frac{1}{2}$ — точка возможного экстремума функции одной переменной.

2. Проверим достаточное условие экстремума функции одной переменной:

$$\frac{d^2 f(x_1^{\,*})}{dx_1^{\,2}} = 4 > 0.$$

Следовательно, $x_1^{\,*} = \frac{1}{2}$ — точка безусловного минимума для функции $f(x_1) = 2x_1^{\,2} - 2x_1 + 1$.

Соответствующая ей точка $x^* = \left(\frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{2}\right)$ — точка условного минимума функции $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}$ при условии $x_1 + x_2 = 1$.

Таким образом, задача нахождения условного экстремума сведена к задаче об отыскании обычного экстремума. Общий метод такого сведения — метод Лагранжа.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа является универсальным аналитическим методом отыскания условного экстремума.

Определение 4.4. Точка $x^* \in X$ называется точкой условного минимума для функции $f(x)$ при условиях связи $\varphi_j(x)=0$ $j=1, 2, \ldots, m$, если существует окрестность $U(x^*)$: $\forall x \in U(x^*): x \neq x^* \Rightarrow f(x^*) < f(x)$.

Точка $x^* \in X$ — точка условного максимума для функции $f(x)$ при условиях связи $\varphi_j(x)=0$ $j=1, 2, \ldots, m$, если существует окрестность $U(x^*)$: $\forall x \in U(x^*): x \neq x^* \Rightarrow f(x) < f(x^*)$.

Определение 4.5. Функцией Лагранжа, соответствующей функции $f(x)$ и m условиям связи $\varphi_j(x)=0$, $j=1, 2, \ldots, m$, называется функция

$$L(x;\lambda)=L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)=$$
$$=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где λ_j — множители Лагранжа.

Теорема 4.7 (о соответствии точек экстремума). Точке безусловного экстремума функции Лагранжа $L(x;\lambda)$ соответствует точка x^* — точка условного экстремума соответствующей функции $f(x)$ при m условиях связи $\varphi_j(x)=0$, $j=1, 2, \ldots, m$.

Общая схема отыскания условного экстремума

1. Построить функцию Лагранжа
   $L(x;\lambda)=L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$.

2. Найти точки возможного безусловного экстремума функции Лагранжа $L(x;\lambda)$ (критические):

— стационарные точки функции $L(x;\lambda)$, то есть точки (x^*, λ^*), являющиеся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_n} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial \lambda_m} = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial L(x;\lambda)}{\partial x_n} = 0, \\ \varphi_1(x) = 0, \\ \varphi_2(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x) = 0; \end{cases} \tag{4.1}$$

— точки, в которых частные производные $\dfrac{\partial L(x;\,\lambda)}{\partial x_i}$,

$\dfrac{\partial L(x;\,\lambda)}{\partial \lambda_j}$ при $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$ не существуют.

3. Проанализировать выполнение достаточных условий безусловного экстремума (по теореме 4.6 для функции Лагранжа $L(x;\,\lambda)$), то есть исследовать знак второго дифференциала $d^2L(x^*;\,\lambda^*)$ при условии, что $dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j(x^*)}{\partial x_i} dx_i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

при $dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + \ldots + dx_n{}^2 \neq 0$.

Пример 4.5

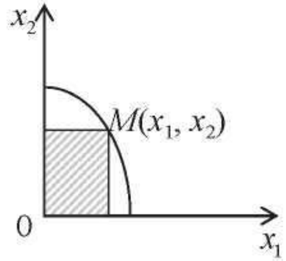
Фигура X ограничена линиями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0$. Вписать в X прямоугольник наибольшей площади.

Решение

Площадь вписанного в фигуру X прямоугольника $S(x)$:

$$S(x) = S(x_1,\ x_2) = x_1 x_2,$$

$x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0$ — условие связи для переменных $x_1,\ x_2$.



Требуется определить условный экстремум (максимум) функции $S(x)$ при условии $x_2 + x_1^2 - 6 = 0$. Для этого построим функцию Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_2 + x_1^2 - 6)$ и найдем стационарные точки $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ функции $L(x_1, x_2, \lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = x_2 + 2\lambda x_1, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = x_1 + \lambda, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = x_2 + x_1^2 - 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 2\lambda x_1 = 0, \\ x_1 + \lambda = 0, \\ x_2 + x_1^2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} x_1^* = \sqrt{2}, \\ x_2^* = 4, \\ \lambda^* = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Итак, $x^* = (\sqrt{2}, 4, -\sqrt{2})$ — стационарная точка для функции $L(x_1, x_2, \lambda)$.

Найдем второй дифференциал $d^2 L(x_1, x_2, \lambda)$ в произвольной точке:

$$d^2 L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2^2}(dx_2)^2 + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda^2}(d\lambda)^2 +$$

$$+2\left(\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda} dx_1 d\lambda + \frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial \lambda} dx_2 d\lambda \right).$$

Вычислим вторые производные функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ в любой точке:

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1^2} = 2\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2{}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1 \partial \lambda} = 2x_1,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2 \partial \lambda} = 1.$$

С учетом полученных результатов найдем второй дифференциал в стационарной точке $x^* = (\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$.

$$d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}(dx_1)^2 + 2(dx_1 dx_2 + 2\sqrt{2} dx_1 d\lambda + dx_2 d\lambda).$$

Учтем связь x_1 и x_2:

$x_2 + x_1{}^2 - 6 = 0$, $dx_2 + 2x_1 dx_1 = 0$ — в произвольной точке; в точке $(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$:

$$dx_2 = -2\sqrt{2} dx_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}(dx_1)^2 - 4\sqrt{2}(dx_1)^2 +$$
$$+ 4\sqrt{2} dx_1 d\lambda - 4\sqrt{2} dx_1 d\lambda = -6\sqrt{2}(dx_1)^2.$$

$d^2 L(\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}(dx_1)^2 < 0 \Rightarrow x^* = (\sqrt{2},\ 4,\ -\sqrt{2})$ — точка максимума функции Лагранжа.

По теореме о соответствии экстремумов (см. теорему 4.7) точка $(\sqrt{2},\ 4)$ — точка условного максимума функции $S(x_1,\ x_2)$.

Итак, прямоугольник имеет наибольшую площадь при $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = 4$.

Условный экстремум функции двух переменных

В случае функции двух переменных $f(x) = f(x_1,\ x_2)$ при уравнении связи $\varphi(x_1,\ x_2) = 0$ функция Лагранжа имеет вид

$$L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = f(x_1,\ x_2) + \lambda\varphi(x_1,\ x_2).$$

Система (4.1) состоит из трех уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,\ x_2;\ \lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1,\ x_2;\ \lambda)}{\partial x_2} = 0, \\ \varphi(x_1,\ x_2) = 0. \end{cases}$$

Пусть $x^* = (x_1^*,\ x_2^*)$, λ^* любое решение этой системы и

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_{x_1}(x^*,\ \lambda^*) & \varphi'_{x_2}(x^*,\ \lambda^*) \\ \varphi'_{x_1}(x^*,\ \lambda^*) & L''_{x_1x_1}(x^*,\ \lambda^*) & L''_{x_1x_2}(x^*,\ \lambda^*) \\ \varphi'_{x_2}(x^*,\ \lambda^*) & L''_{x_2x_1}(x^*,\ \lambda^*) & L''_{x_2x_2}(x^*,\ \lambda^*) \end{vmatrix}$$

Если $\Delta < 0$, то функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ имеет в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ условный максимум; если $\Delta > 0$, то функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ имеет в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ условный минимум; если $\Delta = 0$, то функция $f(x) = f(x_1, x_2)$ не имеет в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ условного экстремума.

Пример 4.6

Найти условные экстремумы функции $f(x) = f(x_1,\ x_2) = -2x_1x_2$ при условии $-x_1 + 2x_2 = 1$.

Решение

1. Функция $\varphi(x_1,\ x_2)$ имеет вид $\varphi(x_1,\ x_2) = -x_1 + 2x_2 - 1$. Построим функцию Лагранжа $L(x_1,\ x_2,\ \lambda) = -2x_1x_2 + \lambda\ (-x_1 + 2x_2 - 1)$.

2. Найдем ее стационарные точки $x^* = (x_1^*, x_2^*), \lambda^*$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = -2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = -2x_1 + 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = -x_1 + 2x_2 - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_2 - \lambda = 0, \\ -2x_1 + 2\lambda = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $x_2 = -\dfrac{\lambda}{2}$, из второго уравнения — $x_1 = \lambda$. Подставим x_1 и x_2 в третье уравнение: $-\lambda - 2\dfrac{\lambda}{2} = 1$, из которого получим

$$\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}.$$

Итак, существует единственная стационарная точка $x^* = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right), \lambda^* = -\dfrac{1}{2}$ для функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$.

3. Вычислим вторые производные функции Лагранжа $L(x_1, x_2, \lambda)$ в точке $x^* = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right), \lambda^* = -\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1^{\,2}} = 0, \ \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = -2, \ \frac{\partial^2 L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2^{\,2}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi(x^*)}{\partial x_1} = -1, \ \frac{\partial \varphi(x^*)}{\partial x_2} = 2.$$

Составим определитель Δ:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -(4+4) = -8 < 0.$$

Следовательно, точка $x^* = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ — точка условного максимума.

4. Вычислим $f_{\max} = f(x^*) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

Контрольное задание

Найти условные экстремумы функций:

а) $f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ при условии $x_1 + x_2 = 2$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{3}{x_2}$ при условии $3x_1 - x_2 = 6$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2{}^2$ при условии $x_1 + 2x_2 = 1$;

г) $f(x) = f(x_1, x_2) = 25x_1 x_2{}^2$ при условии $x_1 - 10x_2 = 1$;

д) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ при условии $x_1 + x_2 = 1$;

е) $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1 x_2$ при условии $x_1 + x_2 = -1$;

ж) $f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ при условии $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$;

з) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ при условии $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$;

и) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2$ при условии $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$;

к) $f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ при условии $4x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$.

4.3. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных в замкнутой области

Рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R^n$, где X — непусто и компактно (ограничено и замкнуто):

$$f(x) \to \underset{x \in X}{\text{extr}}. \tag{4.2}$$

Теорема Вейерштрасса, ее следствия и обобщения (теоремы 1.1–1.4) для непрерывных (или полунепрерывных) целевых функций определяют условия разрешимости задачи оптимизации. При выполнении этих условий требуется найти решение $x_0 \in X$ задачи (4.2).

Теорема 4.8. Если функция $f(x): X \subset R^n \to R$ дифференцируема в замкнутой ограниченной области $X \subset R^n$, то наибольшее $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ и наименьшее $\inf\limits_{x \in X} f(x)$ значения функции $f(x)$ на области X достигаются или в критических точках, или на границе области X.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$ в области $x \in X$ следует:

- найти критические точки внутри области X, вычислить в них значения функции $f(x)$;
- найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на границе области X;
- сравнить найденные значения и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Пример 4.7

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$ в области $X: x_1^2 + x_2^2 \le a^2$.

Решение

1. Найдем критические точки функции $f(x) = f(x_1, x_2)$ внутри области X.

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

Таким образом, функция $f(x_2, x_2) = e^{\%1 + x2}$ имеет одну критическую точку $M_2(0, 0)$ внутри области X.

Вычислим значение функции $f(x)$ в точке M_2:

$$f(M_2) = e^{0+0} = 1.$$

2. Найдем наибольшее /наиб $|_г$ и наименьшее $Л_{аим}$ $|_г$ значения функции $f(x)$ на границе Г области X.

$$Г: x^2 + x2 = a^2.$$

$$f(x)]_{xo}г^{e} \text{ Ю } -\text{^наиб} |г = /\text{наим} |г = ^{e}.$$

3. Сравнивая результаты пунктов 1 и 2, получим наибольшее значение функции$У_{наиб} = У_{наиб}$ $|_г$ $= e^{a}$, наименьшее значение функции /Наим $= f(0,0) = {}^2$.

Пример 4.8

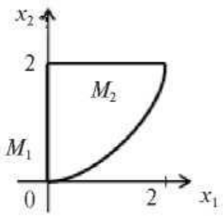
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = f(x_2, x_2) = 2x_2^3 - 6x_2 x_2 + 3x^2$ в области X, ограниченной осью Ox_2, прямой $x_2 = 2$ и параболой $x_2 = \frac{x^2}{2}$.

Решение

1. Найдем критические точки функции $f(x) = f(x_2, x_2)$ внутри области X:

$$Cf(xi, x2) = 0 \text{ Ю}$$

$$\text{Ю} \left\{ \begin{aligned} & xf - 6Ъ) = 6x^2 - 6x_2 = 0, \\ & \frac{\partial f(x_2 x)}{dx_2} = -6x_2 + 6x_2 = 0, \end{aligned} \right. \text{ Ю } M_1(0,0), M_2(1, 2).$$



Таким образом, функция $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - 6x_1x_2 + 3x_2^2$ имеет одну критическую точку $M_2(1, 1)$ внутри области X.

Вычислим значение функции $f(x)$ в точке M_2:

$$f(M_2) = f_1(1,1) = -1.$$

2. Рассмотрим поведение функции на границе области:

$$\text{а)} \begin{cases} x_2 \in [0,\ 2], \\ x_1 = 0, \\ f(0,\ x_2) = 3x_2^2 \text{ — возрастающая функция,} \end{cases}$$
$$f_2(0,\ 0) = 0;\ f_3(0,\ 2) = 12;$$

$$\text{б)} \begin{cases} x_1 \in [0,\ 2], \\ x_2 = 2, \\ f(x_1,\ 2) = 2x_1^3 - 12x_1 + 12, \end{cases}$$
$$\frac{df(x_1,\ 2)}{dx_1} = 6x_1^2 - 12 = 0;\ x_1 = \sqrt{2} \in [0,\ 2].$$

Найдем значения функции $f(x_1,\ 2)$ в точке $(\sqrt{2},\ 2)$ и в точке $(2,\ 2)$:

$$f_4(\sqrt{2},\ 2) = 12 - 8\sqrt{2};\ f_5(2,\ 2) = 4;$$

в) $\begin{cases} x_2 = \dfrac{x_1^2}{2}, \\ f\left(x_1,\ \dfrac{x_1^2}{2}\right) = \dfrac{3}{4}x_1^4 - x_1^3, \\ x \in [0,\ 2], \end{cases}$

$\dfrac{df}{dx} = 3x_1^3 - 3x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^{(1)} = 0,\ x_1^{(2)} = 1.$

$f_6\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}.$

3. Сравнивая полученные значения f_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, находим наибольшее значение функции $f_{\text{наиб}} = f_3(0,\ 2) = 12$, наименьшее значение функции $f_{\text{наим}} = f_1(1,\ 1) = -1$.

Пример 4.9

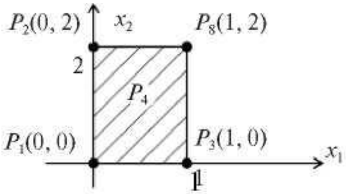
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1x_2 - x_1^2x_2 - \dfrac{x_1x_2^2}{2} - 3$ в области X: $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 2$.

Решение

1. Найдем критические точки функции $f(x) = f(x_1,\ x_2)$ внутри области X:

$$\nabla f(x_1,\ x_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1} = x_2 - 2x_1x_2 - \dfrac{x_2^2}{2} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_2} = x_1 - x_1^2 - x_1x_2 = 0. \end{cases}$$



Из первого уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x_2 = 0, \\ x_2 \neq 0 \Rightarrow 1 - 2x_1 - \dfrac{x_2}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = 2 - 4x_1. \end{array}\right.$$

Из второго уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ x_1 \neq 0 \Rightarrow 1 - x_1 - x_2 = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, возможны следующие варианты:

$$P_1(0,\ 0),\ P_2(0,\ 2),\ P_3(1,\ 0),\ P_4\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right).$$

Таким образом, функция $f(x_1,\ x_2) = x_1x_2 - x_1^2x_2 - \dfrac{x_1x_2^2}{2} - 3$ имеет одну критическую точку $P_4\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ внутри области X.

Вычислим значение функции $f(x)$ в точке P_4:

$$f(P_4) = f_1\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{4}{9} - 3 = -\frac{79}{27}.$$

2. Найдем критические точки функции на границе области X:

а) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 \in [0,\ 2], \\ f(0,\ x_2) = -3, \end{cases}$

$\dfrac{df(0,\ x_2)}{dx_2} = 0 \Rightarrow$ критические точки $P_5 = (0,\ 0)$, $P_6(0,\ 2)$;

б) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 \in [0,\ 2], \\ f(1,\ x_2) = -x_2^2 / 2 - 3, \end{cases}$

$\dfrac{df(1,\ x_2)}{dx_2} = -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow P_7(1,\ 0)$ и, кроме того, граничная точка $P_8(1,\ 2)$.

Найдем значения функции $f(1,\ x_2)$ в точке $(1,\ 0)$ и в точке $(1,\ 2)$:

$$f_2(1,\ 0) = -3;\ f_3(1,\ 2) = -5;$$

в) $\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 \in [0,\ 1], \\ f(x_1,\ 0) = -3, \end{cases}$

$\dfrac{df(x_1,\ 0)}{dx_1} = 0 \Rightarrow$ критические точки $P_9 = (0,\ 0)$, $P_{10}(1,\ 0)$;

г) $\begin{cases} x_2 = 2, \\ x_1 \in [0,\ 1], \\ f(x_1,\ 2) = -2x_1^2 - 3, \end{cases}$

$\dfrac{df(x_1,\ 2)}{dx_1} = -4x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow$ критическая точка $P_{11} = (0,\ 2)$.

Найдем значение функции $f(x_1, 2)$ в точке $(0, 2)$:

$$f_4(0, 2) = -3.$$

3. Сравнивая полученные значения f_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, находим наибольшее значение функции $f_{\text{наиб}} = f_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{79}{27}$, наименьшее значение функции $f_{\text{наим}} = f_3(1, 2) = -5$.

Контрольное задание

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = f(x_1, x_2)$ в области X:

а) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 - 3$,
$X: 0 \le x_1 \le 1, \quad 0 \le x_2 \le 1, \quad x_1 + x_2 \le 1$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2$, $X: x_1^2 + x_2^2 \le 25$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $X: x_1^2 + x_2^2 \le 1$;

г) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, $X: x_1^2 + x_2^2 \le 25$;

д) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2 + 5$, $X: x_1 \le 0, \quad x_2 \ge 0, \quad -x_1 + x_2 \le 1$;

е) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 - x_2$,
$X: x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_1 + x_2 \le 3$;

ж) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 x_2$, $X: 0 \le x_1 \le 2, \quad -1 \le x_2 \le 2$;

з) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - x_1^2 x_2 - 3$, $X: 0 \le x_1 \le 2, \quad 0 \le x_2 \le 1$;

и) $f(x) = f(x_1, x_2) = -8x_1^2 x_2 + 3$, $X: x_1^2 + x_2^2 \le 4$;

к) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 12x_1 - 16x_2 + 2$, $X: x_1^2 + x_2^2 \le 25$.

5. Численные методы минимизации функции нескольких переменных

5.1. Методы безусловной минимизации

Рассматривается задача безусловной минимизации целевой функции $f(x): R^n \to R$ (без ограничений):

$$f(x) \to \min_{x \in R^n}.$$

Идея методов приближенного решения поставленной задачи состоит в построении последовательности точек

$$x^{(0)},\ x^{(1)},\ \dots,\ x^{(k)},\ \dots,$$

удовлетворяющих условию

$$f(x^{(0)}) \geq f(x^{(1)}) \geq \dots \geq f(x^{(k)}) \geq \dots.$$

Такие последовательности $\{x^{(k)}\}$ называются *релаксационными*, а методы — *методами спуска*.

Общая схема метода спуска

Пусть $x^{(0)}$ — начальная точка. Последовательные приближения $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ определяют следующим образом:

— в точке $x^{(k)}$ выбирают направление спуска $y^{(k)} \in R^n$;

— находят $(k+1)$-е приближение по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} y^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\alpha^{(k)}$ — величина шага спуска.

Все методы спуска различаются:

— либо выбором направления спуска;

— либо способом движения вдоль направления спуска.

Основная задача при выборе параметров $\alpha^{(k)}$, $y^{(k)}$ каждого метода спуска — это обеспечение последовательного убывания значений целевой функции $f(x)$ в точках $x^{(k)}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 5.1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Тогда любой вектор $y \in R^n$, удовлетворяющий условию

$$(\nabla f(x^*), y) < 0, \tag{5.1}$$

определяет направление убывания функции $f(x)$ в точке x^*, то есть существует такое число $\alpha > 0$, что $f(x^* + \alpha y) < f(x^*)$.

Доказательство

Пусть $y \in R^n$ — произвольный вектор, удовлетворяющий условию (5.1). Тогда существует такое число $\alpha > 0$, что в α-окрестности точки x^* для дифференцируемой функции $f(x)$ справедливо разложение (в точке x^*)

$$f(x^* + \alpha y) - f(x^*) = (\nabla f(x^*), \alpha y) + r(\alpha y), \tag{5.2}$$

причем $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{r(\alpha y)}{\alpha \|y\|} = 0$.

Из условия (5.1) следует, что знак $f(x^* + \alpha y) - f(x^*)$ определяется первым слагаемым (в α-окрестности точки x^*) в выражении (5.2):

$$f(x^* + \alpha y) - f(x^*) < 0 \Rightarrow f(x^* + \alpha y) < f(x^*).$$

Замечание. Наибыстрейшее убывание функции $f(x)$ в точке x^* происходит в направлении вектора $y^* = -\nabla f(x^*)$ — антиградиента функции $f(x)$ в точке x^*.

Это свойство антиградиента функции $-\nabla f(x)$ легло в основу градиентных методов.

5.2. Метод градиентного спуска

Процедура построения последовательности $\{x^{(k)}\}$ организована следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} y^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$y^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}),$$

где величины шага спуска $\alpha^{(k)} > 0$ выбираются достаточно малыми для того, чтобы выполнялось условие последовательного убывания значений целевой функции $f(x)$ в точках $x^{(k)}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(x)$ ограничена снизу, дифференцируема на R^n и ее градиент $\nabla f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$:

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| \le L\|x' - x''\| \text{ для } \forall x', x'' \in R^n.$$

Тогда для любой начальной точки $x^{(0)}$ в итерационной процедуре:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha y^{(k)}, \tag{5.3}$$

$$y^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

можно выбрать такое число $\alpha > 0$, постоянное для всех k, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = 0,$$

причем последовательность $\{x^{(k)}\}$ будет релаксационной.

Замечание. Теорема 5.2 гарантирует сходимость последовательности $\{f(x^{(k)})\}$:

— либо к значению функции $f(x)$ в некоторой стационарной точке x^*;

— либо к точной нижней грани $\inf\{f(x): x \in R^n\}$, при этом не исключается случай, когда ничего определенного сказать о сходимости последовательности $\{x^{(k)}\}$ нельзя.

Теорема 5.3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 5.2 и существует постоянная C, такая что множество уровня

$$L(C) = \{x \in R^n : f(x) \le C\}$$

не пусто и компактно. Тогда для любой начальной точки $x^{(0)} \in L(C)$ последовательность $\{x^{(k)}\}$, определенная по формуле (5.3), будет релаксационной, причем каждая ее предельная точка x^* удовлетворяет $\nabla f(x^*) = 0$.

Следствие. Если дополнительно функция $f(x)$ выпукла, то всякая предельная точка последовательности $\{x^{(k)}\}$ будет точкой минимума функции $f(x)$ на R^n.

Приведем анализ метода градиентного спуска:

1. Итерационная процедура спуска (5.3) с постоянным шагом $\alpha = \text{const}$ проста, но при реализации требует знания величины шага α, которая на практике определяется подбором. При этом выбор большого шага α может привести к нарушению условия убывания целевой функции

$$f(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)} + \alpha y^{(k)}) < f(x^{(k)}). \tag{5.4}$$

С другой стороны, достаточно малый шаг обеспечит выполнение неравенства (5.4), но для достижения требуемой точности потребуется большое количество итераций. Поэтому сначала фиксируют некоторое значение шага спуска $\alpha > 0$ и производят вычисления по формуле (5.3). При этом если неравенство (5.4) не выполняется, то для текущей итерации величину шага спуска α уменьшают (*дробят*) до тех пор, пока условие убывания функции (5.4) не будет выполнено, и продолжают вычисления.

2. Условие окончания процедуры спуска. Выполняется требование на точность решения задачи минимизации, например

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon_1, \text{ или}$$

$$\left| f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) \right| \le \varepsilon_2,$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ — заданные заранее числа.

Учитывая условия (5.3), получим:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \alpha \left\| y^{(k)} \right\| = \alpha \left\| \nabla f(x^{(k)}) \right\|,$$

отсюда следует, что можно использовать в качестве условия окончания итерационной процедуры градиентного спуска неравенства:

$$\left| \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} \right| \le \varepsilon_3, \; i = 1,\ 2,\ \dots,\ n, \text{ или}$$

$$\left\| \nabla f(x^{(k)}) \right\| \le \varepsilon_3, \; \varepsilon_3 > 0.$$

3. Выбор решения. В качестве приближения для x^* принимается последняя вычисленная точка $x^{(k)}$. Тогда значение $f(x^{(k)})$ приближенно определяет величину $f^* = f(x^*)$.

Пример 5.1

Минимизировать целевую функцию

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + 2x_2^{\,2} + e^{x_1 + x_2},\; x \in R^2,$$

методом градиентного спуска, завершив расчет при

$$\left| \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i} \right| \le 0.05,\; i = 1, 2.$$

Решение

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = (0, 0)$ и величину шага спуска $\alpha = 1$, построим последовательность (5.3) (с дроблением шага спуска α), записывая результаты вычислений в таблицу.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2}$	α	Примечание
	0	0	1	1	1	1	
	–1	–1	3.145	–	–		Условие (5.4) нарушено. Уменьшим α в 2 раза
0	0	0	1	1	1	0.5	
	–0.5	–0.5	1.118	–	–		Условие (5.4) нарушено. Уменьшим α в 2 раза
	0	0	1	1	1	0.25	
1	–0.25	–0.25	0.794	0.106	–0.393	0.25	Условие (5.4) выполнено
2	–0.277	–0.152	0.774	0.098	0.045	0.25	Условие (5.4) выполнено
3	–0.301	–0.163	0.772	0.026	0.023	–	Точность достигнута

Следовательно, получим

$$x^* \approx x^{(3)} = (-0.301,\; -0.163),$$

$$f^* \approx f(-0.301,\; -0.163) = 0.772.$$

Контрольные задания

1. Совершить один шаг градиентного спуска из точки $x^{(0)}$ с шагом α и сравнить значения $f(x^{(0)})$ и $f(x^{(1)})$:

   а) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+e^{x_1+x_2}$, $x^{(0)}=(1,1)$, $\alpha=0.1$;

   б) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+e^{x_1+x_2}$, $x^{(0)}=(1,1)$, $\alpha=0.265$;

   в) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,2}+2x_2^{\,2}+e^{x_1+x_2}$, $x^{(0)}=(1,1)$, $\alpha=0.5$;

   г) $f(x)=f(x_1, x_2)=2x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1x_2+x_1+x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$, $\alpha=0.1$;

   д) $f(x)=f(x_1, x_2)=2x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1x_2+x_1+x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$, $\alpha=0.5$;

   е) $f(x)=f(x_1, x_2)=2x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_1x_2+x_1+x_2$, $x^{(0)}=(0,0)$, $\alpha=1$;

   ж) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,4}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_1x_2+x_2x_3$, $x^{(0)}=(0,1,0)$, $\alpha=0.1$;

   з) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,4}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_1x_2+x_2x_3$, $x^{(0)}=(0,1,0)$, $\alpha=0.638$;

   и) $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^{\,4}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_1x_2+x_2x_3$, $x^{(0)}=(0,1,0)$, $\alpha=10$;

   к) $f(x)=f(x_1, x_2)=e^{x_1^2}+(x_1+x_2+x_3)^2$, $x^{(0)}=(1,1,1)$, $\alpha=0.1$;

   л) $f(x)=f(x_1, x_2)=e^{x_1^2}+(x_1+x_2+x_3)^2$, $x^{(0)}=(1,1,1)$, $\alpha=0.21268$;

   м) $f(x)=f(x_1, x_2)=e^{x_1^2}+(x_1+x_2+x_3)^2$, $x^{(0)}=(1,1,1)$, $\alpha=1$.

2. Показать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(k)}$ и $\nabla f(x^{(k)})\neq 0$, то при достаточно малом шаге α из выражения (5.3) будет выполнено условие (5.4).

5.3. Метод наискорейшего спуска

Процедура построения последовательности $\{x^{(k)}\}$ организована следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} y^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$y^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)}).$$

В качестве величины шага спуска $\alpha^{(k)} > 0$ выбирают решение задачи одномерной минимизации:

$$g^{(k)}(\alpha^{(k)}) = \min_{\alpha>0} g^{(k)}(\alpha),\ g^{(k)}(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha y^{(k)}). \qquad (5.5)$$

Таким образом, в данном методе спуск производится в направлении наибыстрейшего убывания целевой функции и при этом с максимально возможным шагом.

Теорема 5.4. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 5.2. Тогда для любой начальной точки $x^{(0)}$ метод наискорейшего спуска приводит к построению последовательности $\{x^{(k)}\}$, удовлетворяющей $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = 0$.

Если $y^{(k)} \neq 0$, то задача минимизации (5.5) имеет решение лишь при $\alpha^{(k)} > 0$, так как

$$\left.\frac{dg^{(k)}(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial y^{(k)}} = (\nabla f(x^{(k)}), y^{(k)}) = -\left\|y^{(k)}\right\|^2 < 0,$$

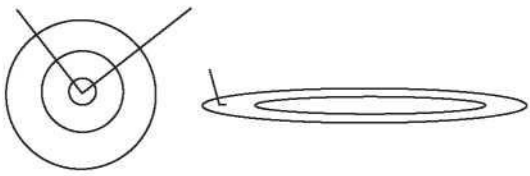
то есть при $\alpha^{(k)} > 0$ имеем уменьшение значения функции $f(x)$.

Пусть на k-м шаге метода наискорейшего спуска $\alpha^{(k)} > 0$ — решение задачи (5.5), тогда

$$\left.\frac{dg^{(k)}(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(k)}} = (\nabla f(x^{(k+1)}), y^{(k)}) = 0 \Rightarrow (y^{(k+1)},\ y^{(k)}) = 0.$$

Откуда следует, что направление спуска на $(k+1)$-й итерации ортогонально направлению спуска на предыдущей k-й итерации. Таким образом, кривая движения по методу наискорейшего спуска представляет собой ломаную, соседние звенья которой взаимно ортогональны.

Эффективность градиентных методов зависит от вида минимизируемой функции. Метод наискорейшего спуска сойдется за одну итерацию при любом начальном приближении для функции $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^2+x_2^2$ (см. рисунок ниже). Но сходимость будет очень медленной, например, в случае функции вида $f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^2+100x_2^2$. В тех ситуациях, когда линии уровня минимизируемой функции представляют собой прямолинейный или, хуже того, криволинейный «овраг», эффективность метода оказывается очень низкой.



Траектории спуска в зависимости от вида функций

Пример 5.2

Минимизировать целевую функцию

$$f(x)=f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2+e^{x_1+x_2},\ x\in R^2,$$

методом наискорейшего спуска, завершив вычисления при $\left|\dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right|\le 0.05,\ i=1,\ 2.$

Решение

Шаг 0. Положим начальное приближение $x^{(0)}=(0,0)$, тогда $\nabla f(x^{(0)})=(1,1)$,

$$g^{(0)}(a) = f(0 - 1a, 0 - 1a) = 3a^2 + e\ \sim^{2a}.$$

Для нахождения точки минимума $a^{(0)}$ функции $g^{(0)}(a)$ используем метод перебора:

a	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26
$g^{(0)}(a)$	0.795	0.790	0.789	0.791	0.797

то есть $a^{(0)} = 0.22$, откуда получим

$$x^{(1)} = (0,0) - 0.22 \bullet (1,1) = (-0.22, - 0.22).$$

Шаг 1. $Vf(x^{(1)}) = (0.204, - 0.236)$, $g^{(1)}(a) = (-0.22 - 0.204a)^2 +$

$(-0.22 + 0.236a)^2 + {}_e{-}^{0{,}44+0\ 032a}$ Минимизируем $g^{(1)}(a)$:

a	0.28	0.30	0.32	0.34	0.36
$g^{(1)}(a)$	0.77401	0.77384	0.77380	0.77387	0.77401

то есть $a^{(1)} = 0.32$, откуда получим

$x^{(2)} = (-0.22, - 0.22) - 0.32 \bullet (0.204, - 0.236) = (-0.2853, - 0.1445).$

Шаг 2. $Vf(x^{(2)}) = (0.08007, 0.07268)$, $g^{(2)}(a) = (-0.2853 - 0.08007a)^2$

$+ (-0.1445 - 0.07268a)^2 + {}_e{-}^{0}{-}^{429}{-}^{\circ}{-}^{15275a}$. Минимизируем $g^{(2)}(a)$:

a	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28
$g^{(2)}(a)$	0.77273	0.77241	0.77240	0.77241	0.77244

то есть $a^{(2)} = 0.24$, откуда получим $x^{(3)} = (-0.3045, - 0.1619)$,

$Vf(x^{(3)}) = (0.01821, - 0.02051)$, то есть требуемая точность достигнута.

Следовательно, получим:

$x^* \approx x^{(3)} = (-0.305,\ -0.162),\ f^* \approx f(-0.305,\ -0.162) = 0.772.$

Контрольное задание

1. Минимизировать функции $f(x) = f(x_1,\ x_2)$ методом наискорейшего спуска, заканчивая вычисления при $\left|\dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 0.01,\ i = 1, 2$:

   а) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 7x_1^{\ 2} + 2x_1x_2 + 5x_2^{\ 2} + x_1 - 10x_2;$

   б) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 3x_1^{\ 2} - 3x_1x_2 + 4x_2^{\ 2} - 2x_1 + x_2;$

   в) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 + 17x_2^{\ 2} + 5x_2;$

   г) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 5x_1^{\ 2} - 4x_1x_2 + 5x_2^{\ 2} - x_1 - x_2;$

   д) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 4x_1^{\ 2} + 4x_1x_2 + 6x_2^{\ 2} - 17x_1;$

   е) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 2x_1^{\ 2} - 2x_1x_2 + 3x_2^{\ 2} + x_1 - 3x_2;$

   ж) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = 10x_1^{\ 2} + 3x_1x_2 + x_2^{\ 2} + 10x_2;$

   з) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\ 2} - 2x_1x_2 + 6x_2^{\ 2} + x_1 - x_2;$

   и) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_1 + x_2;$

   к) $f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\ 2} + x_1x_2 + x_2^{\ 2}.$

5.4. Метод сопряженных градиентов

Процедура построения последовательности $\{x^{(k)}\}$ к точке минимума функции $f(x)$ организована следующим образом:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} p^{(k)},\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots, \tag{5.6}$$

$$p^{(0)} = \nabla f(x^{(0)}),\ p^{(k)} = \nabla f(x^{(k)}) + \beta^{(k)} p^{(k-1)},\ k = 1,\ 2,\ \dots. \tag{5.7}$$

В качестве величины шага спуска $\alpha^{(k)} > 0$ выбирают решение задачи одномерной минимизации:

$$g^{(k)}(\alpha^{(k)}) = \min_{\alpha>0} g^{(k)}(\alpha),\ g^{(k)}(\alpha) = f(x^{(k)} - \alpha p^{(k)}). \tag{5.8}$$

Параметр $\beta^{(k)}$ определяется по формуле

$$\beta^{(k)} = \frac{\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|^2}{\left\|\nabla f(x^{(k-1)})\right\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(k-1)})}{\partial x_i}^2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, метод сопряженных градиентов отличается от метода наискорейшего спуска только выбором направления спуска ($-p^{(k)}$ вместо $y^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$). При этом $p^{(k)}$ из выражения (5.7) определяется не только антиградиентом $-\nabla f(x^{(k)})$, но и направлением спуска $-p^{(k-1)}$ на предыдущем шаге. Это позволяет более полно, чем в градиентных методах, рассмотренных выше, учитывать особенности функции $f(x)$ при построении последовательных приближений (5.6) к ее точке минимума.

Теорема 5.5. Пусть функция $f(x)$ ограничена снизу и ее градиент $\nabla f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L > 0$:

$$\left\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\right\| \le L\left\|x' - x''\right\| \text{ для } \forall x', x'' \in R^n.$$

Тогда для последовательности $\{x^{(k)}\}$, построенной по формулам (5.6)–(5.8) справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| = 0.$$

Условием окончания итерационной процедуры метода сопряженных градиентов является выполнение требования на точность решения задачи минимизации:

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon_3,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \text{ или}$$

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| \le \varepsilon_3,\ \varepsilon_3 > 0.$$

Часто для уменьшения влияния накапливающихся погрешностей вычислений через каждые N итераций (5.6) полагают $\beta_{mN} = 0$, $m = 0,\ 1,\ \ldots$, то есть производят обновление метода (N — параметр алгоритма).

Пример 5.3

Минимизировать целевую функцию

$$f(x) = f(x_1,\ x_2) = x_1^{\ 2} + 2x_2^{\ 2},\ x \in R^2,$$

методом сопряженных градиентов, завершив вычисления при $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 0.03,\ i = 1, 2.$

Решение

Шаг 0. Положим начальное приближение $x^{(0)} = (1, 1)$, тогда

$$\nabla f(x^{(0)}) = (2, 4),\ p^{(0)} = \nabla f(x^{(0)}) = (2, 4),$$

$$g^{(0)}(\alpha) = f(1 - 2\alpha,\ 1 - 4\alpha) = 36\alpha^2 - 20\alpha + 3.$$

Для нахождения точки минимума $\alpha^{(0)}$ функции $g^{(0)}(\alpha)$ используем условие $\left.\frac{dg^{(0)}(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(0)}} = 0$, то есть $\alpha^{(0)} = \frac{5}{18}$.

Откуда $x^{(1)} = (1, 1) - \frac{5}{18}\cdot(2, 4) = \left(\frac{4}{9},\ -\frac{1}{9}\right)$.

Шаг 1. $\nabla f(x^{(1)}) = \left(\frac{8}{9},\ -\frac{4}{9}\right)$, $\beta^{(1)} = \frac{4}{81}$,

$p^{(1)} = \left(\frac{8}{9},\ -\frac{4}{9}\right) + \frac{4}{81}(2, 4) = \left(\frac{80}{81},\ -\frac{20}{81}\right)$,

$$g^{(1)}(\alpha)=\frac{800}{729}\alpha^2-\frac{80}{81}\alpha+\frac{2}{9}.$$

Минимизируем $g^{(1)}(\alpha)$ и получаем, что $\alpha^{(1)}=\frac{9}{20}$, откуда получаем

$$x^{(2)}=\left(\frac{4}{9},\ -\frac{1}{9}\right)-\frac{9}{20}\left(\frac{80}{81},\ -\frac{20}{81}\right)=(0,0).$$

$\nabla f(x^{(2)})=(0,0)$, требуемая точность достигнута.

Следовательно, получим

$$x^*\approx x^{(2)}=(0,0),\ f^*\approx f(0,0)=0.$$

Пример 5.4

Минимизировать целевую функцию

$$f(x)=f(x_1,\ x_2)=x_1{}^2+2x_2{}^2+x_1x_2-7x_1-7x_2,\ x\in R^2,$$

методом сопряженных градиентов, завершив вычисления при $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right|\le 0.05,\ i=1,2.$

Решение

Шаг 0. Положим начальное приближение $x^{(0)}=(0,0)$, тогда

$$\nabla f(x^{(0)})=(-7,\ -7),$$

$$p^{(0)}=\nabla f(x^{(0)})=(-7,\ -7),$$

$$g^{(0)}(\alpha)=f(0+7\alpha,\ 0+7\alpha)=98(2\alpha^2-\alpha).$$

Для нахождения точки минимума $\alpha^{(0)}$ функции $g^{(0)}(\alpha)$ используем условие $\left.\frac{dg^{(0)}(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha^{(0)}}=0$, то есть $\alpha^{(0)}=\frac{1}{4}$.

Откуда получим $x^{(1)}=(0,0)-\frac{1}{4}\cdot(-7,\ -7)=\left(\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right).$

Ш а г 1. $\nabla f(x^{(1)})=\left(-\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right), \beta^{(1)}=\frac{1}{16},$

$p^{(1)}=\left(-\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right)+\frac{1}{16}(-7,\ -7)=\left(-\frac{35}{16},\ \frac{21}{16}\right),$

$g^{(1)}(\alpha)=\frac{49}{32}\left(\frac{7}{2}\alpha^2-4\alpha-392\right).$

Минимизируем $g^{(1)}(\alpha)$ и получаем, что $\alpha^{(1)}=\frac{4}{7}$, откуда получим

$$x^{(2)}=\left(\frac{7}{4},\ \frac{7}{4}\right)-\frac{4}{7}\left(-\frac{35}{16},\ \frac{21}{16}\right)=(3,1).$$

$\nabla f(x^{(2)})=(0,0)$, то есть требуемая точность достигнута.

Следовательно, получим

$$x^{*}\approx x^{(2)}=(3,1),\ f^{*}\approx f(3,1)=-14.$$

Контрольные задания

1. Минимизировать функции $f(x)=f(x_1,\ x_2)$ методом сопряженных градиентов, заканчивая вычисления при $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right|\le 0.02,\ i=1,\ 2$:

а) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=7x_1^{\ 2}+2x_1x_2+5x_2^{\ 2}+x_1-10x_2;$

б) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=3x_1^{\ 2}-3x_1x_2+4x_2^{\ 2}-2x_1+x_2;$

в) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=x_1^{\ 2}+4x_1x_2+17x_2^{\ 2}+5x_2;$

г) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=5x_1^{\ 2}-4x_1x_2+5x_2^{\ 2}-x_1-x_2;$

д) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=4x_1^{\ 2}+4x_1x_2+6x_2^{\ 2}-17x_1;$

е) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=2x_1^{\ 2}-2x_1x_2+3x_2^{\ 2}+x_1-3x_2;$

ж) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=10x_1^{\ 2}+3x_1x_2+x_2^{\ 2}+10x_2;$

з) $f(x)=f(x_1,\ x_2)=x_1^{\ 2}-2x_1x_2+6x_2^{\ 2}+x_1-x_2;$

и) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_1 + x_2$;

к) $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + x_1 x_2 + x_2^{\,2}$.

2. Показать, что при обновлении метода сопряженных градиентов на каждом шаге (если $\beta^{(k)} = 0,\ k = 1, 2, \ldots$) он переходит в метод наискорейшего спуска.

5.5. Метод Ньютона

Основными преимуществами этого метода по сравнению с градиентными методами являются более высокая скорость сходимости, сохранение работоспособности при овражном характере минимизируемой функции.

Пусть известно приближение $x^{(k)} \in R^n$. Если целевая функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^n, то в окрестности точки $x^{(k)}$ справедливо разложение

$$f(x) = f^k(x) + r(x^{(k)},\ h),\ \text{причем}\ \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x^{(k)},\ h)}{\|h\|^2} = 0,$$

где $h = x - x^{(k)}$, через $f^k(x)$ обозначена следующая квадратичная функция:

$$f^k(x) = f(x^{(k)}) + (\nabla f(x^{(k)}),\ h) + \frac{1}{2}\left(h,\ H(x^{(k)})h\right).$$

Предположим, что матрица Гессе $H(x^{(k)})$ положительно определенная. В качестве очередной точки $x^{(k+1)}$ выберем точку глобального минимума квадратичной функции $f^k(x)$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}), \qquad (5.9)$$

причем

$$f^k(x^{(k+1)}) = f(x^{(k)}) - \frac{1}{2}\left(H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}),\ \nabla f(x^{(k)})\right).$$

Поскольку для любого $y \in R^n$, $y \neq 0$ справедливо $(y, H^{-1}y) > 0$, то $f^k(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$, причем $f^k(x^{(k)}) = f(x^{(k)})$, то есть вектор

$$h = x^{(k+1)} - x^{(k)} = -H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})$$

определяет направление убывания $f^k(x)$ в точке $x^{(k)}$, а также направление убывания и целевой функции $f(x)$:

$$f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)}) < 0. \tag{5.10}$$

Действительно,

$$\nabla f^k(x) = \nabla f(x^{(k)}) + H(x^{(k)})h \Rightarrow (\nabla f^k(x^{(k)}), h^{(k)}) = (\nabla f(x^{(k)}), h^{(k)}),$$

при этом $f^k(x^{(k+1)}) < f^k(x^{(k)})$, то есть $h^{(k)}$ — направление убывания $f^k(x)$ в точке $x^{(k)}$:

$$(\nabla f^k(x^{(k)}),\ h^{(k)}) < 0 \Rightarrow (\nabla f(x^{(k)}),\ h^{(k)}) < 0.$$

Неравенство (5.10) будет справедливо лишь для точки $x^{(k+1)}$, близкой к $x^{(k)}$.

Таким образом, формула (5.9) может быть использована для организации итерационного процесса (при некоторых ограничениях, обеспечивающих ее сходимость).

Теорема 5.6. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^n, x^* — стационарная точка функции $f(x)$, матрица Гессе $H(x^*)$ не вырожденная. Тогда существует такая окрестность точки x^*, что для любого начального приближения $x^{(0)}$ из этой окрестности последовательность $\{x^{(k)}\}$, построенная по формуле (5.9):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}),\ k = 0, 1, 2,\ \ldots,$$

сходится к x^*.

Таким образом, для любого $x^{(0)} \in U(x^*)$ получим последовательность $\{x^{(k)}\}$ (5.9), каждая предельная точка x^* которой удовлетворяет условию

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Итак, если начальное приближение $x^{(0)}$ выбрано достаточно близким к точке минимума функции $f(x)$, то последовательность, построенная по методу Ньютона (5.9), будет сходиться к этой точке. Однако, не зная положения точки минимума, такой выбор $x^{(0)}$ практически осуществить невозможно.

Анализ метода Ньютона

Приведем схему анализа метода Ньютона:

1. В общем случае процесс вычисления на каждой итерации матрицы вторых производных $H^{-1}(x^{(k)})$ и ее обращения требует значительных вычислительных затрат, что резко снижает эффективность применения метода Ньютона.
2. Сходимость процесса гарантируется, только если начальная точка $x^{(0)}$ достаточно близка к точке экстремума.
3. Условие окончания итерационной процедуры метода Ньютона — выполнение требования на точность решения задачи минимизации:

$$\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le \varepsilon_3,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ n, \text{ или}$$

$$\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\| \le \varepsilon_3,\ \varepsilon_3 > 0.$$

4. Выбор решения. В качестве приближения для x^* принимается последняя вычисленная точка $x^{(k)}$. Тогда значение $f(x^{(k)})$ приближенно определяет величину $f^* = f(x^*)$.

Пример 5.5

Найти точку минимума целевой функции $f(x) = \sqrt{(1+x^2)}$, $x \in R$.

Решение

Шаг 0. Выберем начальное приближение $x^{(0)} = c > 0$.

Вычислим первую и вторую производные функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \Rightarrow (f''(x))^{-1} = (1+x^2)^{3/2}.$$

Шаг 1. По формуле (5.9) вычислим $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - (f''(x^{(0)}))^{-1} f'(x^{(0)}) =$$

$$= c - (1+c^2)^{3/2} \frac{c}{\sqrt{(1+c^2)}} = c - c(1+c^2) = -c^3.$$

Шаг 2. Вычислим $x^{(2)}$:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - (f''(x^{(1)}))^{-1} f'(x^{(1)}) =$$

$$= -c^3 - (1+(-c^3)^2)^{3/2} \frac{-c^3}{\sqrt{(1+(-c^3)^2)}} =$$

$$= -c^3 + c^3(1+c^6) = c^9.$$

В итоге при соответствующем выборе начального приближения $x^{(0)}$:

— при $\left|x^{(0)}\right| < 1 \Rightarrow x^{(k)} \to x_{\min} = 0$;

— при $\left|x^{(0)}\right| = 1 \Rightarrow x^{(k)} = (-1)^k$;

— при $\left|x^{(0)}\right| > 1 \Rightarrow \left|x^{(k)}\right| \to \infty$.

Таким образом, в данном примере использование метода Ньютона при выборе начального приближения $x^{(0)} = c > 1$ приводит к построению последовательности $\{x^{(k)}\}$, удаляющейся от точки минимума.

Пример 5.6

Найти точку минимума функции

$$f(x)=f(x_1,\ x_2)=x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}+e^{x_1+x_2},\ x\in R^2,$$

методом Ньютона, выбрав в качестве начального приближения $x^{(0)}=(0.3012259,\ -0.1629096)$, с точностью $\left|\dfrac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right|\le 10^{-5}, i=1,2.$

Решение

Шаг 0. Начальное приближение $x^{(0)}$ = (–0.3012259, –0.1629096), тогда

$$\nabla f(x^{(0)})=(0.02622655,\ -0.02296005),$$

$$H(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0.39319151 & 0.62867835\\ 0.62867835 & 0.22329787\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $H^{-1}(x^{(0)})$:

$$H^{-1}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}0.39319151 & -0.053404226\\ -0.053404226 & 0.22329787\end{pmatrix}$$

Шаг 1. По формуле (5.9) вычислим $x^{(1)}$:

$$x^{(1)}=x^{(0)}-H^{-1}(x^{(0)})\cdot\nabla f(x^{(0)})=$$

$$=(-0.3012259,\ -0.1629096)-\begin{pmatrix}0.39319151 & -0.053404226\\ -0.053404226 & 0.22329787\end{pmatrix}\times$$

$$\times(0.02622655,\ -0.02296005)=(-0.3127641,\ -0.1563821).$$

$\nabla f(x^{(1)})=(7.9\cdot10^{-6},\ 7.9\cdot10^{-6})$, то есть требуемая точность достигнута.

Следовательно, получим

$$x^{*}\approx x^{(1)}=(-0.3127641,\ -0.1563821).$$

Метод Ньютона — Рафсона — это модифицированный метод Ньютона, позволяющий устранить его недостаток, как возможность несходимости последовательности $\{x^{(k)}\}$ (5.9) к точке x^*.

В методе Ньютона — Рафсона последовательность $\{x^{(k)}\}$ строится по формуле

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{-1}(x^{(k)}) \nabla f(x^{(k)}),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots. \qquad (5.11)$$

В качестве величины шага спуска $\alpha^{(k)} > 0$ выбирают решение задачи одномерной минимизации

$$g^{(k)}(\alpha^{(k)}) = \min_{\alpha>0} g^{(k)}(\alpha),$$
$$g^{(k)}(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})\right). \qquad (5.12)$$

Теорема 5.7. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на R^n, существуют такие числа $M \geq m > 0$, что выполняется неравенство:

$$m\|s\|^2 \leq (s, H(x)s) \leq M\|s\|^2 \text{ для } \forall x, s \in R^n,$$

где $H(x)$ — матрица Гессе. Тогда последовательность $\{x^{(k)}\}$, построенная по формулам (5.11), (5.12),

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - H^{-1}(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

сходится к точке минимума x^* независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

В качестве другой модификации метода Ньютона можно применять следующую итерационную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha^{(k)} H^{-1}(x^{(0)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (5.13)$$

где $\alpha^{(k)} > 0$ — решение задачи одномерной минимизации:

$$g^{(k)}(\alpha^{(k)}) = \min_{\alpha>0} g^{(k)}(\alpha),\ g^{(k)}(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha H^{-1}(x^{(0)}) \cdot \nabla f(x^{(k)})\right).$$

В этом случае для построения направления спуска используется один раз вычисленная и обращенная матрица вторых производных $H(x^{(0)})$. Если матрица $H(x^{(0)})$ положительно определенная, то итерационный процесс (5.13) является модификацией градиентного спуска и сходится независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$.

Контрольные задания

1. Показать, что точка минимума квадратичной функции может быть найдена с помощью одной итерации метода Ньютона из произвольного начального приближения $x^{(0)} \in R^n$.
2. Используя результат задания 1, показать, что для нахождения точки минимума квадратичной функции достаточно одной итерации метода Ньютона — Рафсона при произвольном начальном приближении $x^{(0)} \in R^n$.
3. Минимизировать функции $f(x) = f(x_1,\, x_2)$ с помощью одной итерации метода Ньютона:

   а) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 7x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + x_1 - 10x_2$;

   б) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 3x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + x_2$;

   в) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 17x_2^2 + 5x_2$;

   г) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 - x_2$;

   д) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 17x_1$;

   е) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1 - 3x_2$;

   ж) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = 10x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + 10x_2$;

   з) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$;

   и) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2$;

   к) $f(x) = f(x_1,\, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

4. Минимизировать функцию $f(x) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + x_4^{\ 2} - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4$ методом Ньютона, используя произвольное начальное приближение $x^{(0)} \in R^4$.
5. Минимизировать функцию $f(x) = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + 1} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$ методом Ньютона — Рафсона, выбрав произвольное начальное приближение $x^{(0)} \in R^2$, используя критерий точности решения $\left|\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_i}\right| \le 10^{-5}$, $i = 1, 2$.

6. Линейное программирование

6.1. Постановка задачи линейного программирования

Рассматривается задача оптимизации целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве $X \subset R^n$, причем функция $f(x)$ и система ограничений, определяющих множество X, линейны относительно переменных $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$:

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} a_{(l+1)1}x_1 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n \le b_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0.$$

В условии задачи линейного программирования могут содержаться неравенства и противоположного, чем в (6.2), знака, однако такие неравенства легко сводятся к виду (6.2) умножением на -1.

Определение 6.1. Если в условии задачи линейного программирования не содержатся ограничения-неравенства (6.2), то есть в (6.1) $l = m$, то она называется *задачей линейного программирования в каноническом виде*.

Вводя дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = l+1, \ldots, m$, ограничения-неравенства (6.2) можно записать в виде равенств

$$\begin{cases} a_{(l+1)1}x_1 + \ldots + a_{(l+1)n}x_n + x_{n+l+1} = b_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в каноническом виде

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min \tag{6.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.4}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0. \tag{6.5}$$

Задачу линейного программирования (6.3)–(6.5) можно записать в векторной форме

$$\begin{gathered} f(x) = (c,\ x) \to \min, \\ Ax = b, \\ x \geq 0, \end{gathered} \tag{6.6}$$

где $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ — вектор неизвестных, $c = (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)$ — вектор коэффициентов целевой функции из (6.3),

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов при неизвестных системы (6.4), $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ — вектор правых частей системы (6.4).

Задача $f(x) = (c, x) \to \max$ на множестве X может быть сведена к минимизации функции $-f(x) = (-c, x)$ на том же множестве X.

Градиент $\nabla f(x) = c$ указывает направление возрастания целевой функции $f(x) = (c, x)$. Тогда вектор антиградиент $-\nabla f(x) = -c$ — направление убывания функции $f(x)$.

Пример 6.1

Составить математическую модель следующей задачи об оптимальном производстве деталей.

Для изготовления деталей двух видов требуется проделать ряд операций на трех машинах. Время обработки одной детали первого типа на первой машине 11 минут, на второй — 7 минут, на третьей — 6 минут; время обработки одной детали второго типа соответственно 9, 12 и 16 минут на каждой из машин. В течение месяца первая машина работает 9850 минут, вторая — 8150 минут, третья — 9600 минут. Одна деталь первого типа приносит доход 900 условных единиц, второго типа — 1000 условных единиц. Сколько нужно ежемесячно производить деталей каждого типа, чтобы иметь максимальную общую прибыль?

Решение

Обозначим: x_1, x_2 — количество произведенных деталей первого и второго типа соответственно, очевидно, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Тогда время обработки деталей первого и второго типа на первой машине составит $11x_1 + 9x_2$ минут, причем время работы первой машины в течение месяца должно составлять 9850 минут, поэтому

$$11x_1 + 9x_2 = 9850.$$

Время обработки деталей первого и второго типа на второй машине составит $7x_1 + 12x_2$ минут, причем время работы второй машины в течение месяца должно составлять 8150 минут, поэтому

$$7x_1 + 12x_2 = 8150.$$

Время обработки деталей первого и второго типа на третьей машине составит $6x_1 + 16x_2$ минут, причем время работы третьей машины в течение месяца должно составлять 9600 минут, поэтому

$$6x_1 + 16x_2 = 9600.$$

Обозначим через f прибыль от производства деталей двух типов (общая прибыль), причем при изготовлении x_1, x_2 единиц продукции имеем

$$f = f(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2.$$

Таким образом, математическое описание задачи об оптимальном производстве деталей принимает вид

$$f(x_1, x_2) = 900x_1 + 1000x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 11x_1 + 9x_2 = 9850, \\ 7x_1 + 12x_2 = 8150, \\ 6x_1 + 16x_2 = 9600, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Пример 6.2

Составить математическое описание следующей задачи об оптимальном производстве продукции и представить полученную задачу линейного программирования в каноническом виде.

Для изготовления каждого из двух типов продукции A и B используются три вида сырья. Количество сырья первого вида, необходимое для изготовления единицы продукции типа A 8 кг, второго вида — 12 кг, третьего вида — 4 кг; количество сырья, необходимое для изготовления единицы продукции типа B соответственно 8, 6 и 12 кг каждого из видов. Общее количество сырья первого вида, которое может быть использовано, 2800 кг, второго вида — 3600 кг, третьего вида — 3200 кг. Единица продукции типа A приносит доход 24000 рублей, типа B — 16000 рублей. Определить максимально возможную прибыль при существующих запасах сырья и используемой технологии производства.

Решение

Обозначим: x_1, x_2 — количество произведенной продукции типа A и B соответственно, очевидно, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Тогда расход сырья первого вида составит $8x_1 + 8x_2$ килограммов, причем расход сырья первого вида не может быть больше имеющихся запасов сырья данного вида, поэтому

$$8x_1 + 8x_2 \leq 2800.$$

Расход сырья второго вида составит $12x_1 + 6x_2$ (кг), причем расход сырья второго вида не может быть больше имеющихся запасов сырья данного вида, поэтому

$$12x_1 + 6x_2 \leq 3600.$$

Расход сырья третьего вида составит $4x_1 + 12x_2$ килограммов, причем расход сырья третьего вида не может быть больше имеющихся запасов сырья данного вида, поэтому

$$4x_1 + 12x_2 \leq 3200.$$

Обозначим через f прибыль от производства продукции указанных типов, причем при производстве x_1, x_2 единиц продукции имеем:

$$f = f(x_1,\ x_2) = 24000x_1 + 16000x_2.$$

Таким образом, математическое описание задачи об оптимальном производстве продукции принимает вид

$$f(x_1, x_2) = 24000x_1 + 16000x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 350, \\ 2x_1 + x_2 \le 600, \\ x_1 + 3x_2 \le 800, \end{cases} \tag{6.7}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Запишем эту задачу линейного программирования в каноническом виде.

Ограничения (6.7) на переменные x_1, x_2 содержат 3 неравенства. Для преобразования их в ограничения-равенства введем 3 дополнительных неотрицательных переменных x_3, x_4, x_5. Прибавив переменные x_3, x_4, x_5 к левым частям соответствующих неравенств (6.7), получим задачу линейного программирования в каноническом виде

$$f(x_1, x_2) = 24000x_1 + 16000x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 350, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 600, \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 800, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Контрольные задания

Составить математическое описание задач оптимизации 1–6.

1. Свиноферма имеет возможность закупать от одного до трех различных видов зерна и готовит из него различные виды комбикормов. Зерновые культуры содержат различное количество ингредиентов. При этом в расчет принимаются ингредиенты A, B, C, D. Затраты на единицу веса зерна равны 41, 35 и 96 рублям для зерна первого, второго и третьего видов соответственно. В единице веса каждого из видов зерна содержится: ингредиента A — 2, 3 и 7 единиц; ингредиента B — 1, 1 и 0 единиц; ингредиента C — 5, 3 и 0 единиц; ингредиента D — 0.6, 0.25 и 1 единица. На плановый период для прокорма имеющегося поголовья свиней требуется, чтобы общее количество корма было не меньше 2800 единиц веса и в нем содержалось по весу не менее 1250, 250, 900 и 265 единиц веса ингредиентов A, B, C, D соответственно. Определить состав комбикорма, при котором его стоимость будет минимальна.
2. В цехе два токарных станка и один автомат. Требуется организовать производство деталей в комплектах. Один комплект состоит из одной детали первого типа, трех деталей второго типа и двух деталей третьего типа. Дневная производительность токарного станка: 50 деталей первого типа, или 40 деталей второго типа, или 80 деталей третьего типа. Для автомата эти производительности равны соответственно 120, 90 и 60. Составить программу работы оборудования в цехе, при которой будет производиться максимальное количество комплектов.
3. Завод выпускает радиоприемники трех различных моделей A, B и C. Каждое изделие приносит доход в размере 8, 15 и 25 условных единиц соответственно. Необходимо, чтобы завод выпускал за неделю не менее 100 приемников модели A, 150 приемников модели B и 75 приемни-

ков модели C. Каждая модель характеризуется определенным временем, необходимым для изготовления соответствующих деталей, сборки изделия и его упаковки. В расчете на 10 приемников модели A требуется 3 часа на изготовление соответствующих деталей, 4 часа на сборку и 1 час на упаковку. Соответствующие показатели в расчете на 10 приемников модели B равны 3.5, 5 и 1.5 часам; а на 10 приемников модели C равны 5, 8 и 3 часам. В течение недели завод может потратить на производство радиодеталей 150 часов, на сборку 200 часов и на упаковку 60 часов. Решить задачу оптимального производственного планирования.

4. Имеется 69 труб для отопительной сети по 1070 см каждая. Их необходимо разрезать на трубы по 130, 150 и 310 см. Найти такой вариант раскроя поступивших труб, при котором отходы были бы минимальны.
5. Необходимо изготовить на двух станках 2000 деталей. Так как второй станок производит более качественную продукцию, заказчик хотел бы иметь возможность использовать его, по крайней мере, в два раза чаще первого. Производительности станков равны: 1000 и 1500 деталей в сутки соответственно. Затраты на производство одной детали на первом станке 2 условные единицы, на втором — 5 условных единиц. Минимизировать суммарные расходы на производство.
6. Формируются поезда двух видов, отличающиеся по количеству вагонов различных типов. Всего имеется 4 типа вагонов: общие, плацкартные, купейные, спальные. Поезда первого вида содержат по 2 спальных вагона, по 4 купейных и по 6 плацкартных; поезда второго вида содержат по 3 купейных, 7 плацкартных и 4 общих вагона. В распоряжении имеется 10 спальных вагонов вместимостью 18 человек, 40 купейных вместимостью 36 человек, 114 плацкартных вместимостью 52 человека и 32 об-

щих вместимостью 72 человека. Определить количество поездов обоих видов, перевозящих максимальное число пассажиров.

7. Записать задачи линейного программирования в каноническом виде:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 \ge 6, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \max, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to \min, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - x_4 \le 5, \\ x_2 + x_3 \ge 10, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 \to \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ge 10, \\ -2x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \ge 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 7x_3 + 5x_4 \to \max, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 + 4x_4 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4 \ge 9, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_6 \to \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 \geq 6, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1, \\ 3x_1 - x_4 + x_5 - 3x_6 \leq 4, \\ 2x_1 - x_3 + x_5 + 4x_6 = 7, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_2 - x_3 \geq 0, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 \to \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_5 \geq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 1, \\ 3x_1 - 7x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 \leq 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1 + x_2 \to \min, \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 2; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1 - x_2 \to \max, \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

6.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Если задача линейного программирования содержит только две переменные и в ее условии нет ограничений-равенств (6.1), то такую задачу можно исследовать и решить графически.

Рассматривается задача линейного программирования

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min \tag{6.8}$$

при ограничениях

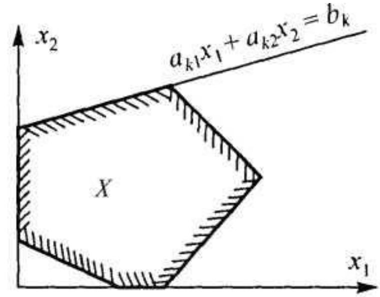
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{6.9}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{6.10}$$

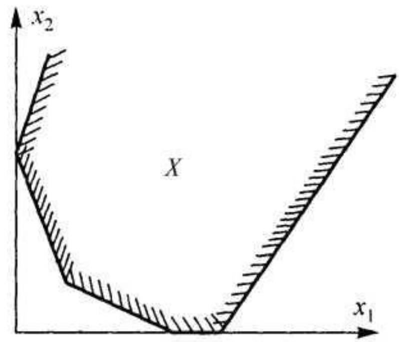
На плоскости $(x_1,\ x_2)$ любое из неравенств (6.9) определяет полуплоскость, лежащую по одну из сторон от прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$. Для того чтобы определить расположение этой полуплоскости относительно граничной прямой, можно подставить координаты какой-либо точки (при $b_i \ne 0$ проще всего взято начало координат) в соответствующее неравенство (6.9) и проверить его выполнение.

Таким образом, допустимое множество X задачи (6.8)–(6.10) является пересечением первого квадранта $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (6.9). Поэтому множество X представляет собой либо:

1) пустое множество, тогда задача (6.8)–(6.10) не имеет решений из-за несовместимости ограничений (6.9), (6.10);
2) многоугольник;



3) неограниченное многоугольное множество.



Для решения задачи (6.8)–(6.10) в случае $X \neq \varnothing$ рассмотрим семейство линий уровня функции $f(x)$ из (6.8):

$$c_1x_1 + c_2x_2 = C = \text{const}, \qquad (6.11)$$

которые являются параллельными прямыми. Антиградиент $-\nabla f(x) = (-c_1, -c_2) = e$ перпендикулярен прямым (6.11) и указывает направление убывания функции $f(x)$. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (6.11), проходящую через допустимое множество X, в направлении e убывания функции $f(x)$ до тех пор, пока эта прямая будет иметь

хотя бы одну общую точку с множеством X, то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества X, в которой целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение.

Пример 6.3

Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования

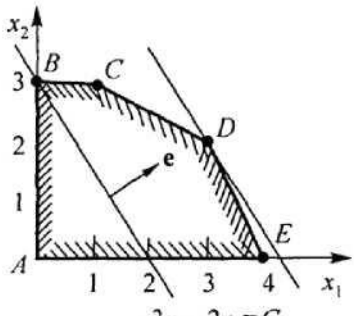
$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество X данной задачи (многоугольник $ABCDE$) и одну из линий уровня $-3x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.



Антиградиент $-\nabla f(x) = (3,\ 2) = e$ указывает направление убывания функции $f(x)$.

Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления e, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-3x_1 - 2x_2 = C$ проходит через вершину $D = (3,\ 2)$ многоугольника $ABCDE$. Поэтому целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение f^* в точке $x^* = (3,\ 2)$, причем

$$f^* = f(x^*) = f(3,\ 2) = -13.$$

Пример 6.4

Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования

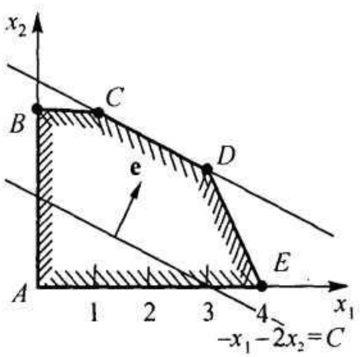
$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Изобразим на плоскости $(x_1,\ x_2)$ допустимое множество X данной задачи (многоугольник $ABCDE$) и одну из линий уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.



Антиградиент $-\nabla f(x) = (1,\ 2) = e$ указывает направление убывания функции $f(x)$.

Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления e, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-x_1 - 2x_2 = C$ содержит сторону CD многоугольника $ABCDE$. Таким образом, все точки отрезка $[C,\ D]$ являются точками минимума функции $f(x)$ на множестве X. Так как концы C и D этого отрезка имеют координаты (1, 3) и (3, 2) соответственно, то любая точка минимума $f(x)$ представима в виде

$$x^* = \lambda(1,\ 3) + (1-\lambda)(3,\ 2) = (3-2\lambda,\ 2+\lambda),\ \text{где}\ \lambda \in [0,\ 1].$$

Целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение f^* в точках x^*, причем

$$f^* = f(x^*) = -7.$$

Пример 6.5

Решить графическим методом задачу линейного программирования

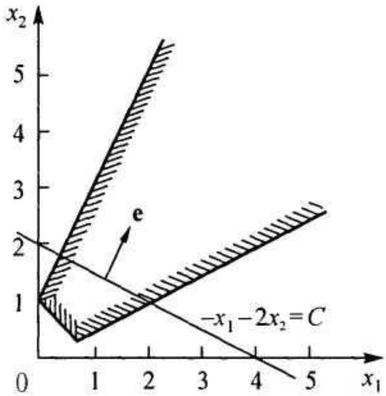
$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Изобразим на плоскости $(x_1,\ x_2)$ допустимое множество X данной задачи (неограниченное многоугольное множество) и одну из линий уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.



Антиградиент $-\nabla f(x)=(1,\ 2)=e$ указывает направление убывания функции $f(x)$.

При параллельном переносе линии уровня $-x_1-2x_2=C$ вдоль направления e она всегда пересекает множество X, а целевая функция $f(x)$ неограниченно убывает. Поэтому данная задача линейного программирования решений не имеет.

Пусть ранг r матрицы системы ограничений (6.4) (то есть матрицы A из (6.6)) равен рангу расширенной матрицы $(A|b)$ этой системы. Иначе система (6.4) несовместна и задача линейного программирования (6.3)–(6.5) не имеет решения, так как ее допустимое множество X пусто.

Выберем произвольный базисный минор матрицы A. Без ограничения общности будем считать, что этот минор порядка r соответствует первым r столбцам и строкам матрицы A. Если $r<m$, то уравнения (6.4) с номерами $i=r+1,\ \ldots,\ m$ являются следствиями остальных уравнений и их следует опустить. Поэтому считаем, что $r=m$.

Допустим, что $1\le n-m\le 2$. Тогда, считая переменные x_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, базисными, а остальные — свободными, решим систему (6.4), то есть выразим базисные переменные через свободные, после чего исключим базисные переменные из условия задачи (6.3)–(6.5). В результате получим задачу линейного программирования (6.8)–(6.10), эквивалентную исходной задаче и содержащую только свободные переменные исходной задачи, а их число не превосходит двух. Для решения полученной задачи можно использовать графический метод.

Пример 6.6

Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования

$$f(x) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6.$$

Решение

Матрица A ограничений-равенств имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ее ранг $r = 4 = m$, причем за базисный минор примем минор, образованный первыми четырьмя столбцами. Число свободных переменных

$$n - m = 6 - 4 = 2 \leq 2,$$

поэтому для решения задачи можно использовать графический метод.

Решая систему ограничений-равенств относительно базисных переменных x_j, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$, получим

$$\begin{cases} x_1 = -40 + x_5 + x_6, \\ x_2 = 50 - x_5, \\ x_3 = 30 - x_6, \\ x_4 = 60 - x_5 - x_6. \end{cases} \tag{6.12}$$

Исключая переменные x_j, $j=1,2,3,4$, из выражения для целевой функции, имеем

$$f(x) = 740 - 7x_5 + 7x_6. \tag{6.13}$$

Учитывая условия неотрицательности $x_j \ge 0$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ 6$, и равенства (6.12) и (6.13), получим следующую задачу линейного программирования:

$$f(x) = 740 - 7x_5 + 7x_6 \to \min,$$

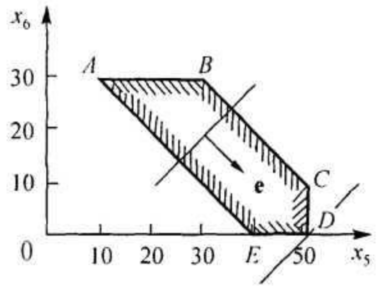
$$\begin{cases} x_5 + x_6 \ge 40, \\ x_5 \le 50, \\ x_6 \le 30, \\ x_5 + x_6 \le 60, \end{cases}$$

$$x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

Изобразим на плоскости $(x_5,\ x_6)$ допустимое множество X данной задачи (многоугольник $ABCDE$).

Антиградиент $-\nabla f(x) = (7,\ -7) = e$ указывает направление убывания функции $f(x)$.

Совершая параллельный перенос линии уровня $-7x_5 + 7x_6 = C$ функции $f(x)$ вдоль направления e, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая $-7x_5 + 7x_6 = C$ проходит через вершину $D = (50,\ 0)$ многоугольника $ABCDE$.



Подставив значения $x_5 = 50$, $x_6 = 0$ в равенства (6.12), находим

$$x^* = (10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0).$$

Следовательно, целевая функция $f(x)$ принимает минимальное значение f^* в точке $x^* = (10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0)$, причем

$$f^* = f(x^*) = f(10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0) = -390.$$

Контрольные задания

1. Решить графическим методом задачи линейного программирования:

$$\text{а) } \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \to \min, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$

в) $\begin{cases} -x_1 + x_2 \to \min, \\ 1 \le x_1 + x_2 \le 2, \\ 1 \le x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} -x_1 - x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge 2, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \to \min, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 3x_1 + 6x_2 \le 24, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \to \max, \\ -x_1 + x_2 \ge -1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

и) $\begin{cases} x_1 - x_2 \to \max, \\ 1 \le x_1 + x_2 \le 2, \\ 1 \le x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1,\ x_2 \ge 0; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \to \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$

2. Решить задачи линейного программирования в каноническом виде графическим методом:

а) $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \to \min, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ \dots,\ 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_4 + x_5 \to \min, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\ \dots,\ 6. \end{cases}$

6.3. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Рассматривается задача линейного программирования в каноническом виде

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \min \qquad (6.14)$$

при ограничениях, определяющих допустимое множество X,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (6.15)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0. \qquad (6.16)$$

Пусть ранг r матрицы $A = (a_{ij})$ системы ограничений равенств (6.15) задачи линейного программирования в каноническом виде равен рангу расширенной матрицы $(A|b)$ этой системы. Иначе система (6.15) несовместна и задача линейного программирования (6.14)–(6.16) не имеет решения, так как ее допустимое множество X пусто.

Выберем произвольный базисный минор матрицы A. Без ограничения общности будем считать, что этот минор порядка r соответствует первым r столбцам и строкам матрицы A. Если $r < m$, то уравнения (6.15) с номерами $i = r+1,\ \ldots,\ m$, являющиеся следствиями остальных уравнений системы, отбросим. Поэтому считаем в дальнейшем, что $r = m$.

Разрешим систему (6.15) относительно базисных переменных x_j, $j = 1,\ \ldots,\ m$. Для этого с помощью эквивалентных преобразований приведем систему (6.15) к виду

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}^{(0)} x_n = \beta_1^{(0)}, \\ x_2 + \alpha_{2m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}^{(0)} x_n = \beta_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + \alpha_{mm+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}^{(0)} x_n = \beta_m^{(0)}. \end{cases} \tag{6.17}$$

Отсюда общее решение системы (6.15) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1^{(0)} - \alpha_{1m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}^{(0)} x_n, \\ x_2 = \beta_2^{(0)} - \alpha_{2m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n}^{(0)} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m^{(0)} - \alpha_{mm+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}^{(0)} x_n, \end{cases} \tag{6.18}$$

где свободные переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ могут принимать произвольные значения.

Положим значения свободных переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$ равными нулю, тогда получим частное решение системы (6.15):

$$x_1 = \beta_1^{(0)},\ x_2 = \beta_2^{(0)},\ \ldots,\ x_m = \beta_m^{(0)},\ x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$

или

$$x^{(0)} = (\beta_1^{(0)},\ \beta_2^{(0)},\ \ldots,\ \beta_m^{(0)},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \tag{6.19}$$

которое будем называть *базисным решением* системы (6.15). Каждому выбору базисных переменных соответствует свое базисное решение системы (6.15).

Определение 6.2. Базисное решение (6.19) называется *допустимым базисным решением* системы (6.15) или *угловой точкой* допустимого множества X задачи линейного программирования (6.14)– (6.16), если все компоненты базисного решения (6.19) неотрицательны, то есть $\beta_i^{(0)} \geq 0$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$.

Определение 6.3. Допустимое базисное решение (6.19) называется *вырожденным* (*вырожденной угловой точкой*), а соответствующая задача линейного программирования — *вырожден-*

ной, если среди неотрицательных чисел $\beta_i^{(0)}$ в допустимом базисном решении (6.19) есть равные нулю.

В основе симплекс-метода лежит факт.

Если задача линейного программирования (6.14)–(6.16) разрешима, то минимум целевой функции $f(x)$ из уравнения (6.14) достигается хотя бы в одной из угловых точек допустимого множества X этой задачи.

Поскольку различные базисные решения системы (6.15) соответствуют различным способам выбора m базисных из общего числа n переменных x_j, то число допустимых базисных решений (угловых точек) не превышает $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Поэтому задачу линейного программирования можно решать методом перебора конечного числа угловых точек допустимого множества X, сравнивая значения целевой функции в этих точках. Однако при большой размерности n задачи линейного программирования это будет затруднительно. Идея симплекс-метода состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества X с последовательным уменьшением целевой функции $f(x)$.

Схема симплекс-метода

Предположим, что задача линейного программирования (6.14)–(6.16) является невырожденной, а базисное решение (6.19) — допустимым. Выразим целевую функцию $f(x)$ из выражения (6.14) через свободные переменные x_j, $j = m+1, \ldots, n$, используя соотношение (6.18):

$$f(x) = p_0^{(0)} + \sum_{j=m+1}^{n} p_j^{(0)} x_j, \tag{6.20}$$

$$p_0^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i^{(0)},\ p_j^{(0)} = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^{(0)},\ j = m+1, \ldots, n.$$

Случай 6.1. Если в выражении (6.20) все коэффициенты $p^{(0)}$, $j = m + 1$, ..., n, неотрицательны, то в угловой точке допустимого базисного решения (6.19) достигается минимум функции f (x) из выражения (6.14) на допустимом множестве X задачи (6.14)—(6.16) и этот минимум равен $p0^{0)}$.

Случай 6.2. Если в выражении (6.20) среди отрицательных коэффициентов $pj^{0)}$, j № 0, есть такой (например, $p,^{(0)}$), что в выражении (6.17) все коэффициенты $a^{(,0)} < 0$, $i = 1$, ..., m, то целевая функция f (x) не ограничена снизу на допустимом множестве X и задача (6.14)—(6.16) не имеет решений.

Случай 6.3. Если в выражении (6.20) хотя бы один из коэффициентов $p^{(0)}$, j № 0, отрицателен (например, $p^{(0)} < 0$) и при этом

среди коэффициентов $a^{(,0)}$ в выражении (6.17) есть хотя бы один положительный, то существует угловая точка $x^{(1)}$ множества X такая, что f $(x^{(1)}) < f$ $(x^{(0)})$.

В случаях 6.1 и 6.2 процесс решения задачи линейного программирования на этом заканчивается.

Рассмотрим случай 6.3. Пусть в выражении (6.20) коэффициент $p^{(0)} < 0$ и в выражении (6.17) имеются положительные коэффициенты $a^{(,0)}$, $i = 1$, ..., m. Найдем номер k базисной переменной из условия

в(°)   М в(°) Ь
-к=mi^{n}0 i-w Э,   (6.21)
-ы)   '4' >0 [ay j

где минимум берется по всем номерам $i = 1$, ..., m, для которых -<$^{0)} > 0$.

Найдем решение системы (6.15), полагая свободными переменные x^, ..., $x_{,-1}$, $x_к$, $x_{,+1}$, ..., $x_п$, то есть поменяв местами свободную переменную x_1 с базисной $x_к$. Система уравнений вида (6.17) в этом случае запишется следующим образом:

$$x_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{n} \left(\alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{\alpha_{il}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

$$i = 1, \ \ldots, \ m, i \neq k, \tag{6.22}$$

$$x_l + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{n} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_j + \frac{1}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

а зависимость целевой функции от новых свободных переменных имеет вид

$$f(x) = \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{n} \left(p_j^{(0)} - p_l^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} \right) x_j - \frac{p_l^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k + p_0^{(0)} + p_l^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}. \tag{6.23}$$

Компоненты нового базисного решения $x^{(1)}$ можно определить, приравняв нулю свободные переменные x_j, $j = m+1, \ \ldots, \ n, j \neq l, x_k$ и найдя при этом условии значения базисных переменных из выражения (6.22). Базисное решение $x^{(1)}$ является допустимым, то есть угловой точкой множества X, причем $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

По знакам коэффициентов в системе (6.22) и в выражении для целевой функции (6.23) можно получить один из трех случаев, приведенных выше, как это было сделано для угловой точки $x^{(0)}$. В случае 3 следует совершить переход к очередной угловой точке $x^{(2)}$, аналогичный переходу от $x^{(0)}$ к $x^{(1)}$ и т. д.

Поскольку число угловых точек допустимого множества X не превышает C_n^m, то случай 3 может повторяться конечное число раз, то есть в результате конечного числа шагов перехода к новой угловой точке будет либо найдено решение задачи, либо сделано заключение о том, что она не имеет решений.

Симплекс-таблицы

Реализация описанного выше симплекс-метода значительно упрощается при использовании симплекс-таблиц.

Записав коэффициенты уравнений (6.17) и целевой функции (6.20) соответствующим образом

	x_{m+1}	$\cdots$	x_l	$\cdots$	x_n	
x_1	$\alpha_{1m+1}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{1l}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{1n}^{(0)}$	$\beta_1^{(0)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$\alpha_{km+1}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{kl}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{kn}^{(0)}$	$\beta_k^{(0)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$\alpha_{mm+1}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{ml}^{(0)}$	$\cdots$	$\alpha_{mn}^{(0)}$	$\beta_m^{(0)}$
	$p_{m+1}^{(0)}$	$\cdots$	$p_l^{(0)}$	$\cdots$	$p_n^{(0)}$	$-p_0^{(0)}$

получим симплекс-таблицу задачи (6.14)–(6.16) для угловой точки $x^{(0)}$ из допустимого базисного решения (6.19).

Совершим переход от симплекс-таблицы, соответствующей угловой точке $x^{(0)}$, к симплекс-таблице для угловой точки $x^{(1)}$.

Пусть номера k и l найдены так, как это было сделано выше. Элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$, строка и столбец симплекс-таблицы, на пересечении которых он находится, называются *разрешающими* или *опорными*, а сам элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$ — *опорным* элементом симплекс-таблицы. Из формул (6.22) и (6.23) следует, что преобразование исходной симплекс-таблицы с опорным элементом $\alpha_{kl}^{(0)}$ приводит к новой симплекс-таблице

	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	
x_1	$\alpha_{1m+1}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{1k}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{1n}^{(1)}$	$\beta_1^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_l	$\alpha_{lm+1}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{lk}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{ln}^{(1)}$	$\beta_l^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$\alpha_{mm+1}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{mk}^{(1)}$	$\cdots$	$\alpha_{mn}^{(1)}$	$\beta_m^{(1)}$
	$p_{m+1}^{(1)}$	$\cdots$	$p_k^{(1)}$	$\cdots$	$p_n^{(1)}$	$-p_0^{(1)}$

для определения элементов которой необходимо выполнить следующие действия:

1. Поменять местами переменные x_k и x_l, остальные переменные таблицы оставить на прежних местах.
2. На место опорного элемента записать 1.
3. На остальных местах разрешающей строки поставить соответствующие элементы исходной таблицы.
4. На свободные места разрешающего столбца записать соответствующие элементы исходной таблицы, взятые со знаком минус.
5. На оставшихся свободных местах элементов $\alpha_{ij}^{(1)}$, $\beta_i^{(1)}$, $p_j^{(1)}$ в новой симплекс-таблице написать числа $\overline{\alpha}_{ij}$, $\overline{\beta}_i$, $\overline{p}_j$, найденные следующим образом:

$$\overline{\alpha}_{ij} = \alpha_{kl}^{(0)}\alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{kj}^{(0)}\alpha_{il}^{(0)},\ \overline{\beta}_i = \alpha_{kl}^{(0)}\beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)}\beta_k^{(0)},$$

$$\overline{p}_j = \alpha_{kl}^{(0)} p_j^{(0)} - \alpha_{kj}^{(0)} p_l^{(0)}.$$

6. Все полученные элементы новой таблицы разделить на опорный элемент $\alpha_{kl}^{(0)}$.

Пример 6.7

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, используя $x^{(0)}$ в качестве начальной угловой точки

$$f(x) = -5x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 - 5x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ \ldots,\ 5,\ x^{(0)} = (0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1).$$

Решение

Запишем расширенную матрицу $(A|b)$ системы ограничений-равенств данной задачи:

$$A|b=\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

Так как угловая точка $x^{(0)}=(0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1)$, то столбцы с номерами 3, 4 и 5 матрицы A системы ограничений-равенств задачи образуют базисный минор. С помощью эквивалентных преобразований приведем эту систему к виду системы (6.17), где базисными являются переменные x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} x_3-x_1-2x_2=1, \\ x_4+2x_1-3x_2=2, \\ x_5-x_1+5x_2=1. \end{cases} \tag{6.24}$$

Исключим с помощью системы уравнений (6.24) базисные переменные в выражении для целевой функции:

$$f(x)=-5x_1+18x_2-12\to\min. \tag{6.25}$$

С помощью равенств (6.24) и (6.25) составим симплекс-таблицу, соответствующую угловой точке $x^{(0)}=(0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1)$:

	x_1	x_2	
x_3	-1	-2	1
x_4	$\boxed{2}$	-3	2
x_5	-1	5	1
	-5	18	12

Среди коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j\neq 0$, из выражений (6.20) есть отрицательный — это элемент $p_1^{(0)}=-5$ последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $x^{(0)}=(0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1)$ не является решением задачи. Для отрицательного элемента $p_1^{(0)}=-5$ среди коэффициентов $\alpha_{i1}^{(0)}$ из выражения (6.17) (то есть элементов симплекс-таблицы, стоящих в столбце, что и $p_1^{(0)}$)

есть положительный, значит, возможен переход к новой угловой точке $x^{(1)}$ с меньшим значением целевой функции $f(x)$.

Найдем опорный элемент. Разрешающим столбцом симплекс-таблицы является столбец, соответствующий свободной переменной x_1. Разрешающая строка находится в соответствии с выражением (6.21): так как положительный элемент, стоящий в том же столбце, что и элемент $p_1^{(0)}$, единственный (это — $\alpha_{41}^{(0)} = 2$), то в качестве разрешающей строки берем строку таблицы, соответствующую базисной переменной x_4.

Итак, опорный элемент найден — в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполнив новую симплекс-таблицу по правилам, описанным выше, получим

	x_4	x_2	
x_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	2
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	2
	$\frac{5}{2}$	$\frac{21}{2}$	17

В этой симплекс-таблице оба коэффициента $p_j^{(1)}$, $j \neq 0$, в последней строке положительны. Поэтому угловая точка $x^{(1)}$, соответствующая свободным переменным x_4 и x_2, является точкой минимума целевой функции $f(x)$: $x^* = x^{(1)} = (1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 2)$. Минимальное значение $f(x)$ со знаком минус записано в правом нижнем углу симплекс-таблицы, поэтому $f^* = -17$.

Пример 6.8

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, используя $x^{(0)}$ в качестве начальной угловой точки,

$$f(x) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ \ldots,\ 5,\ x^{(0)} = (1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0).$$

Решение

Запишем расширенную матрицу $(A|b)$ системы ограничений-равенств данной задачи:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & -6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & -7 & 10 \\ -3 & 1 & 1 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Так как угловая точка $x^{(0)} = (1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0)$, то столбцы с номерами 1, 2 и 3 матрицы A системы ограничений-равенств задачи образуют базисный минор. С помощью эквивалентных преобразований приведем эту систему к виду выражения (6.17), где базисными являются переменные x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_2 - 5x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_3 + 2x_4 - x_5 = 2. \end{cases} \tag{6.26}$$

Исключим с помощью (6.26) базисные переменные в выражении для целевой функции:

$$f(x) = -3x_4 - 5 \to \min. \tag{6.27}$$

С помощью равенств (6.26) и (6.27) составим симплекс-таблицу, соответствующую угловой точке $x^{(0)} = (1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0)$:

	x_4	x_5	
x_1	$\boxed{1}$	-1	1
x_2	-5	-2	2
x_3	2	-1	2
	-3	0	5

Среди коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, из выражения (6.20) есть отрицательный — это элемент $p_4^{(0)} = -3$ последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $x^{(0)} = (1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0)$ не является решением задачи. Для отрицательного элемента $p_4^{(0)} = -3$ среди коэффициентов $\alpha_{i4}^{(0)}$ из выражения (6.17) (то есть элементов симплекс-таблицы, стоящих в столбце, что и $p_4^{(0)}$) есть положительные, значит, возможен переход к новой угловой точке $x^{(1)}$ с меньшим значением целевой функции $f(x)$.

Найдем опорный элемент. Разрешающим столбцом симплекс-таблицы является столбец, соответствующий свободной переменной x_4. Разрешающая строка находится в соответствии с выражением (6.21): так как $\min(1/1,\ 2/2) = 1/1 = 2/2$, то в качестве разрешающей строки можно взять любую из строк таблицы, соответствующих базисным переменным x_1 и x_3. Выберем, например, строку при базисной переменной x_1.

Итак, опорный элемент найден — в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполнив новую симплекс-таблицу по правилам, описанным выше, получим:

	x_1	x_5	
x_4	1	-1	1
x_2	5	-7	7
x_3	-2	$\boxed{1}$	0
	3	-3	8

Среди коэффициентов $p_j^{(1)}$, $j \neq 0$, есть отрицательный — это элемент $p_5^{(0)} = -3$ последней строки симплекс-таблицы. Следовательно, угловая точка $x^{(1)} = (0,\ 7,\ 0,\ 1,\ 0)$ не является решением задачи. Для отрицательного элемента $p_5^{(1)} = -3$ среди коэффициентов $\alpha_{i5}^{(1)}$ (то есть элементов симплекс-таблицы, стоящих в столбце, что и $p_5^{(1)}$) есть положительный, значит, возможен переход к новой угловой точке $x^{(2)}$ с меньшим значением целевой функции $f(x)$.

Найдем опорный элемент. Разрешающим столбцом симплекс-таблицы является столбец, соответствующий свободной переменной x_5. Разрешающая строка находится в соответствии с выражением (6.21): так как положительный элемент, стоящий в том же столбце, что и элемент $p_5^{(1)}$, единственный (это — $\alpha_{35}^{(1)} = 1$), то в качестве разрешающей строки берем строку таблицы, соответствующую базисной переменной x_3.

Итак, опорный элемент найден — в симплекс-таблице он обведен рамкой.

Заполнив новую симплекс-таблицу по правилам, описанным выше, получим:

	x_1	x_3	
x_4	-1	1	1
x_2	-9	7	7
x_5	-2	1	0
	-3	3	8

В этой симплекс-таблице среди коэффициентов $p_j^{(2)}$, $j \neq 0$, есть отрицательный — это элемент $p_1^{(2)} = -3$ последней строки симплекс-таблицы, причем для отрицательного элемента $p_1^{(2)} = -3$ все коэффициенты $\alpha_{i1}^{(2)}$ (то есть элементы симплекс-таблицы, стоящие в столбце, что и $p_1^{(2)}$) отрицательны, следовательно, целевая функция $f(x)$ не ограничена снизу на допустимом множестве и данная задача не имеет решений.

Контрольное задание

Решить симплекс-методом задачи линейного программирования:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min, \\ x_1 + x_4 - 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -6x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 \to \min, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \to \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} -4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5; \end{cases}$$

д) $\begin{cases} -2x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ \dots, \ 5; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \to \max, \\ x_1 + x_4 - 6x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ \dots, \ 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 6x_1 - x_3 + x_4 + 2x_5 \to \max, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ \dots, \ 5; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 10, \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \ \dots, \ 5; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 2x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ 5. \end{cases}$

Библиографический список

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. — Москва : Высшая школа, 2012.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — Москва : Наука, 1988.
3. Гончаров В. А. Методы оптимизации : учеб. пособие для студентов вузов / В. А. Гончаров. — Москва : Юрайт: Высшее образование, 2010.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — Москва : Высшая школа, 2011.
5. Карманов В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. — Москва : Наука, 2008.
6. Моисеев Н. Н. Методы оптимизации / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. П. Столярова. — Москва : Наука, 1980.
7. Ногин В. Д. Основы теории оптимизации / В. Д. Ногин, И. О. Протодьяконов, И. И. Евлампиев. — Москва : Высшая школа, 2000.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 3 / А. В. Ефимов [и др.]. — Москва : Физматлит, 2010.
9. Струченков В. И. Методы оптимизации. Основы теории, задачи, обучающие компьютерные программы / В. И. Струченков. — Москва : Экзамен, 2010.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. — Москва : Мир, 1975.
11. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — Москва : Физматгиз, 1963.

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Составители:
Мирземагомедова Мадина Миязуллаховна
Исабекова Тамила Илахидиновна

Редактор

Подписано в печать
Формат Бумага
Печать
Тираж   Заказ №

ИПЦ ДГТУ
367015 Махачкала, пр. Шамиля, 70