МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

АХМЕДОВ М.Э., ДЕМИРОВА А.Ф.

ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ (ГИДРОСТАТИКА, ГИДРОДИНАМИКА)

Махачкала 2020

ББК 36.81я73 А62
УДК 664.002.2(075.8)

Учебное пособие по процессам и аппаратам пищевых производств (Гидростатика и гидродинамика). - Махачкала: ДГТУ, 2020. – 123 с.

Учебное пособие по процессам и аппаратам пищевых производств включает краткие теоретические сведения, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и методические указания по выполнению лабораторных работ по двум разделам дисциплины: гидростатика и гидродинамика. Содержание и объем излагаемого материала соответствуют учебным программам по дисциплине: «Процессы и аппараты пищевых производств».

Основные теоретические сведения по рассматриваемым темам и решенные задачи будут полезны студентам при подготовке к аттестационным испытаниям и решении практических задач.

Предлагаемые задачи собраны по материалам ведущих вузов страны, из их опыта преподавания дисциплины и из собственного многолетнего опыта работы автора в этой области.

Практикум предназначен для студентов по направлениям подготовки: продукты питания из растительного сырья и технология продукции общественного питания

Составитель: д. т. н. Ахмедов М.Э.

Рецензенты: д.т.н., проф., зав каф. технологии мясных и рыбных продуктов ФГБОУВПО «Куб.ГТУ»
Касьянов Г.И.
д. с.-х. н., профессор каф. товароведения, технологии продуктов и общественного питания ФГБОУ ВПО «ДагГАУ»
Исригова Т.А.

Печатается по решению Ученого Совета ФГБОУ ВО «ДГТУ»

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

1.1 Краткие теоретические сведения

Жидкостью называется физическое тело, оказывающее сильное сопротивление изменению своего объема (в противоположность газам) и слабое сопротивление изменению своей формы (в противоположность твердым телам). Законы, уравнения и расчетные формулы гидравлики применимы для любого вещества, находящегося в жидком состоянии.

Жидкость обладает следующими свойствами.

1) Текучесть – свойство деформироваться под действием малой сдвигающей силы и принимать форму сосуда, в котором она находится.

2) Плотность жидкости представляет собой массу единицы объёма. Плотности жидкостей при атмосферном давлении и 20°С равны: для бензина 680-730 *кг/м*^{3}, нефти 760-995 *кг/м*^{3}, при атмосферном давлении и 0°С для воздуха 1,3 *кг/м*^{3}, кислорода 1,43 *кг/м*^{3}.

Плотность капельных жидкостей и газов зависит от температуры и давления. Зависимость плотности жидкости от температуры определяется по формуле:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1+\beta_t(t-t_0)}, \tag{1.1}$$

где: ρ и ρ_0 - плотности жидкости (газа) при температурах соответственно t и t_o °С,
β_t - коэффициент температурного расширения.

Плотность капельных жидкостей в зависимости от давления может быть определена по формуле:

$$\rho = \frac{\rho_1}{1-\beta_p(p-p_1)}, \tag{1.2}$$

где: ρ и ρ_1 - плотности жидкости при давлениях p и p_1,
β_p - коэффициент объемного сжатия.
В табл. 1 приведены значения плотности воды при разных температурах.

Таблица 1- Плотность воды при разных температурах

t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3	t °C	Плотность ρ, кг/м^3
0	999,87	40	992,24	50	988,07	60	983,24	70	977,81	80	971,83	90	965,34
		41	991,86	51	987,62	61	982,72	71	977,23	81	971,23	91	964,67
4	1000	42	991,47	52	987,15	62	982,2	72	976,66	82	970,57	92	963,99
		43	991,07	53	986,69	63	981,67	73	976,07	83	969,94	93	963,3
10	999,73	44	990,66	54	986,21	64	981,13	74	975,48	84	969,3	94	962,61
		45	990,25	55	985,73	65	980,59	75	974,89	85	968,65	95	961,92
20	998,23	46	989,4	56	985,25	66	980,05	76	974,29	86	968,0	96	961,22
		47	988,96	57	984,75	67	979,5	77	973,68	87	967,24	97	960,51
30	995,67	48	988,96	58	984,25	68	978,94	78	973,07	88	966,68	98	959,81
		49	988,52	59	983,75	69	978,38	79	972,45	89	966,01	99	959,09

3) Удельным весом жидкости (газа) называется вес единицы объёма: $\gamma = \rho g$.

4) Сжимаемость – свойство жидкости изменять объем при изменении давления – характеризуется коэффициентом объемного сжатия

$$\beta_p = -\frac{1}{W}\frac{\Delta W}{\Delta p} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta \rho}{\Delta p} = \frac{1}{E_{ж}}, \qquad (1.3)$$

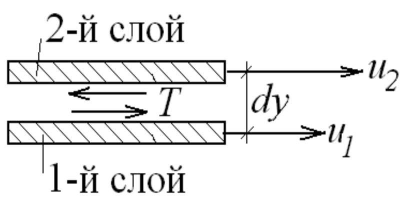
где ΔW, $\Delta \rho$ – изменение соответственно объема жидкости и плотности, вызванное изменением давления на величину Δp,
$E_{ж}$ – модуль объемной упругости жидкости,
W- первоначальный объем жидкости.

5) Температурное расширение жидкости характеризуется коэффициентом температурного расширения

$$\beta_t = \frac{1}{W}\frac{\Delta W}{\Delta t}, \qquad (1.4)$$

где ΔW– изменение объема жидкости, вызванное изменением температуры на величину Δt.

6) Вязкость представляет собой свойство жидкости оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) частиц жидкости. Согласно гипотезе Ньютона касательные напряжения, возникающие в жидкости при деформации сдвига между двумя соседними слоями жидкости, равны:



$$\tau = \frac{T}{s} = \pm \mu \frac{du}{dy}, \qquad (1.5)$$

где: T - сила трения между слоями движущейся жидкости,
s - площадь поверхности соприкосновения слоев движущейся жидкости,
du/dy - градиент скорости, $du \approx u_2 - u_1$,
u_2 и u_1 – соответственно скорости второго и первого слоев жидкости,
dy– расстояние между центрами двух соседних соприкасающихся слоев,
μ - коэффициент динамической вязкости жидкости, $\mu = \nu\rho$,
ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Размерность коэффициента динамической вязкости в системе единиц СИ: *Нс/м*^{2}, а коэффициента кинематической вязкости *м*^{2}*/с*. Коэффициент динамической вязкости чистой воды при атмосферном давлении и 20°С составляет 10^{-3} *Нс/м* (или 0,01 *пз),* коэффициент кинематической вязкости чистой воды составляет 10^{-6} *м*^{2}*/с* (или 0,01 *ст).*

Вязкость жидкости в значительной степени зависит от температуры и давления. При увеличении температуры капельной жидкости значение коэффициента её вязкости резко снижается: в десятки и сотни раз.

При выполнении инженерных расчетов можно воспользоваться следующими зависимостями:

- для воды

$$\nu_t = \frac{0{,}0177}{1 + 0{,}0337t + 0{,}00022t^2} \cdot 10^{-4}, \qquad (1.6)$$

- для воздуха

$$\nu_\text{t} = (0{,}132 + 0{,}000918t + 0{,}00000066t^2)10^4, \qquad (1.7)$$

- для смазочных масел и жидкостей, применяемых в машинах и гидросистемах:

$$\nu_t = \nu_{50}\left(\frac{50}{t}\right)^n, \qquad (1.8)$$

где ν_t, ν_{50} - коэффициенты кинематической вязкости жидкости соответственно при температуре t и 50°C,

n – показатель степени, $n = 0{,}434\ln\nu_{50} + 2{,}7$.

Вязкость жидкостей практически не зависит от давления, но значительно уменьшается с увеличением температуры. В таблице 2 приведены значения динамической вязкости воды при разных температурах.

Таблица 2 – Вязкость воды при разных температурах

t,°C	μ, Па.с	t, °C	μ, Па.с	t, °C	μ, Па.с	t, °C	μ, Па.с	t °C	μ, Па.с
0	0,00179	12	0,00124	24	0,00092	36	0,000706	48	0,000568
1	0,00173	13	0,0012	25	0,00089	37	0,000693	49	0,000558
2	0,00167	14	0,00117	26	0,00087	38	0,000679	50	0,000549
3	0,00162	15	0,00114	27	0,00086	39	0,000666	51	0,000541
4	0,00157	16	0,00112	28	0,00084	40	0,000654	52	0,000532
5	0,60152	17	0,00109	29	0,00082	41	0,000642	53	0,000524
6	0,00147	18	0,00106	30	0,0008	42	0,00063	54	0,000515
7	0,00143	19	0,00103	31	0,000783	43	0,000618	55	0.000507
8	0,00139	20	0,00101	32	0,000767	44	0,000608	56	0,000499
9	0,00135	21	0,00098	33	0,000751	45	0,000597	57	0,000492
10	0,00131	22	0,00096	34	0,000726	46	0,000587	58	0,000484
11	0,00127	23	0,00094	35	0,000721	47	0,000577	59	0,000477

Газы обладают несравнимо более низкими коэффициентами динамической вязкости от 0,0000084 до 0,0000192 *Нс/м*^{2} и в отличие от капельных жидкостей вязкость газов увеличивается при увеличении температуры. Зависимость вязкости газа от давления ничем не отличается от аналогичной зависимости для капельных жидкостей.

7) Поверхностное натяжение. **С**илы взаимодействия между молекулами жидкости внутри объёма взаимно уравновешены, а на границе с сосудом силы взаимодействия молекул воды и молекул материала стенки в общем случае могут оказаться не равными. Тогда в пограничном слое

жидкости возникают напряжения, которые автоматически балансируют не сбалансированные силы притяжения. Такие напряжения называются поверхностным натяжением жидкости, им будут соответствовать силы поверхностного натяжения. Под действием этих сил малые объёмы жидкости принимают сферическую форму (форму капли), соответствующую минимуму внутренней энергии.

Если поверхность жидкости представляет собой сферу или ее часть радиусом r, то дополнительное давление, придающее жидкости эту форму, равно:

$$p = \frac{2\sigma}{r}, \tag{1.9}$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, для воды σ = 0,073 Н/м на границе вода-воздух при атмосферном давлении и t = 20^{o}С. При изменении температуры жидкости от t_0 до t

$$\sigma = \sigma_0 - \beta_t(t - t_0).$$

В трубках малого диаметра d жидкость поднимается для смачивающейся жидкости (или опустится для несмачивающейся) на некоторую капиллярную высоту

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{2\sigma}{\rho g r}, \tag{1.10}$$

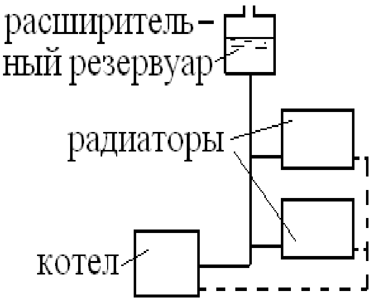
где $r = d/2$ – радиус трубки (капилляра).

1.2 Примеры решения задач

Задача 1.1. Канистра, заполненная бензином, нагрелась на солнце до температуры 50°С. На сколько повысилось бы давление бензина внутри канистры, если она была бы абсолютно жесткой? Начальная температура бензина 20°С. Модуль объемной упругости бензина E = 1300 *МПа*, коэффициент температурного расширения $\beta_t = 0{,}0008 \mathit{град}^{-1}$.

Решение. Изменение температуры бензина Δt = 50 – 20 = 30°С. Плотность бензина при 20^{o}С из [8-14 и др.] ρ_{20} = 730 кг/м^3, а при температуре 50 ^{o}С из формулы (1.1) $\rho_{50} = \dfrac{730}{1 + 0{,}0008(50 - 20)} = 712{,}9$ кг/м^3. Изменение плотности бензина $\Delta\rho$=730 – 712,9 = 17,1 кг/м^3. Далее согласно закону Гука (1.3) $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\Delta\rho}{\Delta p} = \dfrac{1}{E}$, откуда искомое изменение давления в канистре $\Delta p = E \cdot \Delta\rho / \rho_{20}$ = 1300·17,1/730 = 30.45 МПа.

Задача 1.2. Для периодического аккумулирования дополнительного объема воды, получаемого при увеличении температуры, к системе отопления в верхней ее точке присоединяют расширительный резервуар, сообщающийся с атмосферой. Объем воды в системе (котел, радиаторы и трубы) до начала нагревания при температуре 20°С составляет W = 0,55 $м^3$. Определить наименьший объем расширительного резервуара при нагревании воды до 90°С.



Решение. 1-й способ. Из [8-14 и др.] найдем плотности воды при температурах 20°С и 90°С: ρ_{20} = 998 кг/м^3, ρ_{90} = 965 $кг$/м^3.

При 20°С масса воды в системе $m = \rho_{20} \cdot W$ = 998·0,55 = 548,9 $кг$. Эта масса при 90°С займет объем $W_{90} = m/\rho_{90}$ =548,9/965 = 0,569 $м^3$. Емкость расширительного бака должна быть более $W_{бака} \geq$ 0,569 - 0,55 = 0,019 $м^3$ = 19 $л$.

2-й способ. Из [8-14 и др.] найдем коэффициент температурного расширения воды при нормальном давлении 0,1 $МПа$ для средней температуры (90+20)/2 = 55°С $\beta_{55} \approx 4{,}9 \cdot 10^{-4} град^{-1}$.

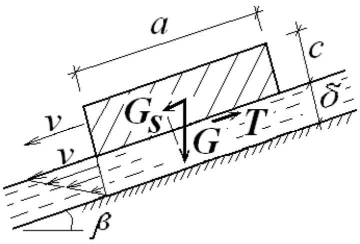
Из формулы для определения коэффициента температурного расширения (1.4) найдем увеличение объема воды, вызванное увеличением ее температуры на Δt = 90 – 20 = 70°С:

$$\Delta W = \beta_t W \cdot \Delta t = 4{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}55 \cdot (90 - 20) \approx 0{,}019 м^3 = 19 л.$$

Расширительный бак должен быть не менее данного объема или в процентном отношении не менее 0,019/0,55 ·100% = 3,5% от объема воды в системе.

Задача 1.3. Определить скорость равномерного скольжения v прямоугольной пластины размерами axbxc= 250x125x17мм по наклонной плоскости под углом $\beta = 8^o$, если между пластиной и плоскостью находится слой касторового масла толщиной δ = 1,4 мм с температурой t = 40°. Плотность материала пластины ρ = 1300 кг/м^3.

Решение. Масса пластины
$m = \rho \cdot a \cdot b \cdot c$ = 1300·0,250·0,125·0,017 = 0,69 кг, а вес $G = mg$ = 0,69·9,81 = 6,77 Н. Сила трения между пластиной и маслом T при равномерном движении должна равняться проекции силы тяжести G на направление движения: $G_s = T$, где $G_s = G\sin\beta$. Силу трения определим из формулы Ньютона:



$$T = \nu_{40} \rho_{40} (a \cdot b) \frac{du}{\delta}.$$

Из-за малой величины толщины δ распределение скоростей внутри слоя масла примем прямолинейным, тогда изменение скорости в пределах слоя масла $du \approx v - 0 = v$. По [8-14 и др.] значения коэффициента кинематической вязкости касторового масла при температуре 40°C ν_{40} = 3.5 Ст = $3{,}5 \cdot 10^{-4}$ м²/с и плотности при температуре 20°C ρ_{20} = 960 кг/м³. При значении коэффициента температурного расширения $\beta_t = 7 \cdot 10^{-4}$град$^{-1}$ плотность масла при 40°C

$$\rho_{40} = \frac{960}{1 + 7 \cdot 10^{-4}(40 - 20)} = 946{,}7 \text{ кг/м}^3.$$

Подставим в условие $G_s = T$ найденные значения:

$$6{,}77 \cdot \sin 8^\circ = 3{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 946{,}7 \cdot (0{,}250 \cdot 0{,}125) \cdot v/0{,}0014,$$

откуда искомая скорость v = 0,13 м/с.

Задача 1.4. Определить высоту подъема воды в стеклянном капилляре диаметром $d = 0{,}001 м$ при температуре воды $t_1 = 20°C$ и $t_2 = 80°C$.

Решение. Из [9-14 и др.] найдем плотность воды при температуре $t_1 = 20°C$ $\rho_1 = 998 кг/м^3$, а при $t_2 = 80°C$ $\rho_2 = 972 кг/м^3$, коэффициент температурного расширения воды $\beta_t = 15 \cdot 10^{-5} \frac{1}{c}$, поверхностное натяжение при $t_2 = 20°C$ $\sigma_{20} = 0{,}073 н/м$. Поверхностное натяжение при изменении температуры на Δt равно: $\sigma_t = \sigma_{20} - \beta_t \cdot \Delta t$,

при $\Delta t = 80° - 20° = 60°$ C $\sigma_{80°} = 0{,}00726 - 15 \cdot 10^{-5} \cdot 60 = 0{,}063 \frac{н}{м}$.

Высота капиллярного поднятия по (1.10) при температуре 20°C

$$h_{кап} = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0{,}073}{998 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}001/2)} = 0{,}029 м = 2{,}9 см,$$

а при t = 80°C $h_{кап} = \frac{2 \cdot 0{,}063}{972 \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}001/2)} = 0{,}026 м = 2{,}6 см$.

Задача 1.5. Определить изменение скорости распространения звука в покоящейся воде при изменении ее температуры от 10 до 30°C.

Решение. Скорость распространения звука в покоящейся жидкости определяется по формуле

$$c = \sqrt{E_Ж / \rho}.$$

По [8-14 и др.] при t =10°C модуль объемной упругости воды $E_ж$ = $20{,}3 \cdot 10^8$ Па, плотность ρ =1000 кг/м³, тогда

$$c_{10} = \sqrt{20{,}3 \cdot 10^8 / 1000} = 1424{,}8 \text{ м/с}.$$

При t = 30°C $E_ж$= $19{,}5 \cdot 10^8$ Па, ρ = 996 кг/м³,

$$c_{30} = \sqrt{19{,}5 \cdot 10^8 / 996} = 1399{,}23 \text{ м/с}.$$

Таким образом, с увеличением температуры жидкости скорость распространения звука в ней уменьшается.

Задача 1.6. Рассчитать объем резервуара, вмещающего 127 *кН* глицерина, при возможном ее нагревании с 20 до 300^oC.

Решение. По [8-14 и др.] находим плотность глицерина при t = 20^{o}C ρ = 1245 *кг/м*^{3}. При этой температуре глицерин занимает объем $V=\frac{m}{\rho}=\frac{G}{\rho g}=\frac{127\cdot 10^3}{1245\cdot 9{,}81}=10{,}4 м^3$. Объем резервуара, необходимый при нагревании глицерина до 300^{o}C, обозначим V_1, а приращения $\Delta t=t_1-t$ = 300 – 20 = 280^{o}C и $\Delta V=V_1-V$. Зная справочное значение коэффициента температурного расширения глицерина $\beta_t = 0{,}5\cdot 10^{-3}$ град$^{-1}$, искомый объем найдем из формулы для определения коэффициента температурного расширения $V_1=V(1+\beta_t\Delta t)= 10{,}4(1+0{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 280) = 11{,}9$ м^3.

Задача 1.7. Как изменятся плотность воды и объемный вес на экваторе и Северном полюсе.

Решение. Примем среднегодовые температуры на полюсе 0^{o}C и на экваторе 40^{o}C. По [8-14 и др.] плотности воды при этих температурах равны: ρ_0 = 999,89 кг/м^3, ρ_{40} = 992,2 кг/м^3. Найдем отношение ρ_{40}/ρ_0 = 992,2/999,89 = 0,99. Значит, плотность воды на экваторе меньше в 0,99 раза, чем на полюсе.

Значения ускорения силы тяжести равны: на экваторе $g_э$ = 9,781 *м/с*^{2}, а на северном полюсе $g_п$ = 9,831 *м/с*^{2}, тогда объемный вес воды на экваторе $\gamma_э = g_э\cdot \rho_{40}$ = 992,2 · 9,781 = 9704,7 *Н/м*^{3}, а на северном полюсе $\gamma_п = g_п\cdot \rho_0$ = 9,831· 9,831 = 9829,72 *Н/м*^{3}. Отношение $\gamma_э/\gamma_п$ = 9704,7/9829,72 = 0,987.

Задача 1.8. Разность скоростей между двумя соседними слоями жидкости толщиной $dy = 0{,}02 мм$ равна $du = 0{,}0072 м/ч$. Рассматриваемая жидкость имеет коэффициент динамической вязкости $\mu = 13{,}04\cdot 10^{-4}\frac{Нс}{м^2}$. Определить тангенциальное напряжение и силу трения на 1 м^2 поверхности между слоями жидкости.

Решение. Градиент скорости

$$\frac{du}{dy}=\frac{0{,}0072\cdot 1000}{3600\cdot 0{,}02}=0{,}1C^{-1}.$$

Сила трения между слоями жидкости из формулы Ньютона

$$T=\mu s\frac{du}{dy}=13{,}04\cdot 10^{-4}\cdot 1\cdot 0{,}1=13{,}04\cdot 10^{-5}\,Н.$$

Тангенциальное (касательное) напряжение

$$\tau=\frac{T}{s}=\frac{13{,}04\cdot 10^{-5}}{1}=13{,}04\cdot 10^{-5}\,н/м^2$$

Задача 1.9. Определить среднюю толщину $\delta_{отл}$ солевых отложений в герметичном водоводе внутренним диаметром d = 0,3 *м* и длиной l = 2 *км.* При выпуске воды в количестве ΔW = 0,05 $м^3$ давление в водоводе падает на величину Δp = 10^6 *Па*. Отложения солей по диаметру и длине трубы распределены равномерно.

Решение. По [8-14 и др.] находим коэффициент объемного сжатия воды $\beta_p = \frac{1}{2 \cdot 10^9} Па$. Объем воды в трубе с отложениями найдем из обобщенного закона Гука (1.3) $W = \frac{\Delta W}{\beta_p \cdot \Delta p} = \frac{0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^9}{1 \cdot 10^6} = 100\,м^3$. Средний внутренний диаметр водовода с отложениями

$$d_{отл} = \sqrt{\frac{4W}{\pi l}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100}{3{,}14 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 0{,}252\,м\,.$$

Средняя толщина отложений

$$\delta_{отл} = \frac{d - d_{отл}}{2} = \frac{0{,}3 - 0{,}252}{2} = 0{,}024\,м = 24\,мм\,.$$

Задача 1.10. Определить давление внутри капли воды диаметром d = 0,001 м, которое создают силы поверхностного натяжения. Температура воды t = 20°С.

Решение. Поверхностное натяжение для воды, соприкасающейся с воздухом, при температуре t = 20°С σ = 0,0726 Н/м. Радиус капли $r = d/2$ = 0,0005 м. Искомое давление внутри капли определим по формуле Лапласа для криволинейных поверхностей (1.9):

$$p = 2\sigma/r = 2 \cdot 0{,}0726/0{,}0005 = 290{,}4 \text{ Па}.$$

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.11. Каким максимальным количеством бензина можно заправить бак машины объемом 40 л, если в момент заправки температура бензина составляет 20°С, а за день температура может подняться до 50°С.

Задача 1.12. Пять литров нефти весит G = 42,5 Н. Определить удельный вес γ и плотность ρ нефти.

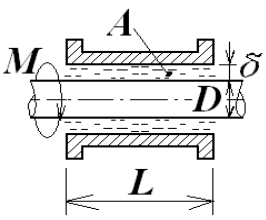
Задача 1.13. Определить плотность воды на дне океана на глубине 10 км, зная плотность морской воды на поверхности ρ = 1030 кг/м^3 и модуль объемной упругости $E_ж = 2 \cdot 10^3$ МПа.

Задача 1.14. В сосуд, заполненный водой ($\rho_в$ = 1000 *кг/м*^{3}) и маслом ($\rho_м$ = 900 *кг/м*^{3}), погружен кусок воска ($\rho_{вс}$ = 960 *кг/м*^{3}). Определить: какая часть объема воска погрузится в воду, а какая часть останется в масле.

Задача 1.15. Определить напряжение трения на стенке, обтекаемого потоком воздуха, если известно, что на расстоянии 0,5 мм от стенки скорость равна 19 м/с.

Задача 1.16. Чему равно касательное напряжение в текущем керосине, если поперечный градиент скорости ее слоев составляет 100 1/с.

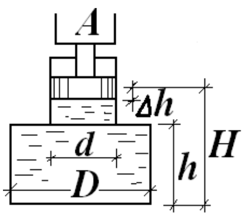
Задача 1.17. Зазор *A* между валом и втулкой заполнен трансформаторным маслом. Длина втулки L = 650 мм. К валу диаметром D = 250 мм приложен вращающий момент M = 1,8 Н·м. При вращении вала масло постепенно нагревается и скорость вращения увеличивается. Определить частоту вращения вала при температуре масла t = 56°С.



Задача 1.18. Изменение кинематической вязкости нефтепродуктов от температуры t можно определить формулой $\nu = \nu_0 \exp(-ut)$, где ν_0 - кинематическая вязкость при t = 0°С. Измерениями найдено, что при t_1 = 3°С ν_1 = 3,6 Ст, а при t_2 = 10°С ν_2 =2,1 Ст. Определить: постоянные ν_0 и u, входящие в формулу, и кинематическую вязкость жидкости при t_2 = 6°С.

Задача 1.19. Определить давление, при котором начальный объем масла «индустриальное 20» уменьшится на 3%.

Задача 1.20. Определить модуль объемной упругости жидкости, если под действием груза A массой 250 кг поршень прошел расстояние Δh = 5 мм. Начальная высота поршня без груза H = 1,5 м, диаметры поршня d = 80 мм и D = 300 мм, высота резервуара h = 1,3 м. Весом поршня пренебречь. Резервуар считать абсолютно жестким.



Задача 1.21. Определить динамический коэффициент вязкости индустриального масла «12» при температуре 67 °С.

Задача 1.22. Определить объем цистерны, содержащей 34 т масла АМГ-10. Какое количество масла марки «турбинное 57» войдет в эту цистерну?

2. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА

2.1 Краткие теоретические сведения

Сжимающие напряжения, возникающие в покоящейся жидкости под действием внешних сил, называют гидростатическим давлением.

Гидростатическое давление

$$p = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta \omega}, \qquad (2.1)$$

где ΔF – нормальная сжимающая сила, приложенная к площади $\Delta\omega$.

В системе СИ давление измеряется в Па. Применяются и другие единицы. Так, одна техническая атмосфера 1 ат = 98100 Па = 735,6 мм.рт.ст. = 10 м.вод.ст. = 0,981 бар.

Гидростатическое давление обладает следующими свойствами:

– гидростатическое давление всегда направлено по внутренней нормали к поверхности действия;

– гидростатическое давление действует по всем направлениям одинаково;

– гидростатическое давление является функцией координат.

Величина гидростатического давления определяется из дифференциального уравнения для покоящейся жидкости:

$$f_x dx + f_y\, dy + f_z\, dz = dp/\rho, \qquad (2.2)$$

где ρ – плотность жидкости,

p – абсолютное давление в любой точке жидкости,

f_x, f_y, f_z - проекции плотности распределения массовых сил на соответствующие оси координат.

Для случая абсолютного покоя жидкости, когда из массовых сил на жидкость действует только сила тяжести, $f_x = f_y = 0$, $f_z = -g$, интегрирование (2.2) позволит получить основное уравнение гидростатики (рисунок 2.1):

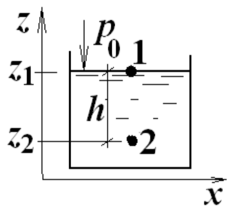


Рисунок 2.1

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \text{ или } p = p_0 + \rho g h, \qquad (2.3)$$

где z_1, z_2 – ординаты точек 1 и 2,

p_1 и p_2 – абсолютные давления в точках 1 и 2, $p_2 = p$,

p_0 – внешнее давление, для случая рисунка 2.1 $p_0 = p_1$,

h – глубина погружения точки 2, где определяется абсолютное давление p, $h = z_1 - z_2$.

Согласно (2.3) абсолютное давление p в любой точке жидкости, погруженной на глубину h, равно сумме внешнего p_0 и весового ρgh давлений.

Манометрическое или избыточное давление

$$p_М = p - p_{атм} = p_0 + \rho gh - p_{атм}\,. \tag{2.4}$$

Вакуумметрическое давление

$$p_{вак} = p_{атм} - p = p_{атм} - (p_0 + \rho gh)\,. \tag{2.5}$$

Рассмотрим случай относительного равновесия жидкости, когда сосуд с жидкостью вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω и на жидкость действует центробежная сила инерции и сила тяжести (рисунок 2.2,а). Тогда проекции плотности распределения массовых сил равны: $f_x = \Omega^2 x$, $f_y = \Omega^2 y$, $f_z = -g$. Подставив их в (2.2) и интегрируя для точек ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $p = p_0$, $r = 0$) и произвольной точки с координатами (x, y, z, $p = p$, $r = r$), получим выражение для определения абсолютного давления жидкости в произвольной точке:

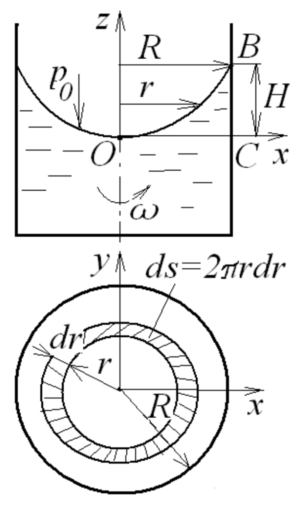


Рисунок 2.2а

$$p = p_0 + \rho\Omega^2(x^2+y^2)/2 - \rho gz. \tag{2.6}$$

Уравнение свободной поверхности жидкости получится из (2.6) при $p = p_0$:

$$z = \frac{1}{2g}\Omega^2 r^2, \tag{2.7}$$

где r – текущий радиус (рисунок 2.2а), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Объем жидкости параболоида вращения OBC (объем жидкости в сосуде выше плоскости xOy)

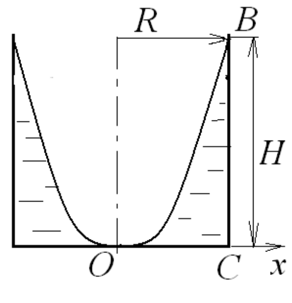


Рисунок 2.2б

$$V_{OBC} = \int zds = \int \frac{\Omega^2 r^2}{2g} ds = \int_0^R \frac{\Omega^2 r^2}{2g} 2\pi r dr = \frac{\Omega^2 \pi R^4}{4g}. \tag{2.8}$$

Из (2.7) при $z=H$ и $r=R$ имеем $H=\omega^2 R^2/(2g)$, откуда $R^2 = 2gH/\omega^2$. Тогда искомый объем из (2.8) (рисунки 2.2а,б)

$$V_{OBC} = \frac{H\pi R^2}{2}\ , \tag{2.9}$$

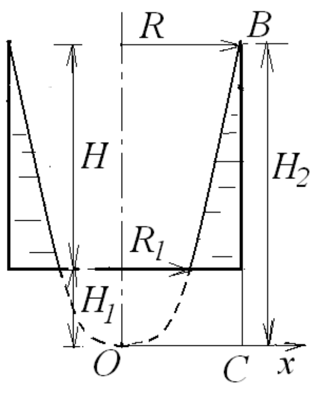


Рисунок 2.2в

где H – высота параболоида вращения.

Приравняем (2.8) и (2.9), получим выражения для определения угловой скорости:

$$\Omega = \frac{1}{R}\sqrt{2gH}\ . \qquad (2.10)$$

При равенстве Ω по (2.10) и $\Omega_1 = \pi n/30$, где n – число оборотов сосуда в минуту, нижняя точка O параболоида опустится до дна сосуда (рисунок 2.2б), а H будет равна высоте сосуда. При дальнейшем увеличении числа оборотов вращения сосуда получим картину, изображенную на рисунке 2.2в. Для определения оставшегося в сосуде объема жидкости V в случае рисунка 2.2в предварительно найдем H_1 и H_2 из (2.7) при $r = R_1$ и $r = R$:

$$H_1 = \frac{1}{2g}\Omega^2 R_1^2, \qquad H_2 = \frac{1}{2g}\Omega^2 R^2, \qquad (2.11)$$

а также $r = \sqrt{2gz}/\Omega$, тогда $dr = \frac{\sqrt{2g}}{\Omega}\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}}$. Далее найдем объем жидкости для этого случая через переменную z аналогично (2.8):

$$V = \int z ds = \int\limits_{H_1}^{H_2} z 2\pi \frac{\sqrt{2gz}}{\Omega}\frac{\sqrt{2g}}{\Omega}\frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{\pi g}{\Omega^2}\left(H_2^2 - H_1^2\right). \qquad (2.12)$$

Или, подставляя в (2.12) H_1 и H_2 из (2.11), получим выражение объема через радиусы (рисунок 2.2в):

$$V = \frac{\pi g}{\Omega^2}\left(\frac{\Omega^4}{4g^2}R^2 - \frac{\Omega^4}{4g^2}R_1^2\right) = \frac{\pi\Omega^2}{4g}\left(R^4 - R_1^4\right).$$

При решении ряда практических задач можно дополнительно учесть, что высота сосуда для случая рисунка 2.2в $H = H_2 - H_1$.

Приведенные выше формулы позволяют определить объем жидкости в сосуде при различной степени вращения сосуда и при задании различных исходных данных.

Далее рассмотрим другой случай относительного покоя жидкости, когда сосуд с жидкостью перемещается горизонтально с постоянным

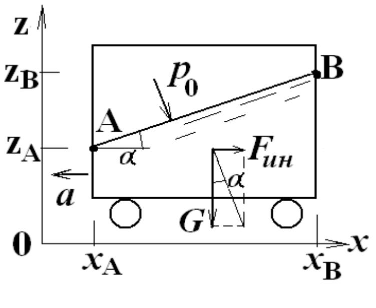


Рисунок 2.3

ускорением a (рисунок 2.3). На жидкость из массовых сил действуют сила тяжести $G = mg$ и сила инерции $F_{ин} = -ma$, тогда $f_x = -a$, $f_y = 0$, $f_z = -g$. Подставив их в (2.2) и интегрируя для точек (x_1, y_1, z_1, $p = p_1$) и (x_2, y_2, z_2, $p = p_2$), получим выражение для определения абсолютного давления жидкости:

$$p_2 = p_1 - \rho a(x_2 - x_1) - \rho g(z_2 - z_1). \qquad (2.13)$$

Если первую точку взять на поверхности жидкости, то $p_1 = p_0$, тогда абсолютное давление в произвольной точке внутри жидкости при $p_2 = p$ из (2.13)

$$p = p_0 - \rho a(x_2 - x_1) - \rho g(z_2 - z_1). \qquad (2.14)$$

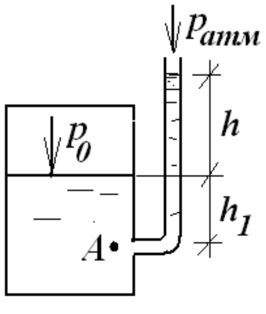
Для двух точек А и В на свободной поверхности жидкости имеем $x_1 = x_A$, $z_1 = z_A$, $x_2 = x_B$, $z_2 = z_B$, $p_1 = p_2 = p_A = p_B = p_0$, тогда из (2.13) уравнение свободной поверхности жидкости получится в виде:

$$-a/g = (z_B - z_A)/(x_B - x_A) = \mathrm{tg}\alpha. \qquad (2.15)$$

Случай относительного покоя жидкости в сосуде, движущемся по наклонной плоскости, рассмотрен далее в задаче 3.10.

2.2 Примеры решения задач

Задача 2.1. Найти давление на свободной поверхности бензина в закрытом сосуде, если уровень бензина в пьезометре выше уровня бензина в сосуде на $h = 2м$. Атмосферное давление $p_{атм} = 100кПа$, плотность бензина $\rho = 730$ *кг/м*^{3}.



Решение. Из основного уравнения гидростатики абсолютное давление в т. A со стороны пьезометра

$$p_A^П = p_{атм} + \rho g(h + h_1), \qquad (2.16)$$

а давление а той же точке со стороны сосуда

$$p_A^C = p_0 + \rho g h_1. \qquad (2.17)$$

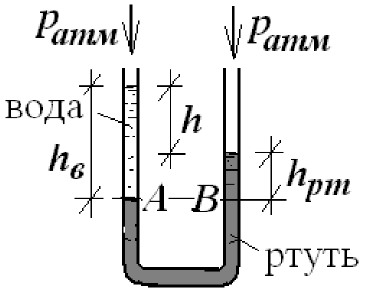
Приравнивая (2.5) и (2.6), получим:

$$p_{атм} + \rho g(h + h_1) = p_0 + \rho g h_1.$$

Отсюда абсолютное давление над поверхностью жидкости в сосуде равно

$$p_0 = p_{атм} + \rho g h = 100 \cdot 10^3 + 730 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = 114323 Па.$$

Задача 2.2. В U-образный сосуд налиты ртуть и вода. Линия раздела жидкостей расположена ниже свободной поверхности ртути на $h_{рт} = 8$ см. Определить разность уровней h в обеих частях сосуда.



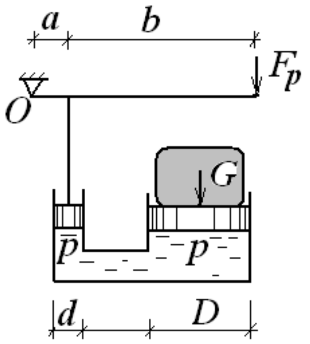
Решение. Значения давлений в точках A и B равны между собой, так как они лежат в одной плоскости, проходящей в пределах однородной жидкости. Из этого условия имеем:

$$p_{атм} + \rho_в g h_B = p_{атм} + \rho_{рт} g h_{рт}.$$

Отсюда $h_в = h_{рт}\rho_{рт} / \rho_в$, а искомая разность уровней $h = h_в - h_{рт} = h_{рт}\dfrac{\rho_{рт}}{\rho_в} - h_{рт} = h_{рт}\left(\dfrac{\rho_{рт}}{\rho_в} - 1\right) = 0{,}08\left(\dfrac{13600}{1000} - 1\right) = 1{,}008 м$

Задача 2.3. Гидравлический домкрат имеет диаметр большого поршня D = 250 мм, а диаметр меньшего поршня d = 25 мм, коэффициент полезного действия $\eta = 0{,}8$. Плечи рычага $b = 1 м$, $a = 0{,}2 м$.

Определить: а) усиление F_p, которое необходимо приложить на конце рычага, чтобы поднять груз весом G = 20 кН;



б) максимальную грузоподъемность домкрата G из условия, что максимальное F_p на конце рычага не будет превышать 100 H.

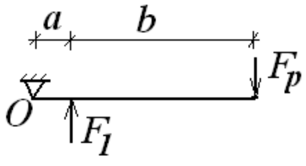
Решение. а) Давление под большим поршнем

$$p = \frac{G}{\pi D^2 / 4} = \frac{4G}{\pi D^2}. \qquad (2.18).$$

Такое же давление будет под малым поршнем. А сила в стержне над малым поршнем

$$F_1 = p\frac{\pi d^2}{4} = G\frac{4}{\pi D^2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = G\left(\frac{d}{D}\right)^2. \qquad (2.19)$$

Рассмотрим отдельно верхний рычаг. Из уравнения моментов относительно т.O имеем:



$$\Sigma m_0 = 0 \rightarrow F_1 \cdot a - F_p \cdot (a + b) = 0,$$

отсюда с учетом КПД

$$F_p = \frac{1}{\eta} F_1 \frac{a}{a+b} = \frac{1}{\eta} G\left(\frac{d}{D}\right)^2 \cdot \frac{a}{a+b} \qquad (2.20)$$

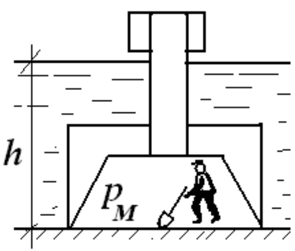
Из (2.9) $F_p = \dfrac{1}{0{,}8} \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot \left(\dfrac{25}{250}\right)^2 \cdot \dfrac{0{,}2}{0{,}2+1} = 41{,}67 H.$

б) Из (2.9) теоретически вес

$$G_{теор} = F_p \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \frac{a+b}{a} = 100 \cdot \left(\frac{250}{25}\right)^2 \cdot \frac{0{,}2+1}{0{,}2} = 60 кH. \qquad (2.21)$$

А практически возможный вес $G_{практ} = G_{теор} \cdot \eta = 60 \cdot 0{,}8 = 48 кH$.

Задача 2.4. Давление в рабочей камере кессона зависит от глубины его погружения h. Определить

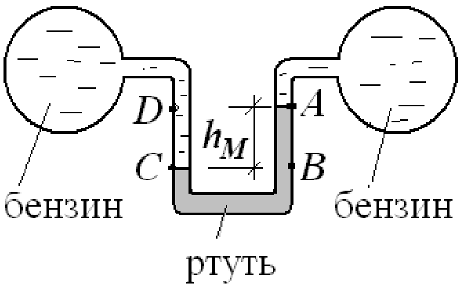


допустимую глубину погружения h кессона при условии, что ческое давление в его камере не превышает $250кПа$. Атмосферное давление $p_{атм} = 100кПа$, плотность воды $\rho = 1030 \cdot кг/м^3$.

Решение. Избыточное давление

$$p_m = \rho g h = 250 \cdot 10^3 H, \text{ отсюда } h \le \frac{p_m}{\rho g} = \frac{250 \cdot 10^3}{1030 \cdot 9{,}81} = 24{,}74 м.$$

Задача 2.5. Определить разность давлений в резервуарах, наполненных бензином, если показания дифференциального ртутного манометра $h_M = 70 мм.рт.ст.$



Решение. Обозначим абсолютное давление в точке A через $p_0 = p_A$, тогда по основному уравнению гидростатики абсолютное давление в точке B будет равно: $p_B = p_0 + \rho_{рт} \cdot gh_M = p_A + \rho_{рт} \cdot gh_M$. По правилу сообщающихся сосудов или по основному уравнению гидростатики такое же давление будет в точке С:

$$p_C = p_B = p_A + \rho_{рт} \cdot gh_M .$$

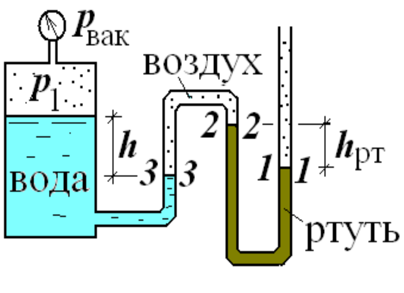
По основному уравнению гидростатики давление в точке D:

$$p_D = p_C - \rho_{бенз} \cdot gh_M = \left(p_A + \rho_{рт} gh_M\right) - \rho_{бенз} \cdot gh_M .$$

Искомая разность давлений в резервуарах

$$\Delta p = p_D - p_A = gh_M\left(\rho_{рт} - \rho_{бенз}\right) = 9{,}81 \cdot 0{,}070 \cdot (13600 - 710) = 8851{,}56 Па .$$

Задача 2.6. Определить абсолютное давление воздуха в баке p_1, если при атмосферном давлении, соответствующем $p_{атм}$ = 760 мм рт.ст., показание ртутного вакуумметра $h_{рт}$ = 0,2 м, высота h = 1,5 м. Каково при этом показание пружинного вакуумметра? Плотность ртути ρ = 13600 кг/м^3.



Решение. Обозначим границы раздела двух сред *1-1*, *2- 2* и 3-3. Давление на поверхности ртути (плоскость1-1) равно атмосферному

$$p_{1\text{-}1} = p_{атм} = h_{ат} \cdot 133{,}3 = 760 \cdot 133{,}3 = 101308 \text{ Па}.$$

Определим давление $p_{2\text{-}2}$ на границе раздела двух сред: ртуть-воздух:

$$p_{2\text{-}2} = p_{1\text{-}1} - \rho g h_{рт} = 101308 - 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 = 74624{,}8 \text{ Па}.$$

Давление $p_{3\text{-}3}$ на границе воздух-вода равно давлению $p_{2\text{-}2}$, так как трубка заполнена воздухом (в силу малости плотности воздуха по сравнению с плотностями воды и ртути весовым давлением воздуха пренебрегаем): $p_{3\text{-}3} = p_{2\text{-}2}$ = 74624,8 Па.

Абсолютное давление в баке

$$p_1 = p_{3\text{-}3} - \rho_В gh = 7462{,}8 - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 0{,}06 \text{ МПа}.$$

Показание пружинного вакуумметра

$$p_{вак} = p_{атм} - p_1 = 101308 - 59939{,}23 = 0{,}041 \text{ МПа}.$$

Задача 2.7. Определить полное и избыточное давление воды на дно открытого сосуда, если атмосферное давление $p_{атм} = 100 кПа$, а глубина воды в сосуде равна h = 2,5 *м*.

Решение. Избыточное давление воды на дно открытого сосуда $p_M = \rho gh = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5 = 24525 Па$. Полное (абсолютное) давление воды на дно сосуда $p = p_M + p_{атм} = 24525 + 100 \cdot 10^3 = 124525 Па$ или $p \approx 124{,}5 кПа$.

Задача 2.8. Определить глубину воды в море $\left(\rho = 1020 кг/м^3\right)$, на которой избыточное давление равно 50 кПа.

Решение. Давление на поверхности моря равно атмосферному:

$$p_0 = p_{атм}.$$

Избыточное давление равно разности между абсолютным и атмосферным: $p_M = p - p_{атм} = \left(p_0 + \rho gh\right) - p_{атм} = \rho gh$.

Отсюда искомая глубина $h = \dfrac{p_M}{\rho g} = \dfrac{50 \cdot 10^3}{1020 \cdot 9{,}8} \approx 5 м$.

Задача 2.9 Определить насколько увеличится давление, которое испытывает водолаз при переходе от глубины h_1=15 м к глубине h_2 =30 м. Определить также абсолютное давление на глубине 15 м, если атмосферное давление составляет 750 мм.рт.ст.

Решение. Значение атмосферного давления в системе СИ:

$$p_{атм} = 750 \text{ мм.рт.ст.} = 750 \cdot 98100/735{,}6 = 100020 \text{ Па}.$$

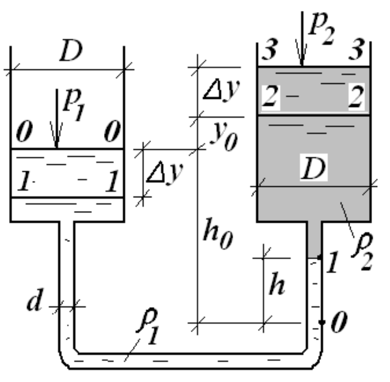
Абсолютное давление в т.*A* на глубине 15 м

$$p_A = p_{атм} + \rho gh_1 = 100020 + 1020 \cdot 9{,}81 \cdot 15 = 250113 \text{ Па}.$$

Абсолютное давление в т.*B* на глубине 30 м $p_B = p_{атм} + \rho gh_2$.

Изменение давления $\Delta p = p_B - p_A = \rho gh_2 - \rho gh_1 = \rho g\left(h_2 - h_1\right) =$
$= 1020 \cdot 9{,}81 \cdot \left(30 - 15\right) = 149940 Па \approx 150 кПа$.

Задача 2.10. Двухжидкостной микроманометр состоит из U-образной трубки диаметром d = 5 *мм*, соединяющий чашки диаметром D = 50 *мм*. Прибор наполнен несмешивающимися жидкостями с близкими значениями плотности – водным раствором этилового спирта $\left(\rho_1 = 870 кг/м^3\right)$ и керосином $\left(\rho_2 = 830 кг/м^3\right)$.



1) Установить связь между измеряемой микроманометром разностью давлений газа: $\Delta p = p_1 - p_2$ и смешением h мениска раздела жидкостей от его начального положения, соответствующего $\Delta p = 0$. Определить Δp при h = 280 *мм*.

2) Указать, во сколько раз уменьшатся показания прибора при данном Δp, если в приборе будут отсутствовать чашки.

Решение. 1) Обозначим уровни *0-0* и *2-2* соответствующими условию равенства внешних давлений: $p_1 = p_2$ $(\Delta p = p_1 - p_2 = 0)$. По основному уравнению гидростатики абсолютные значения давления в точке *0* равны: слева

$$p_0^{лев} = p_1 + \rho_1 g h_0, \tag{2.22}$$

а справа

$$p_0^{пр} = p_2 + \rho_2 g (h_0 + y_0). \tag{2.23}$$

Приравняем (2.16) и (2.17)

$$p_1 + \rho_1 g h_0 = p_2 + \rho_2 g (h_0 + y_0). \tag{2.24}$$

При $p_1 = p_2$ из (2.18) выразим y_0:

$$y_0 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} \cdot h_0. \tag{2.25}$$

При изменении давления в первой чашке на величину Δp (из $p_1 - p_2 = \Delta p$ имеем $p_1 = p_2 + \Delta p$) уровень в первой чашке изменится на Δy и на столько же изменится во второй чашке (с обратным знаком), поскольку чашки имеют одинаковый диаметр *D*. Из условия постоянства объема жидкости в трубке граница раздела жидкостей изменится на величину h.

$$\frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta y = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h, \text{ откуда } \Delta y = \frac{d^2}{D^2} \cdot h. \tag{2.26}$$

При этом жидкость в левой чашке будет на уровне *1-1*, а в правой – на уровне *3-3*. Для этих состояний напишем основное уравнение гидростатики. Абсолютные давления в точке 1 равны:

слева
$$p_1^{лев} = (p_2 + \Delta p) + \rho_1 g (h_0 - \Delta y - h), \tag{2.27}$$

справа
$$p_1^{пр} = p_2 + \rho_2 g (h_0 - h + \Delta y + y_0). \tag{2.28}$$

Приравняем (2.21) и (2.22), вместо *Δy* и y_0 подставим их значения из (2.20) и (2.19):

$$p_2 + \Delta p + \rho_1 g h_0 - \rho_1 g \frac{d^2}{D^2} h - \rho_1 h g = p_2 + \rho_2 g h_0 - \rho_2 g h + \rho_2 g \frac{d^2}{D^2} h + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_2} h_0 g \rho_2.$$

После сокращений останется:

$$\Delta p = \rho_1 g \frac{d^2}{D^2} \cdot h + \rho_1 g h - \rho_2 g h + \rho_2 g \frac{d^2}{D^2} \cdot h.$$

Окончательно

$$\Delta p = h\left[(\rho_1 - \rho_2)g + g\frac{d^2}{D^2}(\rho_1 + \rho_2)\right]. \qquad (2.29)$$

При $h = 280 мм = 0{,}28 м$ из (2.23)

$$\Delta p = 0{,}28\left[(870 - 830)\cdot 9{,}81 + 9{,}81\cdot\left(\frac{5}{50}\right)^2\cdot(870 + 830)\right] = 156{,}808 \approx 157\,Па$$

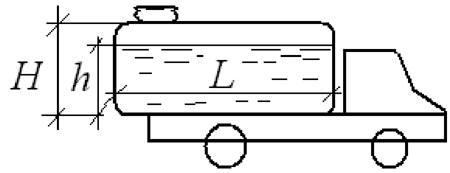
Отсутствие чашек можно заменить условием $D = d$, тогда из (2.23) превышение точки *1* над точкой *0* равно:

$$h_{нов} = \frac{\Delta p}{2\rho_1 g} = \frac{157}{2\cdot 870\cdot 9{,}81} = 0{,}00921 м.$$

Таким образом, при отсутствии чашек показания прибора уменьшатся в

$$\frac{h}{h_{нов}} = \frac{0{,}280}{0{,}00921} = 30{,}4 \approx 30\,раз.$$

Задача 2.11. В кузов автомобиля-самосвала размерами L = 2,5 м и H = 0,8 м налили цементный раствор до уровня h = 0,4 м. Требуется определить наименьший допустимый путь торможения от скорости v = 36 км/ч до полной остановки, исходя из условия не выплескивания раствора из кузова при равнозамедленном движении автомобиля.



Решение. Максимально возможный угол наклона раствора при условии ее не выплескивания и заданных размерах кузова $\mathrm{tg}\alpha = H/L$ = 0,8/2,5 = 0,32. Ускорение машины найдем из уравнения относительного равновесия раствора (2.15):

$$a = g\cdot\mathrm{tg}\alpha = 9{,}81\cdot 0{,}32 = 3{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Для определения времени торможения t воспользуемся формулой нахождения скорости $v_к$ в любой момент времени при равнозамедленном движении:

$$v_к = v - at.$$

Отсюда, учитывая равенство нулю конечной скорости при полной остановке $v_к = 0$, искомое время

$$t = \frac{v}{a} = \frac{36\cdot 1000}{3600\cdot 3{,}14} = 3{,}2 \text{ с}.$$

Самый короткий путь торможения (до полной остановки)

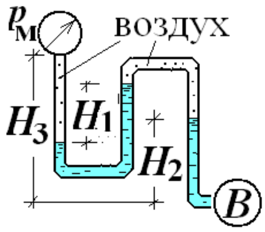
$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{3{,}14\cdot 3{,}2^2}{2} = 16{,}1 \text{ м}.$$

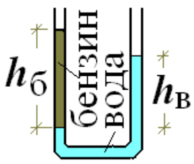
Встречаемые на дорогах «языки» растворов или бетона являются следствием несоблюдения указанных ограничений движения при остановке, трогании с места, около светофоров и т.д.

2.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.11. Определить избыточное давление на дне океана, глубина которого H = 10 км, плотность воды ρ = 1030 кг/м^3 и считая ее несжимаемой. Определить плотность воды на той же глубине с учетом сжимаемости, и приняв модуль объемной упругости $E = 2 \cdot 10^3$ МПа.

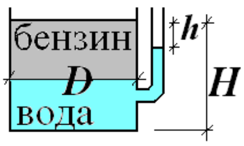
Задача 2.12. Определить избыточное давление воды в трубе В, если показание манометра $p_м$ = 0,025 МПа. Соединительная трубка заполнена водой и воздухом, как показано на схеме, причем H_1 = 0,5 м; H_2 = 3 м.



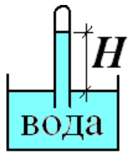


Задача 2.13. В U-образную трубку налиты вода и бензин. Определить плотность бензина, если $h_б$ = 500 мм; $h_в$ = 350 мм. Капиллярный эффект не учитывать.

Задача 2.14. В цилиндрический бак диаметром D = 2 м до уровня H = 1,5 м налиты вода и бензин. Уровень воды в пьезометре ниже уровня бензина на h = 300 мм. Определить вес находящегося в баке бензина, если $\rho_б$ = 700 кг/м^3.

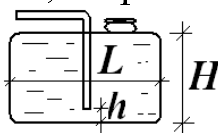


Задача 2.15. На какой высоте H установится вода в трубке, первоначально заполненной водой, а потом опрокинутой и погруженной открытым концом под уровень воды, если атмосферное давление 735,6 мм.рт.ст. и температура воды 4°С. Как изменится высота Н, если температура повысится до 20°С, до 80°С. Давление насыщенных паров воды и ее температура заданы ниже.

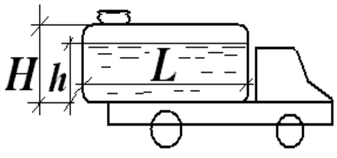


Температура, °С	4	20	80
Давление насыщенных паров, кПа	0,618	2,31	47,4
Плотность, кг/м^3	1000	998,2	971,8

Задача 2.16. Топливный бак автомобиля длиной L = 0,6 м, шириной b = 0,5 м и выстой H = 0,2 м движется с ускорением a = 3,27 м/с^2. Определить минимальное количество топлива в баке, обеспечивающее его подачу без подсоса воздуха. Считать, что бензопровод установлен в центре горизонтальной проекции бака, его диаметр мал по сравнению с длиной бака, h = 10 мм.

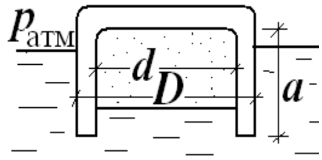


Задача 2.17. Определить расположение центра тяжести бетонного раствора, залитого в закрытый кузов автомобиля при его торможении с ускорением $a = g$. Считать, что кузов имеет форму параллелепи-

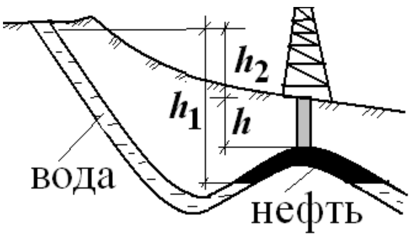


педа L = 2,0 м, H = 1,2 м, h = 1,0 м.

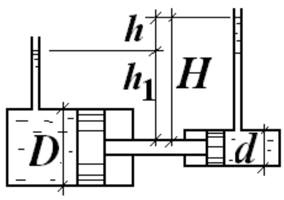
Задача 2.18. Определить, какое избыточное давление воздуха установится в плавающем толстостенном колоколе диаметрами D = 1 м и d = 0,6 м, высотой a = 1,4 м и весом G = 10 кН при атмосферном давлении $p_{атм}$ = 100 кПа. Плотность воды ρ = 1020 кг/м^3.



Задача 2.19. Грунтовые воды, формирующие систему с нефтяным пластом, выходят на поверхность. Какова должна быть плотность глинистого раствора, применяемого при бурении (ρ_{min}), чтобы не было фонтанирования нефти при вскрытии пласта. Глубина скважины h = 2500 м, расстояние между уровнем выхода подземных вод на поверхность и границей нефть-вода h_1 = 3200 м, расстояние между уровнем выхода подземных вод на поверхность и устьем скважины h_2 = 600 м, плотность подземных вод $\rho_в$ = 1100 кг/м^3, плотность нефти $\rho_н$ = 850 кг/м^3.

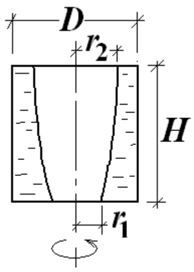


Задача 2.20. Система двух поршней находится в равновесии. Определить разницу показаний пьезометров h, если D/d =3, H = 2 м, $\rho_1 = \rho_2$ = const.



Задача 2.21. В сосуд диаметром D = 100 мм и высотой H = 0,3 м залита жидкость до уровня h = 0,2 м. Определить, до какой угловой скорости можно раскрутить сосуд, чтобы жидкость из него не выплеснулась.

Задача 2.22. При отливке цилиндрической полой заготовки во вращающейся относительно вертикальной оси форме из-за действия сил тяжести нижний внутренний радиус r_1 будет меньше верхнего внутреннего радиуса r_2. Определить их разность, если высота отливки H = 0,5 м, форма вращается с угловой скоростью Ω = 200 с$^{-1}$, ее диаметр D =200 мм и она в начальный момент заполнена на 30% своего объема.



3 СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПЛОСКИЕ СТЕНКИ

3.1 Краткие теоретические сведения

Сила абсолютного давления жидкости на плоскую стенку площадью ω равна:

$$F_p = \left(p_0 + \rho g h_c\right)\cdot \omega, \tag{3.1}$$

где p_0 - внешнее давление,
ρ - плотность жидкости,
h_c - глубина погружения центра тяжести площади ω относительно пьезометрической линии.

В случае открытого сосуда, когда $p_0 = p_{атм}$, сила избыточного давления жидкости на плоские стенки

$$F = \rho g h_c \omega. \tag{3.2}$$

Сила F приложена в центре давления, ордината которого

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C \omega}, \tag{3.3}$$

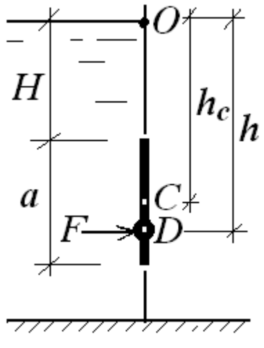
где

$$y_C = h_C / \sin\alpha, \tag{3.4}$$

α - угол наклона площади ω к горизонтальной плоскости,
I_c - центральный момент инерции площади ω относительно оси, параллельной линии пересечения плоскости стенки со свободной поверхностью жидкости.

3.2 Примеры решения задач

Задача 3.1. Для регулирования уровня воды в напорном баке установлен поворачивающийся щиток, который должен открывать квадратное отверстие в вертикальной стенке размерами $axa = 0{,}4x0{,}4м$ при заданном уровне H=2$м$. Найти глубину h погружения шарнира D и силу давления воды на щиток.



Решение. Площадь щитка $\omega = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16 м^2$, а глубина погружения центра тяжести щитка $h_C = H + a/2 = 2 + 0{,}4/2 = 2{,}2 м$. Угол наклона щитка к горизонту $\alpha = 90^\circ$, ордината центра тяжести $y_C = h_C / \sin 90^\circ = h_C = 2{,}2 м$, центральный момент инерции площади

$$I_C = \frac{a \cdot a^3}{12} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}4^3}{12} = 0{,}00213 м^4 .$$

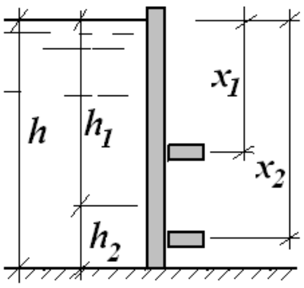
Сила давления воды на щиток

$$F = \rho g h_C \omega = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 3453{,}1 H .$$

Глубина погружения шарнира h равна ординате центра давления

$$y_D = h = y_C + \frac{I_c}{y_c \omega} = 2{,}2 + \frac{0{,}00213}{2{,}2 \cdot 0{,}16} = 2{,}2035 м .$$

Задача 3.2. Сила давления воды через обшивку прямоугольного щита высотой h = 3 м и шириной b = 1 м передается на две горизонтальные балки. На каких расстояниях x_1 и x_2 от свободной поверхности воды следует их расположить, чтобы они были нагружены одинаково.



Найти силу давления воды F на весь щит и максимальный изгибающий момент M на балках, считая их свободно опертыми на концах.

Решение. Обозначим через h_1 и $h_2 = h - h_1$ глубины (зоны), с которых давление воды передается соответственно на первый и второй балки. Необходимые для расчетов параметры для всего щита и для зон давления воды на первую и вторую балки равны:

- площади давления: $\omega = b \cdot h$ = 3 м^2, $\omega_1 = b \cdot h_1$, $\omega_2 = b \cdot h_2$.

- глубины погружения центров тяжести соответствующих площадей (ординаты центров тяжести): $h_c = h/2$ = 1,5 м, $h_{c1} = h_1/2$, $h_{c2} = h_2/2 + h_1$,

- центральные моменты инерции $I_c = bh^3/12$, $I_{c1}=bh_1^3/12$, $I_{c2} = bh_2^3/12$.

Сила избыточного давления воды на первую балку

$$F_1 = \rho g h_{c1} \omega_1 = \rho g (h_1/2)(b \cdot h_1),$$

а на весь щит

$$F = \rho g h_c \omega = \rho g (h/2)(b \cdot h) = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 1 \cdot 3 = 44145 \text{ Н}.$$

На одну балку (ригель) приходится половина этой силы: $F_1 = F/2$. Из этого условия, подставляя значения F_1 и F, получим:

$$\rho g (h_1/2)(b \cdot h_1) = \rho g (h/2)(b \cdot h)/2,$$

откуда $h_1 = h/\sqrt{2} = 0{,}707h = 0{,}707 \cdot 3 = 2{,}121 м.$ Тогда h_2 = 3–2,121 = 0,879 м.

Ордината центра давления для первой балки

$x_1 = h_{c1} + I_{c1}/(h_{c1} \cdot \omega_1) = h_1/2 + (bh_1^3/12)/(h_1/2 \cdot b \cdot h_1) = h_1/2 + h_1/6 = 2/3 h_1 = 1{,}414$ м,

а для второй балки

$$x_2 = h_{c2} + I_{c2}/(h_{c2} \cdot \omega_2) = (h_2/2 + h_1) + (bh_2^3/12)/[(h_2/2 + h_1) \cdot (b \cdot h_2)] = 2{,}862 \text{ м}.$$

Заметим, что аналогично можно решить задачу для случая n балок. В [3, 12 и др.] для определения положения балок такая зависимость предложена: $x_n = A \cdot h_1 / \sin\alpha$, где α – угол наклона щита к горизонту, $h_1 = h/\sqrt{n}$, $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{n(n-1)+2n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$, (для случая выше α = 90°, n = 2).

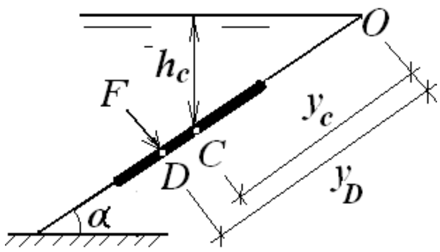
Сила, действующая на балку, распределена по всей балке, то есть удельная нагрузка по оси балки $q = F_1/b = F/2/b$ = 22072,5/1 = 22072,5 Н/м. Для простой балки на двух опорах максимальный момент будет в середине балки: $M_{max} = \frac{1}{8} q b^2 = \frac{1}{8} \cdot 22072{,}5 \cdot 1^2 = 2759{,}06 H \cdot м$.

Задача 3.3. Круглое отверстие диаметром d = 40 *см* в стенке, наклоненной под горизонт на угол $\alpha = 30^\circ$, перекрыто плоским клапаном. Найти величину и точку положения силы, прижимающей клапан к стенке, если центр отверстия находится, ниже свободной поверхности жидкости на 0,5 м.

Решение. Площадь клапана

$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}1256 м^2.$$

Глубина погружения центра тяжести этой площади $h_C = 0{,}5 м$, ордината центра тяжести



$$y_C = h_C / \sin 30^0 = h_C / 0{,}5 = 1{,}0 м.$$

Центральный момент инерции круглого клапана

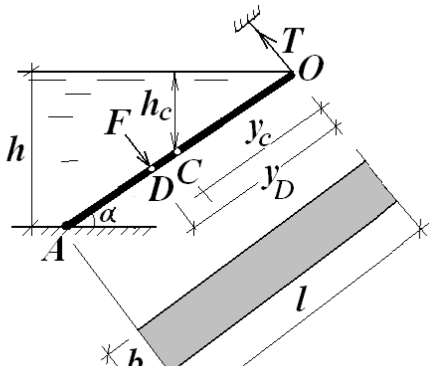
$$I_C = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}4^4}{64} = 0{,}001256\ м^4.$$

Величина силы, прижимающей клапан к стенке,

$$F = \rho g h_c \omega = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1256 = 616{,}07 H.$$

Ордината точки приложения этой силы

$$y_D = y_c + \frac{I_c}{y_c \omega} = 1{,}0 + \frac{0{,}001256}{1{,}0 \cdot 0{,}1256} = 1{,}01 м.$$



Задача 3.4. Определить натяжение троса, удерживающего прямоугольный щит шириной b = 2 *м* при глубине воды перед щитом h =1,8 *м,* если угол наклона щита к горизонту $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Длина щита

$$l = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{1{,}8}{0{,}85} = 2{,}12 м$$

Площадь щита $\omega = b \cdot l$ = 2·2,12 =4,24 м². Центральный момент инерции щита $I_C = \dfrac{bl^3}{12}$. Глубина погружения центра тяжести щита под уровень свободной поверхности $h_c = h/2 = 0{,}9$ м.

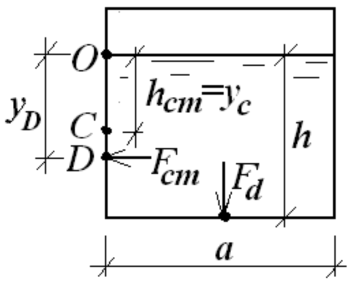
Сила давления воды на щит $F = \rho g h_c \omega = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}9 \cdot 4{,}24 = 37435H$. Ордината центра тяжести площади y_c = l/2 = 1,06 *м*, а ордината центра давления

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C \omega} = \frac{2}{3} l = 1{,}41 м.$$

Плечо силы F относительно т.А $l_{AD} = l - y_D = l/3 = 0{,}71$ м. Искомую силу тяги троса Т найдем из уравнения моментов относительно точки А:

$$\Sigma m_A = 0 \to F \cdot \frac{1}{3} l - T \cdot l = 0, \text{ отсюда } T = F/3 = 12478{,}3H.$$

Задача 3.5. Имеется бак с водой и размерами: длина b = 4 *м*, ширина a = 2 *м*, глубина воды h=1,5 *м*. Определить величины сил давления воды на дно и боковую стенку бака, а также центры давления.

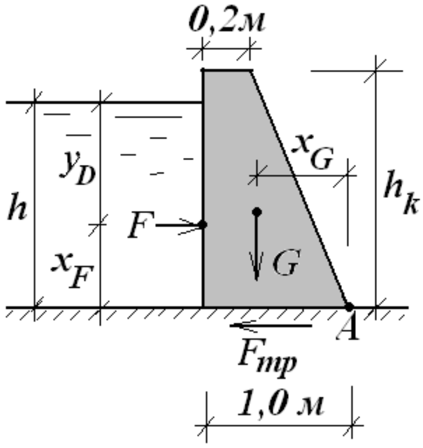


Решение. Сила давления жидкости на дно бака площадью $\omega = b \cdot a = 2 \cdot 4 = 8$ $м^2$ равна: $F_d = \rho g h \omega_g = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 4 = 120 кН.$

Эта сила приложена в центре тяжести площади дна. Боковая стенка имеет площадь $\omega_{cm} = b \cdot h$, а ее центр тяжести находится на глубине $h_{cm} = h/2 = 0{,}75$ *м*. Сила давления воды на стенку $F_{cm} = \rho g h_{cm} \omega_{cm} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}5 \cdot 4 \approx 45 кн$. Центральный момент инерции стенки $I_{OC} = \dfrac{l \cdot h^3}{12}$, ордината центра тяжести $y_C = \dfrac{h_{cm}}{\sin 90^\circ} = \dfrac{h_{cm}}{1} = h_{cm}$,

ордината центра давления $y_D = y_C + \dfrac{I_C}{y_C \omega_{cm}} = 0{,}75 + \dfrac{4 \cdot 1{,}5^3/12}{0{,}75 \cdot 1{,}5 \cdot 4} = 1{,}0 м$.

Задача 3.6. Длина подпорной стенки $l = 5{,}0 м$, высота h_k = 2,1 *м*. Глубина воды перед стенкой h =1,8 *м*, коэффициент трения о грунт $f = 0{,}4$. Проверить устойчивость стенки на опрокидывание и на скольжение, если плотность кладки $\rho_к = 2500 кг/м^3$.

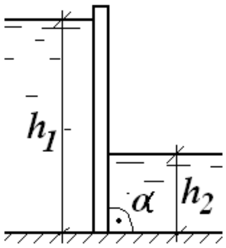


Решение. Площадь стенки, на которую действует вода, $\omega = h \cdot l = 1{,}8 \cdot 5 = 9{,}0$ м^2. Глубина погружения центра тяжести этой площади $h_c = h/2 = 0{,}9$ *м*. Сила давления воды на стенку $F = \rho g h_c \omega = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 9{,}0 = 79461H$.

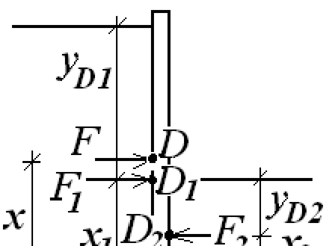
Эта сила приложена в центре давления - на расстоянии y_D от поверхности воды: $y_D = y_C + \frac{I_C}{y_C\omega} = h_C + \frac{l \cdot h^3}{12h_C\omega} = 0,9 + \frac{5 \cdot 1,8^3}{12 \cdot 0,9 \cdot 9} = 1,2м$ или от дна на расстоянии $x_F = h - y_D = 1,8 - 1,2 = 0,6м$ Вес кладки $G = \rho_k \cdot W_k \cdot g$, где объем кладки стенки $W_k = \frac{1}{2}(0,2 + 1,0) \cdot h_k \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 2,1 \cdot 5 = 6,3м^3$,
$G_k = 2500 \cdot 6,3 \cdot 9,81 = 154507,5Н$. Плечо этой силы относительно точки А равно: $x_G \approx \frac{2}{3} \cdot 1,0 = 0,67м.$ Опрокидывающий стенку момент относительно точки А равен: $M_o = F \cdot x_F = 79461 \cdot 0,6 = 47676,6Н \cdot м$, а удерживающий $M_y = G \cdot x_G = 154507,7 \cdot 0,67 = 103520Н.м$. Поскольку $M_y > M_o$, то стенка не опрокинется.

Сила трения стенки о грунт $F_{тр} = G \cdot f = 154507,5 \cdot 0,4 = 61803Н.$ Поскольку $F_{тр}$ меньше сдвигающей силы *F*, то стенка потеряет устойчивость, она будет сдвинута и скользить по поверхности земли. Чтобы этого не произошло можно увеличить длину основания стенки или основание сделать зубчатым (как колесо машины), применять анкеры и т.д.

Задача 3.7. Найти величину и точку приложения равнодействующей сил гидростатического давления, воды на прямоугольный вертикальный щит шириной $b = 2,0м$, если глубина воды с одной стороны $h_1 = 3м$, а с другой $h_2 = 1м$



Решение. Сначала рассмотрим давление воды на щит слева: площадь $\omega_1 = b \cdot h_1 = 2 \cdot 3 = 6м^2$, глубина погружения центра тяжести площади ω_1 $h_{C1} = \frac{h_1}{2} = 1,5м$, центральный момент инерции площади ω_1 $I_{C1} = \frac{bh_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 3^3}{12} = 4,5м^4$; угол наклона площади ω_1 к горизонту $\alpha = 90^\circ$ и $y_{C1} = h_{C1} / \sin 90^\circ = h_{C1} = 1,5м$.



Сила манометрического давления воды на щит слева

$$F_1 = \rho g h_{C1} \omega_1 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1,5 \cdot 6 = 88920Н.$$

Ордината точки приложения этой силы

$y_{D1} = y_{C1} + \frac{I_{C1}}{y_{C1}\omega_1} = 1,5 + \frac{4,5}{1,5 \cdot 6} = 2,0м$, а расстояние от дна до центра давления D_1 $x_1 = h_1 - y_{D1} = 3 - 2 = 1м$. Аналогично от давления воды на щит справа имеем: $\omega_2 = h_2 b = 1 \cdot 2 = 2 м^2$,

$h_{C2} = \dfrac{h_2}{2} = 0{,}5 м$; $I_{C2} = \dfrac{bh_2^3}{12} = \dfrac{2 \cdot 1^3}{12} = 0{,}1667 м^4$; $y_{C2} = h_{C2} = 0{,}5 м$;

$F_2 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}0 = 9810 H$, $y_{D2} = 0{,}5 + \dfrac{0{,}6667}{0{,}5 \cdot 2} = 0{,}6667 м$,

$x_2 = 1 - 0{,}6667 = 0{,}333 м.$

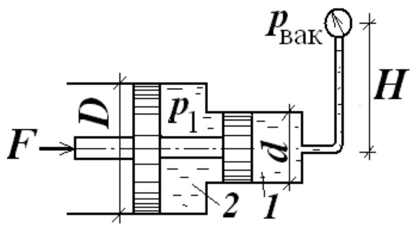
Равнодействующая сила $F = F_1 - F_2 = 78480 H$.

Расстояние x до точки приложения силы F найдем из уравнения моментов относительно точки А:

$$\sum m_A = 0,\ F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 = F \cdot x \text{ отсюда}$$

$$x = \frac{F_1 x_1 - F_2 x_2}{F} = \frac{88290 \cdot 1 - 9810 \cdot 0{,}333}{78480} = 1{,}0833 м.$$

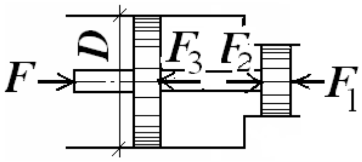
Задача 3.8. Определить силу F на штоке золотника, если показание вакуумметра $p_{вак}$ = 60 кПа, избыточное давление p_1 = 1 МПа, высота H = 3 м, диаметры поршней D =20 мм и d = 15 мм, плотность жидкости ρ = 1000 кг/м^3.



Решение. Рассмотрим силы, действующие на каждый из поршней, и составим уравнение равновесия сил. В полости 1 на малый поршень действует сила гидростатического давления, направленная влево:

$F_1 = \omega_1(-p_{вак} + \rho g H)$,

где ω_1 – площадь малого поршня.



В полости 2 на малый поршень действует сила, создаваемая давлением p_1 и направленная вправо: $F_2 = (\omega_1 - \omega_{шт})p_1$,

где $\omega_{шт}$ - площадь штока.

На большой поршень также действует сила, создаваемая давлением p_1, но направленная влево: $F_3 = (\omega_2 - \omega_{шт})p_1$,

где ω_2– площадь большого поршня.

Слева на большой поршень действует только искомая сила F, направленная вправо, избыточное давление в этой полости $p_{изб}$ = 0.

Запишем уравнение равновесия всех сил с учетом их направления:

$F + F_2 = F_1 + F_3$, откуда $F = F_1 + F_3 - F_2$, или, подставляя значения,

$$F = \omega_1(-p_{вак} + \rho g H) + (\omega_2 - \omega_{шт})p_1 - (\omega_1 - \omega_{шт})p_1 =$$

$$= -\omega_1 p_{вак} + \omega_1 \rho g H + \omega_2 p_1 - \omega_{шт} p_1 - \omega_1 p_1 + \omega_{шт} p_1 = (-p_{вак} + \rho g H - p_1)\omega_1 + p_1 \omega_2 =$$

$= (-60\ 000 + 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3 - 10^6) \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}015^2/4 + 10^6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}020^2/4 = 131{,}98$ Н.

Задача 3.9. В штольне при пониженном давлении хранится жидкость, удельный вес которого γ = 7850 Н/м^3. Внизу, в наклонной стенке (α=60^0), имеется отверстие диаметром d = 0,4 м с крышкой. Отверстие расположено под уровнем на глубине h_c = 4,25 м. Определить силу, действующую на крышку и положение упора h_D. Показание вакуумметра составляет 10^4 Па.

Решение. Определим положение пьезометрической плоскости *0-0*. Так как задано вакуумметрическое давление, то эта плоскость будет ниже свободной поверхностью жидкости на расстоянии $h = p_{вак}/\gamma = 10^4/7850 = 1{,}274$ м.

Стенка подвергается одностороннему давлению жидкости, поскольку на не смоченной стороне стенки давление атмосферное. Поэтому результирующая сила давления избыточного давления жидкости F, воспринимаемая крышкой площадью $\omega = \pi d^2/4$, равна:

$$F = p_c\omega = \gamma(h_c - h)\omega = 7850(4{,}25 - 1{,}274)3{,}14\cdot 0{,}4^2/4 = 2934{,}22 \text{ Н},$$

где p_c – избыточное давление в центре тяжести площади ω.

Точка приложения силы гидростатического давления F (центр давления, точка D) лежит ниже центра тяжести (точки С) на величину эксцентриситета

$$e = CD = I_c/(y_c\omega),$$

где I_c – центральный момент инерции крышки, $I_c = \pi d^4/64$,

y_c – ордината центра тяжести крышки,

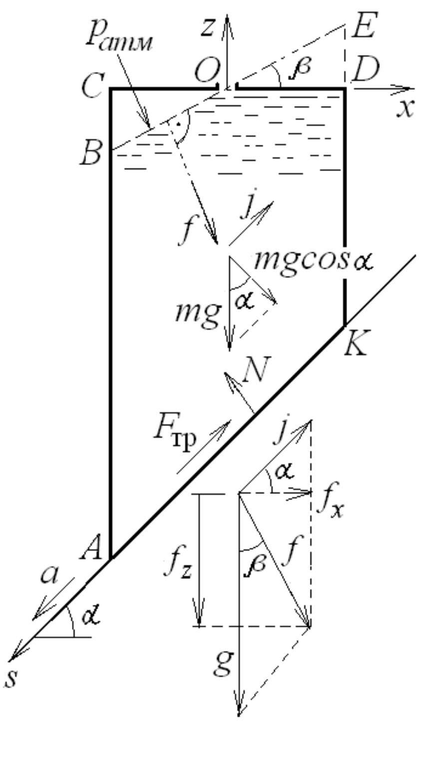
$$y_c = (h_c - h)/\sin 60^0 = (4{,}25 - 1{,}274)/0{,}866 = 3{,}436 \text{ м}.$$

$$e = I_c/(y_c\omega) = \pi d^4/64/(y_c\pi d^2/4) = d^2/(16y_c) = 0{,}4^2/(16\cdot 3{,}436) = 0{,}00291 \text{ м}.$$

Определим положение упора h_D:

$$h_D = h_c + e\cdot\sin 60^0 = 4{,}25 + 0{,}00291\cdot 0{,}866 = 4{,}2525 \text{ м}.$$

Задача 3.10. По наклоненной под углом 45° к горизонту плоскости под действием силы тяжести скользит призматический сосуд, целиком заполненный водой. Сосуд закрыт крышкой с малым отверстием, расположенным на расстоянии l = 0,5 м от передней стенки. Масса сосуда m = 150 кг, размеры $CA = 2b = 2$ *м*, $DK = CD = b = 1$ *м*, в плане сосуд квадратный размерами bxb. Коэффициент трения сосуда о плоскость скольжения f = 0,278. Найти величины сил давления на крышку CD, стенки CA и DK, дно AK.



Решение. Для сосуда с водой массой

$m_1 = m + \rho\cdot b\cdot b\cdot\dfrac{b+2b}{2}$ найдем ускорение a из второго закона Ньютона:

$$m_1 a = m_1 g\sin\alpha - F_{TP} \qquad (3.5)$$

Сила трения $F_{TP} = f\cdot mg\cos\alpha$. При $\alpha = 45^\circ$

$$\sin\alpha = \cos\alpha = \sqrt{2}/2$$

Подставим эти выражения в (1):

$m_1 a = m_1 g \sin\alpha - f m_1 g \cos\alpha$ или $a = g\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-f)$.

Единичная сила инерции

$j = -a = g\dfrac{\sqrt{2}}{2}(f-1) = 9{,}81\cdot 0{,}707\cdot(0{,}278-1) = -5{,}008\dfrac{м}{c^2}$.

Проекции массовых сил на оси координат

$$f_x = |j|\cos\alpha = |-5{,}008|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{,}541\frac{м}{c^2},\quad f_y = 0,$$

$$f_z = |j|\sin\alpha - g = |-5{,}005|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}81 = -6{,}269\frac{м}{c^2},$$

$$tg\beta = q_x / q_z = 3{,}541/6{,}269 = 0{,}565, \beta = 29{,}5^\circ.$$

Изменение уровня с атмосферным давлением

$\Delta Z = \pm b/2\cdot tg\beta = \pm 0{,}5\cdot 0{,}565 = \pm 0{,}283м,$ то есть $CB = ED = 0{,}283$ *м*.

Дифференциальное уравнение для абсолютно или относительно покоящейся жидкости имеет вид:

$$f_x dx + f_y d_y + f_z dz - \frac{1}{\rho}dp = 0. \tag{3.6}$$

Примем начало координат в центре отверстия в крышке, тогда $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $p_0 = p_{атм}$. При этих данных путем интегрирования (3.6) найдем убыточное давление в любой точке жидкости:

$$p_и = \rho\left(f_x\cdot x + f_y\cdot y + f_z\cdot z\right) = 10^3(3{,}541x - 6{,}269z). \tag{3.7}$$

Силу давления воды на стенку площадью ω равна:

$$F = p_{ис}\cdot\omega, \tag{3.8}$$

где $p_{ис}$ - избыточное давление в центре тяжести площади ω с координатами x_c, y_c, z_c.

Для крышки *CD* координаты центра тяжести $x_{c1}=y_{c1}=z_{c1}=0$, из (3.7) $p_{ис1}= 0$, а из (3.8) искомая сила давления воды на крышку $F_{CD} = 0$.

Для стенки *DK* $x_{c2} = 0{,}5$ *м*, $y_{c2} = 0$, $z_{c2} = -b/2 = -0{,}5$ *м*, $\omega_2 = b\cdot b = 1м^2$,

$p_{ис2} = 10^3[3{,}541\cdot 0{,}5 - 6{,}269\cdot(-0{,}5)] = 4{,}9кПа$; $F_{DK} = 4{,}9\cdot 1 = 4{,}9кПа.$

Для стенки СА $x_{c3} = -0{,}5$ *м*, $y_{c3} = 0$, $z_{c3} = -(2b + 0{,}2863)/2 = -1{,}142$ *м*, $\omega_3 = (2b - 0{,}283)\cdot b = 1{,}717м^2$,

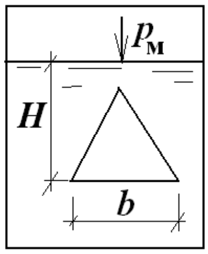
$p_{ис3} = 10^3[3{,}541\cdot(0{,}5) - 6{,}269\cdot(-1{,}142)] = 5{,}39кПа,\ F_{CA} = 9{,}25кН.$

Для дна сосуда *АК*

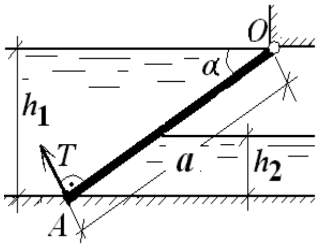
$p_{ис4} = 10^3[-6{,}269\cdot(-1{,}5)] = 9{,}4кПа$, $F_{AK} = 9{,}4\cdot 1{,}414 = 13{,}8 = 5{,}39кН$.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.11. Отверстие в боковой вертикальной стенке закрытого резервуара, представляющее собой равносторонний треугольник со стороной b = 0,5 м, закрыто крышкой. Определить величину силы избыточного давления воды на крышку и точку ее приложения, если горизонтальное основание треугольного отверстия расположено на глубине H = 1,5 м, а манометрическое давление на свободной поверхности воды $p_м$ = 50 кПа.



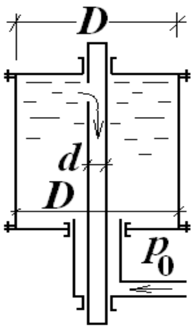
Задача 3.12. Прямоугольный щит длиной a = 5м и шириной b = 3 м закреплен шарнирно в точке O. Глубины воды h_1 = 4 м; h_2 = 2 м, угол наклона щита к горизонтали α = 60^0. Определить: а) реакции опор A и O; б) усилие T, необходимое для подъема щита.



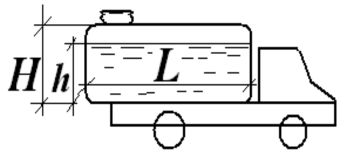
Задача 3.13. Бетонная плита весит в воздухе 1250 Н, а в воде 750 Н. Определить: а) плотность бетона; б) вес этой плиты в бензине ($\rho_б$ = 730 кг/м^3).

Задача 3.14. По окончании погрузки 1250 м^3 песка осадка баржи увеличилась на 1 м. Определить: а) плотность песка, если площадь плоскости плавания баржи s = 2000 м^2, б) величину изменения осадки баржи, если вместо песка на баржу будет погружено 2000 м^2 извести плотностью 800 кг/ м^3.

Задача 3.15. Ротор центрифуги, включенный в систему смазки двигателя внутреннего сгорания для очистки масла, представляет собой полый цилиндр, заполненный маслом и вращающийся с частотой n = 7000 об/мин ($\rho_м$ =900 кг/м^3). Определить давление p на внутренней боковой поверхности ротора и силу давления F, действующую на крышку ротора, если диаметры D = 140 мм, d = 30 мм. Масло подводится к центрифуге под давлением p_0 = 0,5 МПа.

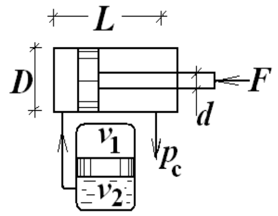


Задача 3.16. В кузов автомобиля-самосвала до уровня h = 0,4 м налит цементный раствор. Определить наименьший допустимый путь торможения от скорости v = 36 км/ч до остановки исходя из условия, чтобы раствор не выплеснулся из кузова. Для упрощения принять, что кузов имеет форму прямоугольной коробки размерами L = 2,5 м, H = 0,8 м, ширина кузова b = 1,8 м, а движение автомобиля при торможении равнозамедленное.

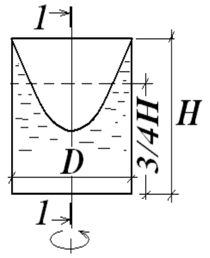


Задача 3.17. Определить объем гидроаккумулятора $v_г = v_1+v_2$, обеспечивающего выпуск штока гидроцилиндра против действия силы F=45 кН. Диаметры: цилиндра D=120 мм, штока d=60 мм,

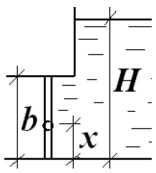
ход штока L=1200 мм, давление на сливе $p_с$=0,3 МПа. Процесс расширения воздуха считать изотермическим, максимальное давление и системе p_{max}=12 МПа.



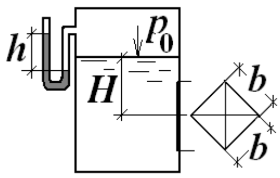
Задача 3.18. Цилиндрический резервуар заполнен водой до высоты 3/4H = 1,5 м. Диаметр резервуара D = 1 м, температура жидкости t = 20^{0}С. Определить: 1) объем жидкости, сливающийся из резервуара при вращении с частотой n = 100 об/мин вокруг его вертикальной оси, 2) силу давления на дно сосуда и горизонтальную силу, разрывающую резервуар по сечению 1-1 при его вращении.



Задача 3.19. Прямоугольный поворотный затвор размерами bxa=1x2 м перекрывает выход из резервуара. На каком расстоянии x от дна необходимо расположить ось затвора, чтобы при открывании его в начальный момент необходимо было преодолевать только трение в шарнирах, глубина воды в резервуаре H = 2 м.



Задача 3.20. В вертикальной стенке закрытого резервуара с нефтью имеется квадратное отверстие размерами bxb = 0,5x0,5 м. Определить: 1) величину и точку приложения силы давления жидкости на крышку, перекрывающую это отверстие, если напор H = 1 м, показание ртутного манометра, подключенного к резервуару, h = 300 мм и атмосферное давление $p_{атм}$ = 98,1 кПа, 2) при каком давлении на свободной поверхности p_0 крышка будет находиться в равновесии.



Задача 3.21. Отверстие в перегородке замкнутого сосуда закрыто круглой крышкой диаметром d = 0,5 м. Левая секция заполнена ртутью до центра крышки, над ртутью находится газ под абсолютным давлением p_1 = 10 кПа. В правой секции находится газ под абсолютным давлением p_2. Определить: 1) силу давления F на крышку при p_2 = 0, 2) при каком давлении p_2 сила F будет равна нулю (найти в этом случае момент M пары сил, действующей на крышку).

4 СИЛА ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

4.1 Краткие теоретические сведения

Сила давления покоящейся жидкости на криволинейные поверхности в случае «плоской» задачи определяется по формуле:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,, \qquad (4.1)$$

где F_x - горизонтальная сопоставляющая, ее величина и точка приложения определяется по формулам для плоской стенки применительно к проекции криволинейной поверхности на вертикальную плоскость (рисунок 4.1, поверхность $A'B'$); F_y - вертикальная составляющая, по величине равна весу жидкости в объеме W тела давления:

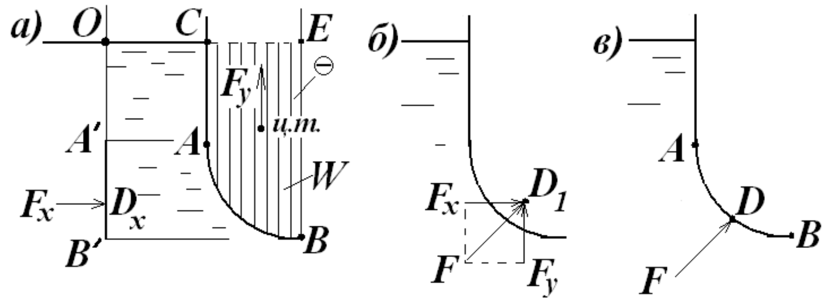


Рисунок 4.1

$$F_y = \rho g W\,, \qquad (4.2)$$

а приложена в центре тяжести тела давления.

Телом давления называется объем W, ограниченный: самой кривой поверхностью AB (рисунки 4.1 – 4.3), вертикалями AC и BE, восстановленными из концов A и B кривой поверхности и свободной поверхностью жидкости или ее продолжением CE.

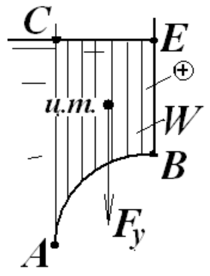


Рисунок 4.2

Тело давления считается отрицательным и $F_у$ направлена вверх, если поверхность AB смачивается с одной стороны, а тело давления расположено с другой стороны (рисунок 4.1), в противном случае имеем положительное тело давления и $F_у$ направлена вниз (рисунок 4.2). Для некоторых кривых поверхностей тело давления может состоять из нескольких составляющих и, возможно, различного знака (рисунок 4.3). Тогда величина вертикальной составляющей $F_у = - \rho g W_1 + \rho g W_2 - \rho g W_3$.

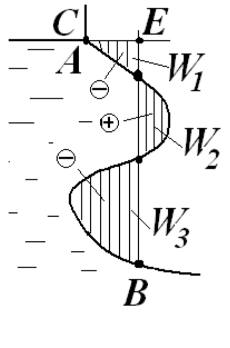


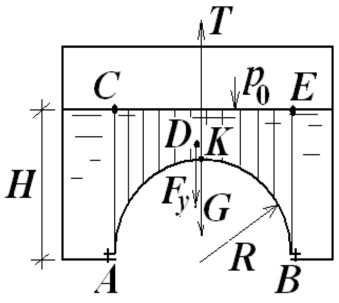
Рисунок 4.3

Результирующую силу F и точку ее приложения D находят векторным сложением составляющих F_x и $F_у$ (рисунок 4.1, б, в).

В некоторых случаях вертикальная составляющая $F_у$ равна архимедовой силе: $F_у = F_{арх}$.

4.2 Примеры решения задач

Задача 4.1. Круглое отверстие радиуса R = 20 *см* в дне резервуара с водой перекрывается клапаном–полусферой такого же радиуса, вес которого G =200 *Н*. Вычислить силу T, необходимую для поднятия клапана при напоре H = 2,5 *м*, если давление на свободной поверхности



$$p_0 = p_{атм} = 100\, кПа.$$

Решение. Из-за симметричности полусферы относительно вертикальной оси горизонтальные составляющие сил давления жидкости слева на поверхность AK и справа на поверхность BK равны между собой, но противоположно направлены, поэтому их сумма равна нулю: $\sum F_x = 0$.

Вертикальная составляющая силы давления воды на поверхность AKB $F_y = \rho g W$, где плотность воды ρ = 1000 *кг/м*^{3}; W - объем тела давления – объем фигуры АСЕВА:

$$W = \pi R^2 \cdot H - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi R^2 \left(H - \frac{2}{3} R \right) = 3{,}14 \cdot 0{,}2^2 \left(2{,}5 - \frac{2}{3} \cdot 0{,}2 \right) = 0{,}3 м^3 .$$

Тело давления является положительным, поскольку криволинейная поверхность AKB смачивается со стороны тела давления, тогда F_y направлена вниз. Величина $F_y = 103 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}3 = 2943$ *Н*. Далее проектируем действующие на крышку силы на вертикальную ось: $F_y + G - T = 0$, откуда искомая сила

$$T \geq F_y + G = 2943 + 200 = 3143\, Н.$$

Задача 4.2. Для перевозки автомобилей через реку решили соорудить плот из бревен диаметром d = 25 *см* и длиной l = 9 *м*. Сколько понадобится бревен, если вес перевозимого груза G = 35 *кН*.

Решение. По справочным данным принимаем плотность дерева $\rho_д$ = 800 *кг/м*^{3}, а плотность воды ρ = 1000 *кг/м*^{3}.

Объем одного бревна $W_1 = l \cdot \pi d^2/4 = 9 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25^2/4 = 0{,}441$ *м*^{3}.

Собственный вес одного бревна $G_1 = \rho_д g W_1 = 800 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}441 = 3461$ *Н*.

Архимедова сила, выталкивающая бревно из воды,

$$F_{арх} = F_y = \rho g W_1 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}441 = 4326.2\ Н.$$

Полезный вес, который может выдержать одно бревно:

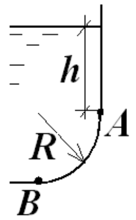
$$F_{1пол} = F_{арх} - G_1 = 4326{,}2 - 3461 = 864{,}2\ Н.$$

Необходимое количество бревен

$$n = G/F_{1пол} = 35000/864{,}2 = 40{,}5 шт \approx 41\ шт.$$

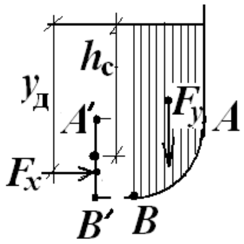
Задача 4.3. Определить величину и направление действия силы давления бензина на криволинейную часть резервуара AB. Радиус округления R = 1 *м*, глубина погружения верхней части h = 2 *м*, длина емкости l = 6 *м*.

Решение. По справочным данным находим плотность бензина ρ = 730 *кг/м*^{3}. Сила, действующая на криволинейную поверхность *AB,* определяется по формуле:



$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}}\ ,$$

где горизонтальная составляющая F_x и точка ее приложения определяются по формулам для плоской стенки применительно в $A'B'$ - проекции AB на вертикальную плоскость:



$$F_x = \rho g h_c \omega_{A'B'}\ .$$

Глубина погружения центра тяжести проекции $A'B'$

$h_c = y_c = h + R/2 = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ *м,*

$\omega_{A'B'} = A'B' \cdot l = R \cdot l = 1 \cdot 6 = 6$ *м*^{2},

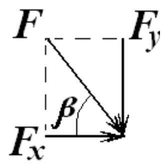
$F_x = 730 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}5 \cdot 6 = 107420$ *Н*.

Центральный момент инерции проекции $A'B'$ относительно горизонтальной оси равен $I_c = l \cdot R^3/12 = 6 \cdot 1^3/12 = 0{,}5$ *м*^{4}.

Ордината центра давления

$$y_д = y_c + I_c/(y_c \cdot \omega_{A'B'}) = 2{,}5 + 0{,}5/(2{,}5 \cdot 6) = 2{,}53 \text{ м}.$$

Вертикальная составляющая силы давления бензина равна весу бензина $\rho g W$ в объеме тела давления $W = (h \cdot R + \pi R^2/4)l = (2 \cdot 1 + 3{,}14 \cdot 1^2/4) \cdot 6 = 16{,}71$ *м*^{3}. $F_y = \rho g W = 730 \cdot 9{,}81 \cdot 16{,}71 = 119665$ *Н*.



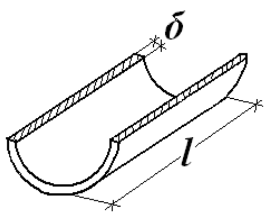
Результирующая сила

$$F = (107420^2 + 119665^2)^{0{,}5} = 160807 \text{ Н}.$$

$$tg\beta = F_y / F_x = 119665/107420 = 1{,}114, \rightarrow \beta \approx 48^{\circ}.$$

Задача 4.4. Стальная труба диаметром d = 600 *мм* работает под давлением p = 3 *МПа*. Найти: а) необходимую толщину стенок трубы δ, если допустимое напряжение стали на разрыв $[\sigma]$ = 160 *МПа*; б) максимально допустимое давление при толщине стенки δ = 4 *мм*.

Решение. а) Разрывающая трубу сила $F = pld$. Эта сила воспринимается площадью разрыва $\omega = 2\delta l$, где l - длина трубы. Напряжение разрыва $\sigma = F/\omega = pd/(2\delta)$, откуда, принимая величину напряжения за допустимое значение, искомая толщина стенок трубы



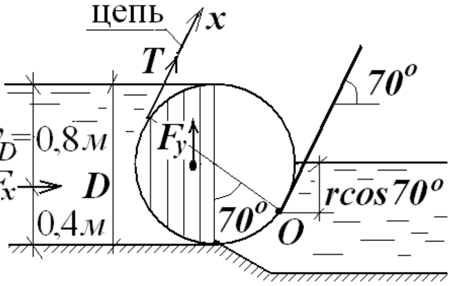
$$\delta = pd/(2[\sigma]) = 3 \cdot 10^6 \cdot 0{,}600/(2 \cdot 160 \cdot 10^6) = 0{,}0056 \text{ м} \approx 6 \text{ мм}.$$

б) Величину максимально допустимого давления при известной толщине стенки выразим из вышеприведенной формулы при $\sigma = [\sigma]$:

$$p = 2[\sigma]\delta/d = 2 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 0{,}004/0{,}600 = 2133 \cdot 10^3 \text{ Па} = 2{,}13 \text{ МПа}.$$

Задача 4.5. Цилиндрический затвор диаметром D = 1,2 *м*, длиной l=6 *м*, масса которого равна 40 т, может открываться качением его вверх целью по наклонным направляющим под углом 70° с горизонтом.

1) Определить величину и направление силы давления воды на закрытый затвор.



2) Найти натяжение цепи при трогании затвора с места и при выходе его из воды.

3) Как изменится сила давления воды на затвор и натяжение цепи, если уровень воды за затвором поднимется до его оси.

Решение. 1) Проекцией затвора на вертикальную плоскость будет прямоугольник высотой D, шириной l, площадью $D \cdot l$ и глубиной погружения центра тяжести $D/2$. Тогда горизонтальная составляющая силы давления воды на затвор слева

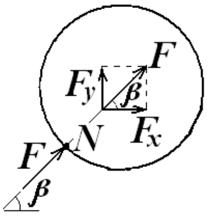
$$F_x = \rho g \frac{D}{2} \cdot D \cdot l = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{1{,}2}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 16 = 112{,}9 \cdot 10^3 H = 112{,}9 кH.$$

Вертикальная составляющая силы давления воды на затвор слева

$$F_y = \rho g W = \rho g \cdot \frac{\pi D^2}{2 \cdot 4} \cdot l = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 1{,}2^2}{8} \cdot 16 = 88{,}6 \cdot 10^3 H = 88{,}6 кH .$$

Результирующая сила давлении воды на затвор слева.

$$F = \sqrt{12{,}9^2 + 88{,}6^2} = 143{,}5 кH$$



Составляющая F_x приложена в центре давления площади проекции затвора на вертикальную плоскость на глубине $y_D = \frac{2}{3} D = \frac{2}{3} \cdot 1{,}2 = 0{,}8 м$, а F_y приложена в центре тяжести тела давления - на расстоянии $0{,}425D/2 = 0{,}225$ *м* от центра затвора влево на горизонтальной оси. Направление результирующей силы давления воды на затвор слева характеризуется углом β к горизонту, определяемым из формулы: $tg\beta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{88{,}6}{112{,}9} = 0{,}785$, отсюда β = $38^o 8'$. Для определения положения точки N приложения силы F, сначала перемешаем составляющие F_x и F_y вдоль линий их действия, векторно складываем, получаем силу F, которую перемещаем вдоль линии ее действия и прикладываем к обшивке затвора, получим точку N.

2) Для определения натяжения цели T в момент начала трогания затвора составим уравнение моментов относительно точки O (радиус затвора r = D/2 = 0,6 м):

$F_x(r\cos 70^o - 0{,}2) + F_y(r\sin 70^o + 0{,}425r) - mgr\sin 70^o + T \cdot 2r = 0.$

Или, подставляя сюда значения входящих величин,

$$112{,}9 \cdot 10^3(0{,}6 \cdot 0{,}342 – 0{,}2) + 88{,}6(0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}425 \cdot 0{,}6r) -$$
$$40 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}6 + T \cdot 1{,}2 = 0.$$

Отсюда T = 123,28 $кН$.

Для определения натяжения цели T в момент выхода затвора из воды также составим уравнение моментов относительно точки соприкосновения затвора с направляющей (наподобие точки O):

$\sum M = T{\cdot}D - mgr\sin 70^{o} = 0$, отсюда $T = 40{\cdot}9{,}81{\cdot}0{,}6{\cdot}0{,}94/1{,}2 = 184{,}24$ кН.

3) Если уровень воды справа от затвора поднимется до его оси, то сначала найдем составляющие силы от ее действия на затвор справа:

$F_{x2} = 1000{\cdot}9{,}81{\cdot}(0{,}6/2){\cdot}0{,}6{\cdot}16{\cdot} = 28{,}2$ кН.

$F_{y2} = 1000{\cdot}9{,}81{\cdot}(3{,}14{\cdot}1{,}2^2/4){\cdot}(1/4){\cdot}16 = 44{,}36$ кН.

Результирующая сила давления воды на затвор слева и справа

$$F = \sqrt{(F_x - F_{x2})^2 + (F_y + F_{y2})^2} = \sqrt{(112{,}9 - 28{,}2)^2 + (88{,}6 + 44{,}36)^2} = 157{,}65кН.$$

По сравнению с первым случаем отсутствия воды справа сила давления воды на затвор увеличилась.

Сумма моментов сил F_{x2} и F_{y2} относительно точки O равна:

$$M_н = F_{x2}\left(r - r\cos 70^\circ - 0{,}2\right) + F_{y2}\left(r\sin 70^\circ - 0{,}425r\sin 70^\circ\right) =$$

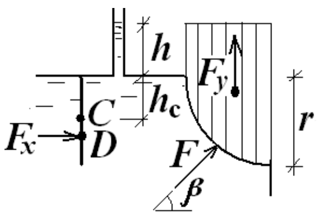
$$= 28{,}2\left(0{,}6 - 0{,}6\cdot 0{,}34 - 0{,}2\right) + 44{,}36\left(0{,}6\cdot 0{,}94 - 0{,}425\cdot 0{,}6\cdot 0{,}94\right) = 19{,}9кН.м.$$

Новое значение силы тяги цепи в момент трогания затвора

$$T_н = T - M_н / D = 123{,}28 - 19{,}9/1{,}2 = 106{,}7кН.$$

Задача 4.6. Определить силу давления воды на цилиндрическую стенку резервуара, а также угол наклона к горизонту линии действия этой силы β, если радиус стенки r = 2 м, ширина стенки b = 3 м, высота уровня воды в пьезометра, установленного на верхней крышке резервуара, h = 0,5 м.

Решение. Проекция криволинейной поверхности на вертикальную плоскость представляет собой прямоугольник площадью $b{\cdot}r = 3{\cdot}2 = 6$ м^2, расстояние до центра тяжести от свободной поверхности $h_c = h + r/2 = 0{,}5 + 2/2 = 1{,}5$ м, а тело давления представляет собой объем четверти цилиндра радиусом r и шириной b плюс объем параллелепипеда с площадью основания $b{\cdot}r$ и высотой h, то есть $W = b(\pi r^2/4 + rh) = 3(3{,}14{\cdot}2^2/4 + 2{\cdot}0{,}5) = 12{,}4$ м^3.



Горизонтальная составляющая силы давления воды

$$F_x = 1000{\cdot}9{,}81{\cdot}1{,}5{\cdot}6 = 88\,290 \text{ Н} = 88{,}29 \text{ кН},$$

а вертикальная составляющая

$$F_y = 1000{\cdot}9{,}81{\cdot}12{,}4 = 121\,644 \text{ Н} = 121{,}644\ кН.$$

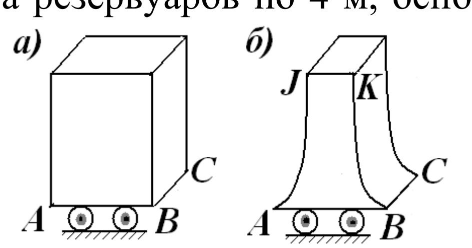
Результирующая сила давления воды на цилиндрическую стенку

$$F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}} = \sqrt{88{,}29^2 + 121{,}644^2} = 150{,}14кН.$$

Угол наклона силы F к горизонту

$$\beta = \mathrm{arctg}(F_y / F_x) = \mathrm{arctg}(121{,}644/88{,}29) = 54^o.$$

Задача 4.7. На рисунке изображены два открытых заполненных водой резервуара: с вертикальными и параболическими боковыми стенками, описываемыми уравнением y=4x^2. Высота резервуаров по 4 м, основания имеют одинаковые размеры AB = 3 *м*, BC = 2 *м*, JK = 1 *м*. Определить усилия от действия воды, испытываемые основаниями резервуаров и колесами. Вес резервуаров не учитывать.

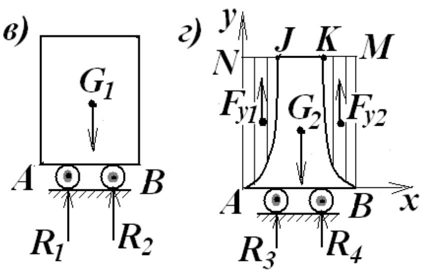


Решение. 1) Сила избыточного давления воды на дно AB для обоих резервуаров одинаковая:

$$F = \rho g h_c \omega_{AB} = 1000\cdot 9{,}81\cdot 4\cdot(2\cdot 3) = 235\,440\ H = 235{,}44\ \text{кН},$$

где h_c – глубина погружения центра тяжести площади дна резервуара AB, $h_c = 4$ *м*.

Силы давления воды на боковые стенки для случая резервуара с вертикальными стенками взаимно уравновешивают друг друга и в проекции на горизонтальную ось дают нуль. То же самое справедливо и для горизонтальных составляющих силы давления воды для случая резервуара с параболическими стенками, но в этом случае имеют место вертикальные составляющие $F_{y1} = F_{y2} = \rho g W_{ANJ} = \rho g(\int_0^1 4x^2 dx)\cdot BC = 1000\cdot 9{,}81\cdot(4/3\cdot 1^3 - 0)\cdot 2 = 26160$ Н.

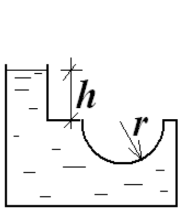


Вес воды в резервуаре с вертикальными стенками $G_1 = \rho g\cdot AB\cdot BC\cdot h_c = 1000\cdot 9{,}81\cdot 3\cdot 2\cdot 4 = 235\,440$ Н равен силе гидростатического давления воды F на основание АВ и эта сила воспринимается землей и колесами и в случае четырех колес на одно колесо приходится сила: $R_1 = G_1/4 = 58860$ Н.

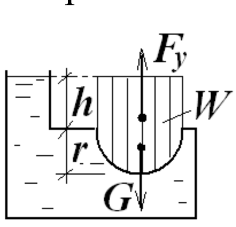
Вес воды в резервуаре с параболическими стенками меньше по сравнению с первым случаем на величину суммы вертикальных составляющих: $G_2 = G_1 - (F_{y1} + F_{y2}) = 235440 - (26160 + 26160) = 183\,120$ Н. Эта сила передается на землю, а на одно колесо $R_3 = G_2/4 = 45\,780$ *Н*.

Интересно отметить: на дно AB обоих размеров действуют одинаковые силы, а на колеса и на землю передаются разные. В этом состоит гидростатический парадокс.

Задача 4.8. Отверстие в стенке резервуара закрывается полусферической крышкой радиусом r = 0,1 м и весом 200 Н. Какова должна быть высота h воды в резервуаре, чтобы крышка открылась.



Решение. Для построения тела давления поднимаем вертикали из концов полусферической крышки на величину h до



плоскости уровня воды в резервуаре. Объем тела давления

$$W = \pi r^2 \cdot h + 4\pi r^3/6 = \pi r^2(h + 2r/3).$$

Вертикальная составляющая силы давления воды на полусферу $F_у = \rho g W$ должна поднимать крышку, преодолевая силу тяжести:

$$F_у > G \text{ или } \rho g \pi r^2(h + 2r/3) > G.$$

Отсюда искомая высота

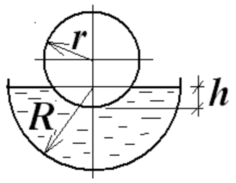
$$h > G/(\rho g \pi r^2) - 2r/3 = 200/(1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2) - 2 \cdot 0{,}1/3 = 0{,}58 \text{ м}.$$

Задача 4.9. Студент в обычных условиях без труда поднимает стальную гирю массой m_1 = 32 кг. Стальную гирю какой массы m_2 студент может поднять под водой.

Решение. Находим справочные значения плотности стали $\rho_с$ =7800 кг/м^3 и воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. Из выражения для определения массы гири в обычных условиях $m_1 = \rho_с W$ найдем объем гири $W = m_1/\rho_с$. В случае нахождения гири под водой на нее действует выталкивающая архимедова сила, равная вертикальной составляющей силы давления воды на гирю: $F_{арх} = F_у = \rho_в g W = g \cdot m_в$, где масса воды в объеме гири $m_в = \rho_в W$. Или, подставляя выражение для объема гири, $m_в = \rho_в \cdot m_1/\rho_с = 1000 \cdot 30/7800 = 3{,}85$ кг. Тогда масса, которую студент может поднять под водой

$$m_2 = m_1 + m_в = 32 + 3{,}85 = 35{,}85 \text{ кг}.$$

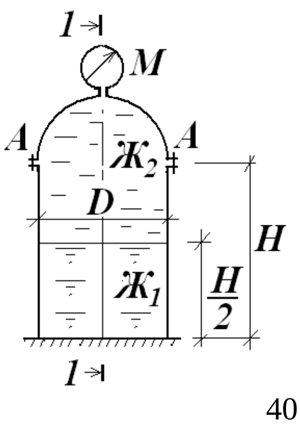
Задача 4.10. Полусфера радиусом R = 0,2 м содержит воду массой m_1 = 10 кг. Определить массу m_2 сферы радиусом r = 0.15 м, плавающей в воде, и глубину ее погружения.



Решение. Плотность воды примем $\rho_в$ = 1000 кг/м^3. Объем, занимаемый водой в полусфере, $W_1 = m_1/\rho_в$ = 10/1000 = 0,01 м^3. Объем полусферы $W_0 = 4/3\pi R^3/2$ = $4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2^3/2$ = 0,01675 м^3. Объем, занимаемый сферой, $W_2 = W_0 - W_1$ = 0,01675 - 0,01 = 0,00675 м^3. Тогда масса сферы $m_2 = \rho_в \cdot W_2$ = $1000 \cdot 0{,}00675$ = 6,75 кг.

Глубину погружения сферы h найдем из формулы для определения объема сегмента сферы, погруженной в воду: $W_2 = \pi h^2(3r - h)/3$, откуда $3rh^2 - h^3 = 3W_2/\pi$. Подставим значения: $3 \cdot 0{,}15 \cdot h^2 - h^3 = 3 \cdot 0{,}00675/3{,}14$ или $0{,}45h^2 - h^3 = 0{,}00645$. Отсюда методом подбора получим h = 0,1455 м.

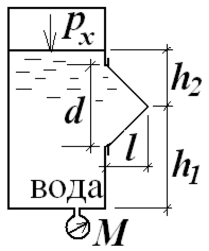
4.3 Задачи для самостоятельного решения



Задача 4.11. Вертикальная цилиндрическая цистерна с полусферической крышкой до самого верха заполнена двумя различными несмешивающимися жидкостями $Ж_1$ (ρ_1 = 1000 кг/м^3) и $Ж_2$ (ρ_2 = 920 кг/м^3). Диаметр цистерны D = 1,6 м, высота ее цилиндрической части H = 3 м. Глубина жидкости $Ж_1$ равна $H/2$. Манометр M показывает манометрическое давление 14,2

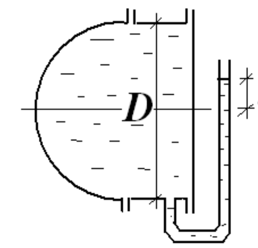
кПа. Температура жидкости 20°С. Определить силу, растягивающую болты A, и горизонтальную силу, разрывающую цистерну по сечению 1-1.

Задача 4.12. Показание манометра, присоединенного к днищу бака, равно M = 10 кПа.

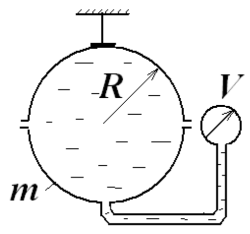


Найти давление воздуха p_x, находящегося над водой, если h_1 =1,8 м и h_2 = 1 м.

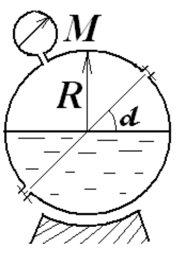
Определить растягивающее и срезающее усилия болтов, крепящих к вертикальной стенке бака коническую крышку с размерами d = 0,8 м и l = 0,5 м, весом крышки пренебречь. Построить графики зависимости этих сил от давления M.



Задача 4.13. Определить величины и направления сил давления воды на плоское и сферическое днища цилиндрического сосуда диаметром D = 1 м в трех случаях: y = +D/5; -D/5; 0. Показать в виде векторов горизонтальные и вертикальные составляющие сил давления воды на днища.



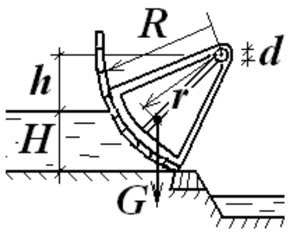
Задача 4.14. Шаровой сосуд радиусом R = 0,4 м, заполненный водой, висит на тяге, прикрепленной к его верхней половине. Какое наименьшее давление в центре сосуда (показание пружинного вакуумметра V) удержит свободную нижнюю половину сосуда массой: 1) m = 150 кг, 2) m = 0.



Задача 4.15. Определить усилия, растягивающие и срезающие болты диаметрального фланцевого соединения шарового сосуда радиусом R=0,4 м, заполненного наполовину водой и находящегося под внутренним избыточным давлением сжатого газа M = 20 кПа. Плоскость стыка наклонена к горизонту под углом α = 45°, масса полушара m = 300 кг.

Задача 4.16. Секторный затвор плотины радиусом R = 5 м и длинной L = 4,5 м поддерживает напор воды H = 3,5 м. Для пропуска воды затвор поднимается цепью, поворачиваясь вокруг горизонтальной оси на цапфах диаметром d = 150 мм.

Масса затвора равна 3 т, его центр тяжести расположен на биссектрисе угла сектора (радиус r = 0,75R).



При закрытом затворе ось его вращения и верхний обрез сектора лежат в одной горизонтальной плоскости, расположенной выше свободной поверхности на расстоянии h = 1 м.

Определить:

1. Силу, нагружающую подшипники закрытого затвора.

2. Силу, прижимающую затвор к порогу.
3. Начальное натяжение цепи при подъеме затвора (коэффициент трения в цапфах принять $f = 0{,}3$).

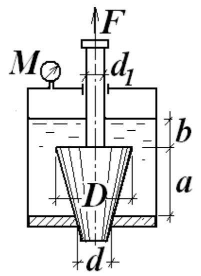
Задача 4.17. Отверстие в дне сосуда, содержащего масло относительной плотности δ = 0,83, закрыто конической пробкой размерами D =100 мм, d = 50 мм и a = 100 мм, укрепленной на штоке d_1 =50 мм. Уровень масла расположен выше пробки на расстоянии b = 50 мм.

Определить:

1. Начальное усилие F, необходимое для подъема пробки при избыточном давлении в сосуде M = 10 кПа.

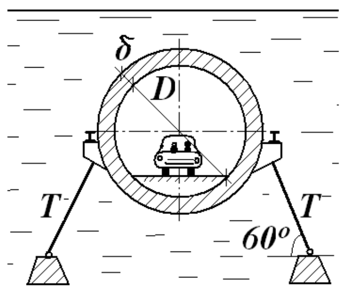
2. Избыточное давление M, при котором усилие F окажется равным нулю.

3. Собственным весом пробки и трением в сальнике пренебречь.

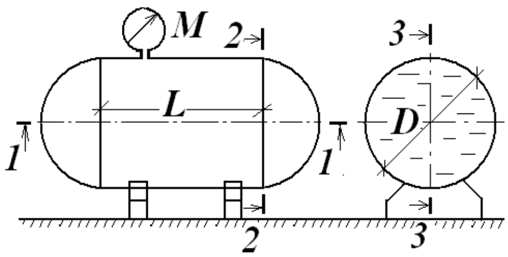


Задача 4.18. Подводный туннель круглого сечения с внутренним диаметром D = 3 м и толщиной стенки δ = 250 мм удерживается от всплывания тросами T, расположенными попарно через каждые 6 м длины туннеля.

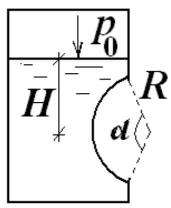
Определить натяжение тросов, полагая дополнительную нагрузку, приходящуюся на 1 м длины туннеля G = 10 кН и плотность бетона 2,5 т/м^3.



Задача 4.19. Горизонтальный цилиндрический резервуар, закрытый полусферическими крышками, заполнен легкой нефтью. Длина цилиндрической части резервуара L = 3,5 м, диаметр D = 2,5 м. Манометр M показывает манометрическое давление 45 кПа. Температура жидкости 20°С. Определить силы, разрывающие резервуар по сечениям 1-1, 2-2 и 3-3.



Задача 4.20. Круглое отверстие в вертикальной стенке закрытого резервуара с водой перекрыто сферической крышкой. Радиус сферы R = 0,5 м; угол при вершине α = 120°, глубина погружения центра тяжести отверстия H = 1 м. Определить силу давления жидкости на крышку при манометрическом давлении на его свободную поверхность p_0 = 147 кПа.



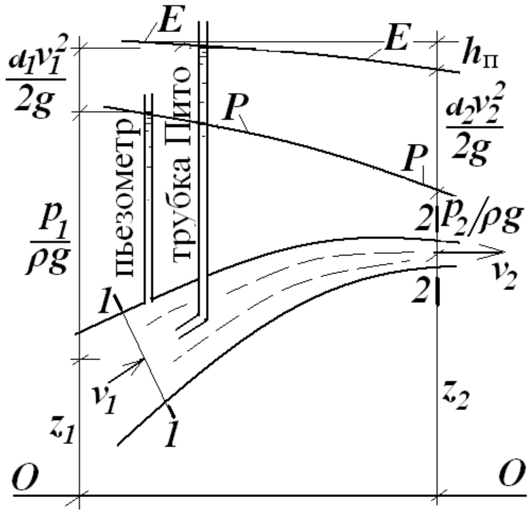
5 **УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ**

5.1 Краткие теоретические сведения

Уравнение Бернулли представляет собой закон сохранения энергии и для потока реальной жидкости имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n, \tag{5.1}$$

где z – высота положения (удельная потенциальная энергия положения),
$p/(\rho g)$ – пьезометрическая высота (удельная потенциальная энергия давления),



$\alpha v^2/(2g)$ – скоростной напор (удельная кинетическая энергия) (если жидкость вытекает из резервуаров больших размеров или втекает в них, то скоростями в резервуарах пренебрегают и тогда уравнение Бернулли упростится),
$H = z + p/(\rho g) + \alpha v^2/(2g$ – полный напор (полная удельная энергия),
α – коэффициент Кориолиса или коэффициент кинетической энергии, (учитывает неравномерность распределения скоростей по живому сечению и равен отношению кинетических энергий, подсчитанных по действительным и средней скоростям), α =1,03 – 1,15 для турбулентного движения (при решении задач часто принимают $\alpha \approx 1{,}0$) и α = 2 для ламинарного режима движения жидкости,
O – O – плоскость сравнения, которую можно принять произвольно, но если эта плоскость принять проходящей через центр тяжести одного (или обоих сечений в случае горизонтальной трубы), то z_1 (и z_2) будут равны нулю и уравнение Бернулли упростится,
P – P – пьезометрическая линия (линия удельной потенциальной энергии), получаемая путем соединения показаний пьезометра при движении вдоль потока,
E – E – напорная линия (линия полной удельной энергии), получаемая путем соединения показаний трубки Пито при движении вдоль течения,
$h_п$ – потери напора (потери полной удельной энергии) при движении жидкости от сечения 1-1 до сечения 2-2 (для идеальной жидкости и при малом расстоянии между сечениями потерями можно пренебречь).

Потери напора $h_п$ обусловлены двумя видами гидравлических сопротивлений и складываются из местных потерь и потерь на трение по длине:

$$h_п = h_м + h_l. \qquad (5.2)$$

Местные потери напора $h_м$ происходят в так называемых местных гидравлических сопротивлениях (резкое расширение или сужение трубопровода, тройник, кран, поворот, решетка и др.), то есть в местах резкого изменения эпюры скорости, их определяют по формуле Вейсбаха:

$$h_м = \varsigma \frac{v^2}{2g}, \qquad (5.3)$$

где v – средняя скорость потока в сечении перед местным сопротивлением или за ним,

ς – коэффициент местного сопротивления, который главным образом зависит от вида местного сопротивления и области гидравлического сопротивления, определяемого с помощью числа Рейнольдса $Re = vd/\nu$.

Например, при выходе жидкости из трубы в резервуар больших размеров коэффициент местного сопротивления $\varsigma_{вых} = 1{,}0$, а при входе в трубу из резервуара больших размеров $\varsigma_{вх} = 0{,}5$. При этом в формулу Вейсбаха нужно подставить скорость в трубопроводе.

При использовании формулы Вейсбаха, включающей скоростной напор перед местным сопротивлением в виде резкого расширения $V_1^2/(2g)$, коэффициент местного сопротивления вычисляется по формуле:

$$\varsigma_{рр1} = (1 - \omega_1/\omega_2)^2, \qquad (5.4)$$

а при записи формулы через скоростной напор за местным сопротивлением $V_2^2/(2g)$ - по формуле

$$\varsigma_{рр2} = (\omega_2/\omega_1 - 1)^2, \qquad (5.5)$$

где ω_1 и ω_2 – соответственно площадь живого сечения потока до и после резкого расширения.

При резком сужении потока и при учете в формуле Вейсбаха скоростного напора за местным сопротивлением $V_2^2/2g$ коэффициент резкого сужения определяется по формуле:

$$\varsigma_{рс} = 0.5(1 - \omega_2/\omega_1). \qquad (5.6)$$

При числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}^{//}$ коэффициенты местных сопротивлений зависят от *Re* и приближенно могут быть найдены по формуле Альтшуля:

$$\varsigma = A/Re + \varsigma_{кв},$$

где A – число, определяемое формой местного сопротивления,
$\varsigma_{кв}$ – коэффициент местного сопротивления для области квадратичного сопротивления,
Re'' - второе предельное число Рейнольдса, $Re'' = 500d/\Delta$,
Δ - абсолютная эквивалентная шероховатость материала трубопровода.

Потери напора на трение по длине l определяются по формуле Дарси:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{\mathrm{v}^2}{2g}, \qquad (5.7)$$

где d – диаметр трубопровода,
l – длина трубопровода,
λ – коэффициент гидравлического трения, зависит в общем случае от относительной шероховатости $\Delta_r = \Delta/d$ и числа Рейнольдса: $\lambda = f(\Delta_r, \mathrm{Re})$

Коэффициент гидравлического трения можно определить по графикам или по нижеследующим формулам:

- для ламинарного режима ($Re \leq 2320$) и для зоны переходного режима ($2320 < Re \leq 4000 \ldots 40000$)

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}. \qquad (5.8)$$

- для области гидравлически гладких труб (при $4000 < \mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}' = 10/\Delta_r$) по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0.316}{\mathrm{Re}^{0.25}}. \qquad (5.9)$$

- для области доквадратичного сопротивления (при $\mathrm{Re}' < \mathrm{Re} \leq \mathrm{Re}'' = 500/\Delta_r$) по формуле А. Д. Альтшуля:

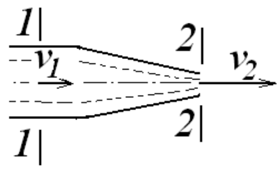
$$\lambda = 0.11(\Delta_r + 68/\mathrm{Re})^{0.25}. \qquad (5.10)$$

- для области квадратичного сопротивления (при $\mathrm{Re}'' < \mathrm{Re}$) по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0.11(\Delta_r)^{0.25}. \qquad (5.11)$$

5.2 Примеры решения задач

Задача 5.1. Определить абсолютное давление p_1 в сечении 1-1 горизонтально расположенного сопла гидромонитора, необходимое для придания воде в выходном сечении 2-2 скорости v_2 = 40 м/с, если скорость движения воды в сечении 1-1 v_1 = 3 м/с, а атмосферное давление $p_{атм}$ = 100000 Па.



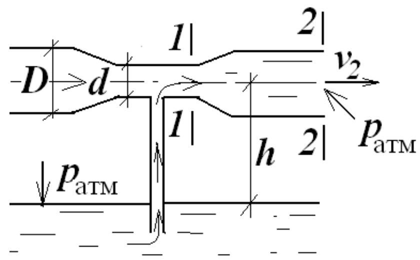
Решение. За расчетные примем сечения 1-1 и 2-2, в которых скорости заданы, давление p_1 подлежит определению, а давление p_2 в сечении 2-2 на выходе из гидромонитора равно атмосферному $p_2 = p_{атм}$. Плоскость сравнения *О-О* проведем через ось сопла, тогда удельные энергии положения $z_1 = z_2 = 0$. Учитывая сравнительно равномерное распределение скоростей по сечениям, значения коэффициентов кинетической энергии примем $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$. Из-за короткой длины сопла гидромонитора будем пренебрегать потерями энергии между сечениями 1-1 и 2-2. Тогда уравнение Д. Бернулли будет иметь следующий вид:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g},$$

откуда

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 100000 + 1000\cdot\left(40^2 - 3^2\right)/2 = 895500\ Па = 0{,}8955\ МПа.$$

Задача 5.2. Определить диаметр d суженной части горизонтального трубопровода, при котором вода поднимается на высоту h = 3,5 м (расход Q = 6 л/с, диаметр D = 10 см, атмосферное давление $p_{атм}$ = 100000 Па).



Решение. Сечение 1-1 принимаем в суженной части трубы, где нужно определить диметр d, сечение 2-2 – на выходе из расширенной части трубы, где давление равно атмосферному $p_2 = p_{атм}$. Плоскость сравнения совместим с осью трубы, тогда $z_1 = z_2 = 0$. Из-за малого расстояния между сечениями 1-1 и 2-2 будем пренебрегать потерями энергии на этом участке, а $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$. С учетом этого уравнение Д. Бернулли примет вид:

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_{атм}}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}. \tag{5.12}$$

Для того, чтобы вода поднялась из резервуара на высоту h, удельная энергия на поверхности воды в резервуаре $\frac{p_{атм}}{\rho g}$ должна быть на величину h выше, чем удельная энергия давления в сечении 1-1, то есть

$$\frac{p_{атм}}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + h. \qquad (5.13)$$

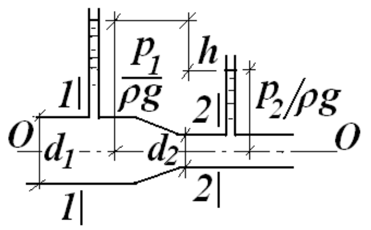
Решая уравнения (5.2) и (5.3), получим:

$$\frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_2^2}{2g}, \qquad (5.14)$$

где $v_1 = Q/\omega_1 = 4Q/(\pi d^2)$, $v_2 = Q/\omega_2 = 4Q/(\pi D^2)$. Подставим в (5.4) выражения для определения скоростей, откуда

$$d = \frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{2g\pi^2 h + 16Q^2/D^4}} = \frac{2\sqrt{0{,}006}}{\sqrt[4]{2\cdot 9{,}81\cdot 3{,}14^2\cdot 3{,}5 + 16\cdot 0{,}006^2/0{,}1^4}} = 0{,}03\,м.$$

Задача 5.3. По трубопроводу переменненного сечения протекает вода с расходом Q = 9 л/с, диаметр суженной части d_2 = 50 мм, диаметр основного трубопровода d_1 = 75 мм. Определить разность показаний пьезометров h.



Решение. Плоскость сравнения O-O возьмем по оси трубы, тогда уравнение Бернулли упростится, поскольку $z_1 = z_2 = 0$. Из рисунка видно: $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = h$, примем $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$.

Скорости в сечениях равны:

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{Q}{\pi d_1^2/4} = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4\cdot 9\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 0{,}075^2} = 2{,}04\,м/с,$$

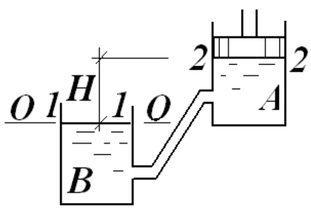
$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4\cdot 9\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 0{,}050^2} = 4{,}6\,м/с.$$

Подставим все в уравнение Бернулли, пренебрегая при этом потерями напора на малой длине участка 1-2:

$$0 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = 0 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + 0.$$

Отсюда $\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$ или $h = \frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = 0{,}87\,м.$

Задача 5.4. Поршень в цилиндре A, двигаясь вверх со скоростью v = 1 м/с, поднимает воду из резервуара B при разности уровней воды в цилиндре под поршнем и в резервуаре на величину H =3 м. Определить давление p под поршнем, если атмосферное



давление $p_{атм}$ = 100000 *Па*.

Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, плоскость сравнения *O-O* совпадает с 1-1:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_n .$$

Подставим сюда значения параметров: $z_1 = 0$, $z_2 = H$ = 3 м, $p_1 = p_{атм}$, $p_2 = p$, $v_1 \approx 0$, $v_2 = v$, примем $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, $h_п \approx 0$ из-за малой длины между сечениями 1-1 и 2-2, получим:

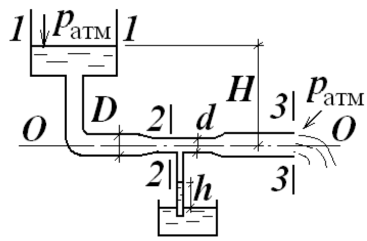
$$\frac{p_{атм}}{\rho g} = H + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} .$$

Отсюда

$$p = \left(\frac{p_{атм}}{\rho g} - H - \frac{v^2}{2g} \right) \cdot \rho g = p_{атм} - \rho g H - \rho \frac{v^2}{2} =$$

$$= 100000 - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 3 - 1000 \cdot \frac{1^2}{2} = 70070\, Па .$$

Задача 5.5. По трубопроводу, имеющему сужение, вытекает вода. Атмосферное давление $p_{атм}$ = 100000 Па, потери напора не учитывать. Определить:



а) диаметр d суженной части трубопровода, где давление p = 39200 Па, если напор H = 10 м, диаметр D = 100 мм.

б) напор H, при котором давление в суженной части трубопровода будет равным 49000 Па при D = 150 мм и d = 100 мм. На какую высоту h вода поднимется в трубке, присоединенной к суженной части трубопровода.

Решение. а) Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 3-3, плоскость сравнения *O-O* проходит по оси трубопровода:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} .$$

Подставим сюда значения параметров: $z_1 = H$ = 10 м, $z_3 = 0$, $p_1 = p_{атм} = p_3$, $v_1 \approx 0$ (из-за больших размеров резервуара), $v_3 = v = Q/\omega_3 = 4Q/(\pi D^2)$, примем $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, получим:

$$H + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{16 Q^2}{\pi^2 D^4} .$$

Отсюда расход равен:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2gH} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}100^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 10} = 0{,}11 м^3/с.$$

Далее составим уравнение Бернулли для сечений 2-2 и 3-3, плоскость сравнения проходит по оси трубы ($z_2 = z_3 = 0$, $p_2 = 39200$ Па. $p_3 = p_{атм} = 100000$ Па, $v_2 = Q/\omega_2 = 4Q/(\pi d^2)$, $v_3 = Q/\omega_3 = 4Q/(\pi D^2)$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, $Q = 0{,}11$ м^3/с):

$$0 + \frac{39200}{1000g} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{16 \cdot 0{,}11^2}{3{,}14^2 \cdot d^4} = 0 + \frac{100000}{1000g} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{16 \cdot 0{,}11^2}{3{,}14^2 \cdot 0{,}1^4}.$$

Отсюда $d = 0{,}0886$ м.

б) Составим уравнение Бернулли для сечений 2-2 и 3-3, плоскость сравнения проходит по оси трубы ($z_2 = z_3 = 0$, $p_2 = 49000$ Па, диаметры $D = 150$ мм, $d = 100$ мм, $p_3 = p_{атм} = 100000$ Па, $v_2 = 4Q/(\pi d^2)$, $v_3 = 4Q/(\pi D^2)$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$):

$$0 + \frac{49000}{1000g} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{3{,}14^2 \cdot 0{,}1^4} = 0 + \frac{100000}{1000g} + \frac{1}{2g} \cdot \frac{16 \cdot Q^2}{3{,}14^2 \cdot 0{,}15^4}.$$

Отсюда величина расхода $Q = 0{,}0885$ м^3/с.

Значение напора H найдем из уравнения Бернулли для сечений 1-1 и 3-3 при новых значениях параметров: плоскость сравнения O-O проходит по оси трубопровода, $z_1 = H$, $z_3 = 0$, $p_1 = p_{атм} = p_3$, $v_1 \approx 0$ (из-за больших размеров резервуара), $v_3 = v = Q/\omega_3 = 4Q/(\pi D^2)$, $Q = 0{,}0885$ м^3/с, $D = 150$ мм, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$:

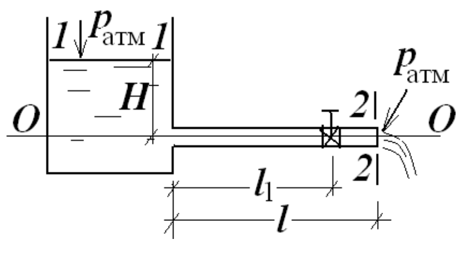
$$H + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \frac{16 \cdot 0{,}0885^2}{3{,}14^2 0{,}15^4}.$$

Отсюда $H = 1{,}28$ м.

Высота подъема воды в трубке

$$h = \frac{p_{атм} - 49000}{\rho g} = \frac{100000 - 49000}{1000 \cdot 9{,}81} = 5{,}2 м.$$

Задача 5.6. Из бака при постоянном напоре $H = 5$ м по горизонтальной трубе длиной $l = 100$ м и диаметром $d = 100$ мм вытекает вода. На расстоянии $l_1 = 80$ м установлен вентиль, который открыт полностью. Коэффициенты сопротивлений для вентиля $\varsigma_к = 4$, для выхода из бака в трубу $\varsigma_{вх} = 0{,}5$, коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0{,}03$. Определить расход Q.



Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_П.$$

Плоскость сравнения примем совпадающей с осью трубопровода, тогда $z_1 = H$, $z_2 = 0$. Для принятых сечений $p_1 = p_{атм} = p_2$, $v_1 \approx 0$ (из-за больших размеров резервуара), $v_2 = 4Q/(\pi d^2)$. Коэффициенты Кориолиса примем равными $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$. Местные потери напора по формуле Вейсбаха $h_м = \Sigma\zeta \frac{v^2}{2g} = (\zeta_{вх} + \zeta_к)\frac{v^2}{2g}$,

а потери напора по длине по формуле Дарси $h_\ell = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$.

Подставим значения всех параметров в уравнение Бернулли:

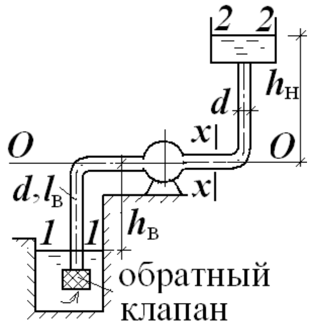
$$H + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \left(\zeta_{вх} + \zeta_{вент} + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Отсюда скорость движения жидкости по трубопроводу

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta_{вх} + \zeta_к + \lambda\frac{l}{d}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{1 + 0{,}5 + 4 + 0{,}03 \cdot 100 / 0{,}100}} = 1{,}64 \text{м/с}.$$

Расход $Q = v\omega = v\frac{\pi d^2}{4} = 1{,}64 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}100^2}{4} = 0{,}0128 \text{м}^3/\text{с} = 12{,}8 \text{л/с}.$.

Задача 5.7. Центробежный насос подает воду с температурой t = 15°С по новой стальной трубе диаметром d =125 мм и длиной $l_в$ =27 м при геометрической высоте $h_н$ = 30 м.



Определить: а) расход воды в трубопроводе, если манометрическое давление в сечении x-x $p_x^м$ = 0,26 МПа, б) давление p_x в сечении x-x при расходе Q = 16 л/с.

Указание: сначала принять квадратичную область сопротивления, а затем уточнить.

Решение. а) По [5, 13, 14, 16 и др.] находим: для новых стальных труб эквивалентную абсолютную шероховатость Δ = 0,1 мм, коэффициент кинематической вязкости воды при температуре 15°С $\nu = 1{,}3 \cdot 10^{-6}$ м²/с, коэффициенты местных сопротивлений: для плавного поворота на 90° $\varsigma_{пов}$ = 0,45, выхода из трубы в бак $\varsigma_{вых}$ = 1,0, обратного клапана $\varsigma_{кл}$ = 10.

Составим уравнение Бернулли для сечений x-x и 2-2:

$$z_x + \frac{p_x}{\rho g} + \frac{\alpha_x v_x^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{x-2},$$

где $z_x = 0$ (плоскость сравнения проходит по центру тяжести сечения x-x), $z_2 = h_н$ = 30 м, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, $p_2 = p_{атм}$, $p_x = p_{атм} + p_x^м$, $v_2 = 0$ из-за больших размеров резервуара, полные потери напора находим по формуле Дарси-Вейсбаха: $h_{x-2} = \left(\lambda\frac{h_н}{d} + \varsigma_{кл} + \varsigma_{пов}\right)\frac{v_x^2}{2g}$. Коэффициент гидравлического трения для квадратичной области $\lambda = 0.11(\Delta/d)^{0.25}$= $0{,}11(0{,}1/125)^{0{,}25}$ = 0,018.

Подставим все значения в уравнение Бернулли:

$$0+\frac{p_x^{м}+p_{атм}}{\rho g}+\frac{v_x^2}{2g}=30+\frac{p_{атм}}{\rho g}+0+\left(\zeta_{пов}+\zeta_{вых}+\lambda\frac{h_{н}}{d}\right)\frac{v_x^2}{2g}.$$

Отсюда скорость движения жидкости по трубопроводу

$$v_x=\sqrt{\frac{\frac{p_x^{м}}{\rho g}\cdot 2g-30}{\zeta_{пов}+\zeta_{вых}+\lambda\frac{h_{н}}{d}-1}}=\sqrt{\frac{\frac{0,26\cdot 10^6}{1000\cdot 9,81}\cdot 2\cdot 9,81-30}{0,45+1,0+0,018\cdot 30/0,125-1}}=10,14 м/c=v.$$

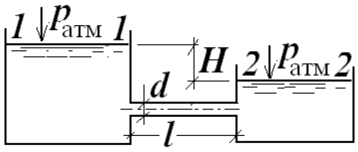
Расход Q = v·ω = v·π·d^2/4 = 10,14·3,14·0,125^2/4 = 0,124 м^3/с = 124 л/с.

Проверим область сопротивления, для чего найдем:

- число Рейнольдса Re = vd/ν =10,14·0,125/(1,3·10^{-6}) = 975000,
- относительную шероховатость $\Delta_{г}$ = Δ/d = 0,1/125 = 0,0008.
- второе предельное число Рейнольдса Re''= 500/0,0008 = 625000.

Поскольку $Re > Re''$, то действительно имеет место область квадратичного сопротивления и приведенные расчеты, включая λ, не нужно уточнять.

Задача 5.8. По трубопроводу диаметром d = 50 мм и длиной l = 12 м движется керосин. Чему равен напор H, при котором происходит смена ламинарного режима турбулентным. Температура жидкости 20^{o}С.



Указание. Пользоваться формулой для потерь на трение при ламинарном режиме.

Решение. По [5, 13, 14, 16 и др.] находим коэффициент кинематической вязкости керосина при температуре 20^{o}С ν = 2,5·10^{-6} м^2/с, коэффициенты местных сопротивлений: для входа из бака в трубу $\varsigma_{вх}$ = 0, 5, выхода из трубы в бак $\varsigma_{вых}$ = 1,0.

На границе смены ламинарного режима число Рейнольдса Re = vd/ν = 2320, отсюда скорость движения керосина по трубопроводу v = 2320·2,5·10^{-6}/0,050 = 0,116 м/с. Для ламинарного режима и переходной зоны коэффициент гидравлического трения λ = 64/Re = 64ν/(vd) = 64·2,5·10^{-6}/(0,116·0,050) = 0,028.

Потери напора на местных сопротивлениях (вход в трубу и выход в резервуар)

$$h_{м} = (\varsigma_{вх} + \varsigma_{вых})v^2/(2g) = (0,5 + 1,0)\cdot 0,116^2/(2\cdot 9,81) = 0,001 \text{ м},$$

а на трение

$$h_l = \lambda l v^2/(2gd) = 0,028\cdot 12\cdot 0,116^2/(2\cdot 9,81\cdot 0,050) = 0,0046 \text{ м}.$$

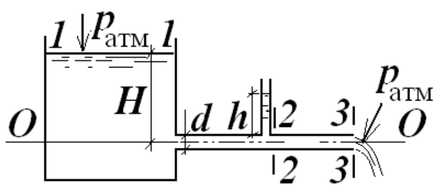
Как видно, из-за малости скорости потери напора незначительны.

Для составления уравнения Бернулли выделим сечения 1-1 и 2-2, плоскость сравнения примем на уровне сечения 2-2, тогда $z_1 = H,\ z_2 = 0$, $p_1 = p_{атм} = p_2$, $v_1 \approx v_2 \approx 0$. Приняв коэффициенты Кориолиса $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, подставим в уравнение Бернулли значения входящих параметров:

$$H + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 + 0{,}001 + 0{,}0046.$$

Отсюда искомый напор H = 0,0056 м.

Задача 5.9. При истечении жидкости из резервуара в атмосферу по горизонтальной трубе диаметром d = 300 мм и длиной $2l$ = 90 м уровень в пьезометре, установленном посередине длины трубы, равен h = 4,5 м. Определить расход Q и коэффициент гидравлического трения трубы λ, если статический напор в баке постоянен и равен H = 10 м. Сопротивлением входа из резервуара в трубу пренебречь.



Решение. Плоскость сравнения *О-О* проведем по оси трубопровода Входящее в уравнение Бернулли параметры для сечений 1-1, 2-2 и 3-3 равны: $z_1 = H$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, $p_1 = p_{\text{атм}} = p_3$, $p_2 = p_{\text{атм}} + \rho g h$, $v_1 \approx 0$ из-за больших размеров резервуара, $v_2 = v_3 = v$, коэффициенты Кориолиса примем равными $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha_3 \approx 1$, полные потери напора без учета местных потерь согласно условию задачи на участках 1-2 и 2-3 равны между собой $h_{1\text{-}2} = \lambda l v^2/(2gd) = h_{2\text{-}3}$.

Составим уравнение Бернулли два раза:

- для сечений 1-1 и 2-2

$$H + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм} + \rho g h}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

- для сечений 2-2 и 3-3

$$0 + \frac{p_{\text{атм}} + \rho g h}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

Отсюда после сокращений получим:

$$H - h = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \quad \text{и} \quad h = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

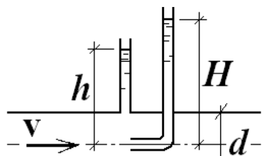
Решая эти два уравнения с двумя неизвестными, получим:

$$v = \sqrt{2g(H - 2h)} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot (10 - 2 \cdot 4{,}5)} = 4{,}43 \text{ м/с},$$

$$\text{и } \lambda = \frac{2gdh}{l v^2} = \frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}300 \cdot 4{,}5}{45 \cdot 4{,}43^2} = 0{,}03.$$

Расход жидкости $Q = v\pi d^2/4 = 4{,}43 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3^2/4 = 0{,}313$ м^3/с.

Задача 5.10. По длинной трубе диаметром d = 50 *мм* протекает жидкость (плотность ρ = 900 кг/м^3 и коэффициент кинематической вязкости ν = 2 Ст). Определить расход жидкости и давление в сечении, где установлены пьезометр (h = 60 см) и трубка Пито (H = 80 см).



Решение. Разница показаний трубки Пито и пьезометра представляет собой скоростной напор: $H - h = \alpha v^2/(2g)$. Допустим**,** что имеет место турбулентный режим движения, для которого примем значение коэффициента кинетической энергии $\alpha \approx 1$, тогда скорость движения жидкости в трубе $v = \sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot(0{,}8-0{,}6)} = 1{,}981$ м/с.

Проверим режим течения. Число Рейнольдса $Re = vd/\nu = 1{,}981\cdot 0{,}050/(2\cdot 10^{-4}) = 495$. Получилось, что $Re < Re_к = 2320$, то есть имеем ламинарный режим, для которого $\alpha = 2$. Уточненное значение скорости

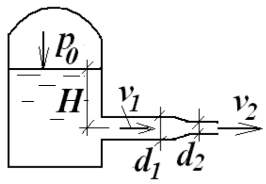
$v = \sqrt{2g(H-h)/\alpha} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot(0{,}8-0{,}6)/2} = 1{,}4$ м/с. Поскольку полученное значение скорости меньше ранее полученного значения 1,98 м/с, то при скорости 1,4 м/с режим течение также будет ламинарным.

Расход $Q = v\pi d^2/4 = 1{,}4\cdot 3{,}14\cdot 0{,}05^2/4 = 0{,}00275$ м^3/с = 2,75 л/с.

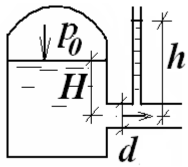
Избыточное давление в сечении с пьезометром $p = \rho g h = 900\cdot 9{,}81\cdot 0{,}6 = 5297{,}4$ Па.

5.3 Задачи для самостоятельного решения

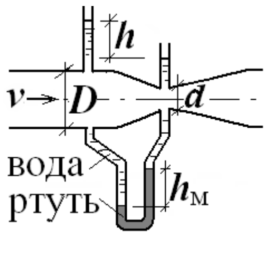
Задача 5.11. Из напорного бака вода течет по трубе диаметром d_1 = 20 мм и затем вытекает в атмосферу через насадок (брандспойт) с диаметром выходного отверстия d_2 = 10 мм. Избыточное давление воздуха в баке p_0 = 0,18 МПа, высота H = 1,6 м. Пренебрегая потерями энергии, определить скорости течения воды в трубе v_1 и на выходе из насадка v_2.



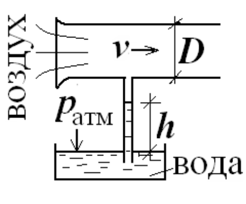
Задача 5.12. Определить расход керосина, вытекающего из бака по трубопроводу диаметром d = 50 мм, если избыточное давление воздуха в баке p_0 = 16 кПа, высота уровня H =1 м, высота подъема керосина в пьезометре h 1,75 м. Потерями энергии пренебречь. Плотность керосина 800 кг/м^3.



Задача 5.13. К расходомеру Вентури присоединены два пьезометра и дифференциальный ртутный манометр. Выразить расход воды Q через размеры расходомера D и d, разность показаний пьезометров h, а также через показание дифференциального манометра $h_м$. Потери напора в уравнении Бернулли определяются по формуле: $h_п = \varsigma v^2/(2g)$, где ς – известный коэффициент сопротивления плавного сужения трубопровода, v – скорость перед сужением.

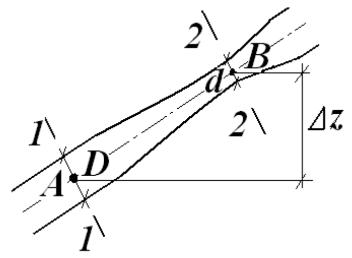


Задача 5.14. Определить весовой расход воздуха по трубе с плавно закругленным входом и цилиндрической частью диаметром D = 200 мм, если показание вакуумметра h = 250 мм. Плотность воздуха $\rho_{воз}$ = 1,25

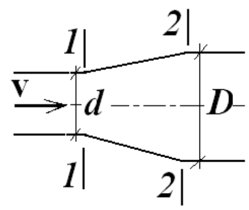


кг/м^3. Потери напора в уравнении Бернулли определяются по формуле: $h_п=\varsigma v^2/(2g)$, где ς = 0,1 - коэффициент сопротивления плавного сужения трубопровода, v – скорость в трубопроводе.

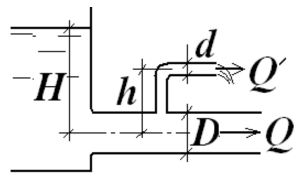
Задача 5.15. Разность давлений в сечениях 1-1 и 2-2 трубчатого расходомера с диаметрами D = 50 мм и d = 30 мм составляет Δp = 39,2 кПа. Определить расход воды Q, если: а) ось расходомера горизонтальна, б) ось расходомера наклонена и точка A в сечении 1-1 ниже точки B в сечении 2-2 на величину Δz = 1,5 м.



Задача 5.16. Пренебрегая потерями напора, определить степень расширения диффузора $n = (D/d)^2$, при котором давление в сечении 2-2 возрастет в два раза по сравнению с давлением в сечении 1-1. Расчет провести при следующих данных: расход жидкости Q = 1,5 л/с, диаметр d = 20 мм, давление в сечении 1-1 p_1 = 10 кПа, плотность жидкости ρ = 1000 кг/м^3, режим течения принять: а) ламинарным, б) турбулентным. Поток в диффузоре считать стабилизированным и безотрывным.

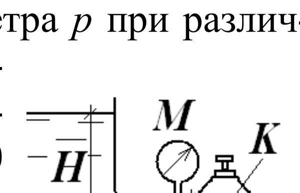


Задача 5.17. Вода течет по трубе диаметром D = 20 мм, имеющей отвод d = 8 мм. Пренебрегая потерями напора, определить расход жидкости в отводе Q', если расход в основной трубе Q = 1,2 л/с, высоты H = 2 м, h = 0,5 м. режим течения считать турбулентным.



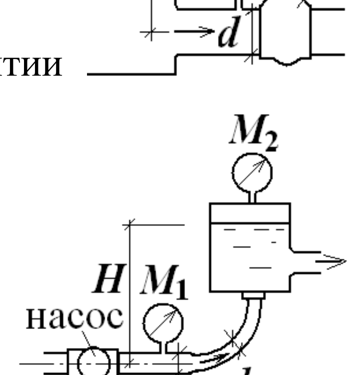
Указание. Считать, что давление перед отводом расходуется на создание скоростного напора в отводе и подъем жидкости на высоту h.

Задача 5.18. От бака, в котором с помощью насоса поддерживается постоянное давление жидкости, отходит трубопровод диаметром d = 50 мм. Между баком и краном K на трубопроводе установлен манометр. При закрытом положении крана p_0 = 0,5 МПа. Найти связь между расходом жидкости в трубопроводе Q и показанием манометра p при различных открытиях крана, приняв коэффициент сопротивления входного участка трубопровода (от бака до манометра) равным ς = 0,5. Плотность жидкости ρ = 800 кг/м^3.



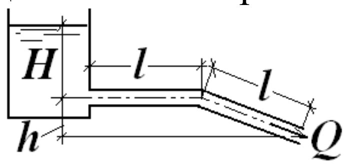
Найти расход жидкости при полном открытии крана, когда показание манометра равно p = 0,485 МПа.

Задача 5.19. Насос нагнетает жидкость в напорный бак, где установились постоянный уровень на высоте H = 2 м и постоянное давление p_2 = 0,2 МПа. Манометр, установленный на выходе из на-



соса на трубе диаметром d_1 = 75 мм, показывает p_1 = 0,25 МПа. Определить расход жидкости Q, если диаметр искривленной трубки, подводящий жидкость к баку, равен d_2 = 50 мм, коэффициент сопротивления этой трубы принять равным ς = 0,5. Плотность жидкости ρ = 800 кг/м^3.

Задача 5.20. Из большого резервуара, в котором поддерживается постоянный уровень, по стальному трубопроводу вытекает трансформаторное масло с температурой 20°С. Диаметр трубопровода d = 70 мм, наклонная и горизонтальные части трубопровода одинаковой длины l = 3,4 м. Высота уровня жидкости над горизонтальной частью трубопровода H = 6,2 м. Конец наклонной части трубопровода находится ниже горизонтальной его части на величину h = 1,5 м.



Определить расход жидкости, протекающий по трубопроводу, и построить пьезометрическую и напорную линии.

6 РАСЧЕТ КОРОТКИХ ТРУБОПРОВОДОВ
6.1 Краткие теоретические сведения

Короткими называют трубы, в которых потери напора на местных сопротивлениях превышают (5…10)% от потерь по длине: $h_м \geq (0{,}05…0{,}10)h_l$. В противном случае трубы принято считать длинными, ориентировочно при длине трубы $l \geq (50…100)$ м. При расчете коротких трубопроводов обычно пользуются уравнениями Бернулли, неразрывности

$$Q = \text{v}_1\omega_1 = \text{v}_2\omega_2 = \text{v}_3\omega_3 \tag{6.1}$$

и формулами для определения потерь напора.

При расчете напорных трубопроводов встречаются следующие основные типы задач.

1. Известны: расход жидкости Q, длина трубопровода l и его диаметр d, род жидкости *Ж* и ее температура t для нахождения по справочнику плотности ρ, коэффициента кинематической вязкости ν, модуля объемной упругости E, давления насыщенных паров и других параметров, материал трубопровода M для определения эквивалентной абсолютной шероховатости Δ, высотные отметки и некоторые другие параметры. Требуется найти напор H.

Задача может быть решена следующим образом. По известным параметрам Q и d находят скорость $\text{v} = 4Q/(\pi d^2)$ и число Рейнольдса $Re = \text{v}d/\nu$. Далее, зная Re и относительную шероховатость $\Delta_г$, определяют зону сопротивления и коэффициент гидравлического трения λ. Затем по формулам Дарси и Вейсбаха определяются потери напора на трение по длине и на местных сопротивлениях, которые подставляются в уравнение Бернулли и находят искомый напор H.

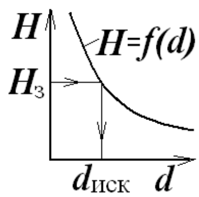
2. Требуется найти расход жидкости Q, зная диаметр трубопровода d, ее длину l, напор H, род жидкости *Ж* и ее температуру t, материал трубопровода M и другие параметры.

Поскольку в данном случае невозможно предварительно найти скорость течения жидкости, а значит, число Рейнольдса и коэффициент гидравлического трения λ, то решить задачу в явном виде не удается. Придется пользоваться графоаналитическим методом или другими итерационными методами. Один из простых способов решения задачи состоит в том, что на первом этапе можно задаться квадратичной областью сопротивления, по формуле Шифринсона или другой найти λ и далее по уравнению Бернулли найти расход Q' в первом приближении. Во втором приближении, зная Q' , найти v, Re, λ и по уравнению Бернулли найти расход Q'' во втором приближении. Если Q' и Q'' совпадают с необходимой точностью, то расчет прекращается, иначе делают следующее приближение: зная Q'', находят v, Re, λ и по уравнению Бернулли находят расход Q''' и т. д.

Как показывает практика решения задач, можно в первом приближении задаться величиной $\lambda = 0{,}02\ldots0{,}03$ непосредственно и найти Q', а далее поступать как сказано выше.

3. Известны: расход жидкости Q, длина трубопровода l напор H, род жидкости *Ж*, материал трубопровода M и некоторые другие параметры. Требуется найти диаметр трубопровода d.

В этом случае решить задачу явным образом также невозможно и обычно рекомендуется графоаналитический способ путем построения кривой взаимозависимости между напором H и диаметром d. По произвольно выбранным значениям диаметра трубопровода d определяют коэффициент гидравлического трения λ и далее напор H. По этим данным строят график зависимости $H = f(d)$. Отложив известное по условию задачи значение напора $H_з$, по построенной кривой находят искомое значение диаметра $d_{иск}$.

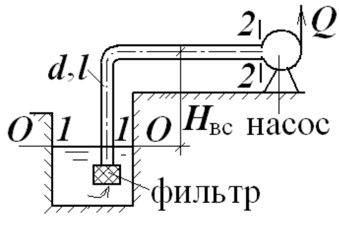


Можно поступать как выше отмечено для решения задачи второго типа: в первом приближении задаться $\lambda = 0{,}02\ldots0{,}03$ с последующей проверкой этого значения. В случае необходимости выполнить расчеты по второму, третьему и т.д. приближениям.

Надо отметить, что графоаналитические способы решения задач были основными до появления и широкого применения компьютерных технологий. В настоящее время не только разработаны и можно разработать собственные программы расчета трубопроводов, такими возможностями обладают также электронные таблицы и специализированные пакеты программ решения неявных уравнений.

6.2 Примеры решения задач

Задача 6.1. Определить максимальный расход бензина Q, который можно допустить во всасывающем трубопроводе насоса бензоколонки из условия отсутствия кавитации перед входом в насос, если высота всасывания $H_{вс} = 4$ м, длина трубы $l = 6$ м, диаметр $d = 24$ мм, предельное давление бензина у входа в насос принять $p_{нп} = 40$ кПа. Режим течения считать турбулентным. Коэффициент сопротивления приемного фильтра $\varsigma_ф = 2$, коэффициент сопротивления трения $\lambda = 0{,}03$, атмосферное давление $p_{атм} = 750$ мм.рт.ст., плотность бензина $\rho_б = 750$ кг/м^3.



Решение. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, плоскость сравнения O-O:

$$z_1+\frac{p_1}{\rho_б g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho_б g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_п, \qquad (6.2)$$

где z_1 = 0 - расстояние от плоскости сравнения *O-O* до центра тяжести первого сечения, $z_2 = H_{вс}$, коэффициенты Кориолиса примем примерно равными 1,0: $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, $p_1 = p_{атм} = 750\cdot98100/735{,}6 \approx 100000$ Па, $p_2 = p_{нп}$ = 40000 Па. ($p_{нп}$ - давление насыщенных паров бензина), скорость в сечении 1-1 $v_1 \approx 0$ из-за больших размеров приемного резервуара, скорость во втором сечении равна скорости движения бензина в трубопроводе $v_2 = v$.

Полные потери напора по формуле Дарси-Вейсбаха

$$h_п=\left(\lambda\frac{l}{d}+\varsigma_ф+\varsigma_{пов}\right)\frac{v^2}{2g},$$

где $\varsigma_{пов}$ = 0,45 – коэффициент местного сопротивления поворота трубы на 90° [5, 13, 14, 16 и др.].

Подставим в уравнение Бернулли значения параметров:

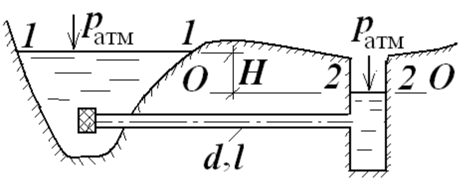
$$0+\frac{100000}{750\cdot9{,}8}+0=4+\frac{40000}{750\cdot9{,}8}+\frac{v^2}{2\cdot9{,}81}+\left(0{,}03\frac{6{,}0}{0{,}024}+2+0{,}45\right)\frac{v^2}{2\cdot9{,}8},$$

отсюда искомая скорость:

$$v=\sqrt{\frac{\left(\frac{100000-40000}{750\cdot9{,}8}-4\right)\cdot2\cdot9{,}8}{1+0{,}03\frac{6}{0{,}024}+2+0{,}45}}=2{,}73 м/с.$$

Расход $Q = v\cdot\omega = v\cdot\pi\cdot d^2/4 = 2{,}73\cdot3{,}14\cdot0{,}024^2/4 = 0{,}0012$ м³/с = 1,2 л/с.

Задача 6.2. Из реки в колодец поступает вода с расходом *Q* = 10 л/с по трубе длиной *l* = 120 м, имеющей сетку с обратным клапаном (коэффициент местного сопротивления $\varsigma_{кл}$ = 6). Приняв коэффициент трения λ = 0,022, определить разность уровней *H* в реке и в колодце, если диаметр трубы *d* = 100 мм.



Решение. Сечение 1-1 проведем на уровне воды в реке, а 2-2 – в колодце. Плоскость сравнения *O-O* примем совпадающей с 2-2. Тогда $z_1 = H$, $z_2 = 0$, $p_1 = p_{атм} = p_2$, $v_1 = v_2 \approx 0$ (из-за больших размеров сечения 2-2 и 1-1 по сравнению с сечением трубы).

Местные потери напора по формуле Вейсбаха $h_м=\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}=\left(\zeta_{кл}+\zeta_{вых}\right)\frac{v^2}{2g}$,

а потери напора по длине по формуле Дарси $h_l=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$.

Подставим значения всех параметров в уравнение Бернулли при $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$:

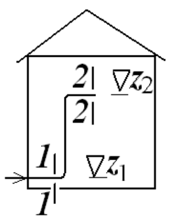
$$H + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_{атм}}{\rho g} + 0 + \left(\zeta_{кл} + \zeta_{вых} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{\text{v}^2}{2g}.$$

Отсюда искомый напор при $\text{v} = 4Q/(\pi d^2)$ равен:

$$H = \left(\zeta_{кл} + \zeta_{вых} + \lambda \frac{l}{d} \right) \frac{1}{2g} \left(\frac{4Q}{\pi d^2} \right)^2 =$$

$$= \left(6 + 1 + 0{,}022 \cdot \frac{120}{0{,}1} \right) \cdot \frac{1}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left(\frac{4 \cdot 0{,}010}{3{,}14 \cdot 0{,}1^2} \right)^2 \approx 2{,}04\text{м}.$$

Задача 6.3. Газ по домовому газопроводу длиной l = 28 м и диаметром d = 25 мм подается с отметки $z_1 = 0$, до горелки на пятом этаже (z_2 = 17 м). Плотность наружного воздуха $\rho_в$ = 1,2 кг/м^3, гидравлический коэффициент трения λ = 0,04, суммарный коэффициент местных сопротивлений $\sum\varsigma$ = 7. Определить массовый расход газа m (кг/час), если манометрическое давление в начале газопровода $p_м$ = 11.76 Па, а плотность газа $\rho_г$ = 0,7 кг/м^3.



Решение. С целью составления уравнения Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 плоскость сравнения возьмем проходящей через центр тяжести сечения 1-1, тогда $z_1 = 0$, z_2 = 17 м. Коэффициенты кинетической энергии примем равными $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, а скорости течения газа в рассматриваемых сечениях - одинаковыми: $\text{v}_1 = \text{v}_2 = \text{v}$. Полные потери напора при движении газа от сечения 1-1 до сечения 2-2 равны:

$$h_П = \left(\lambda \frac{l}{d} + \Sigma\zeta \right) \frac{\text{v}^2}{2g} = \left(0{,}04 \frac{28}{0{,}025} + 7 \right) \cdot \frac{\text{v}^2}{2 \cdot 9{,}81}.$$

Если атмосферное давление на первом этаже (у сечения 1-1) обозначить $p_{атм1}$, то на пятом этаже (в сечении 2-2) атмосферное давление будет равно: $p_{атм2} = p_{атм1} - \rho_в g(z_2 - z_1) = p_{атм1} - 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot (17 - 0)$.

Значения абсолютных давлений в сечениях 1-1 и 2-2 равны

$$p_{атм2} = p_{атм1} + p_м = p_{атм1} + 11{,}76, \quad p_2 = p_{атм2} = p_{атм1} - 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 17.$$

С целью нахождения скорости движения газа v подставим все в уравнение Бернулли:

$$0 + \frac{p_{атм1} + 11{,}76}{0{,}7 \cdot 9{,}81} + \frac{\text{v}^2}{2 \cdot 9{,}81} = 17 + \frac{p_{атм1} - 1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 17}{0{,}7 \cdot 9{,}81} + \frac{\text{v}^2}{2 \cdot 9{,}81} + \left(0{,}04 \cdot \frac{28}{0{,}025} + 7 \right) \frac{\text{v}^2}{2 \cdot 9{,}81} \cdot$$

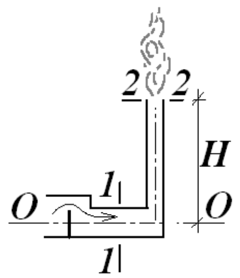
Или

$$\frac{11{,}76}{0{,}7 \cdot 9{,}81} = 17 - \frac{1{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 17}{0{,}7 \cdot 9{,}81} + \left(0{,}04 \cdot \frac{28}{0{,}025} + 7 \right) \frac{\text{v}^2}{19{,}62} \cdot$$

Откуда v = 2,463 м/с.

Объемный расход газа $Q = \text{v} \cdot \omega = \text{v} \cdot \pi \cdot d^2/4 = 2{,}463 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}025^2/4$ = 0,00121 м^3/с, а часовой (за t = 3600сек) массовый расход газа $m = Qt\rho_г$ = $0{,}00121 \cdot 3600 \cdot 0{,}7$ = 3,05 кг/час.

Задача 6.4. По вытяжной трубе d = 700 мм газ удаляется из борова котельной установки, где имеется разряжение, соответствующее высоте 10 м.вод.ст. Плотность газа $\rho_г$ = 0,7 кг/м^3, а плотность воздуха $\rho_в$ = 1,2 кг/м^3. Отношение площадей сечений борова и трубы ω_1/ω_2 = 2. Гидравлический коэффициент трения λ = 0,02. Коэффициент местного сопротивления на входе в трубу с поворотом ς = 0,7.



Определить необходимую высоту трубы H для создания тяги, если весовой расход дымовых труб G = 78,45 кН/час.

Решение. Массовый расход газа $m = G/g$, а объемный расход газа за 1 час (t = 3600 сек) $Q = m/(t\rho_г) = G/(t\rho_г g)$. Скорость движения газа в трубе (сечение 2-2)

$$\text{v}_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot G}{\rho_Г g \cdot t \cdot \pi d^2} = \frac{4 \cdot 78450}{0{,}7 \cdot 9{,}81 \cdot 3600 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}700^2} = 8{,}24 \text{м/с}.$$

По уравнению неразрывности скорость движения газа в борове (сечение 1-1) $\text{v}_1 = \text{v}_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} = 8{,}24 \cdot \frac{1}{2} = 4{,}12 \text{м/с}$.

Обозначим атмосферное давление в сечении 1-1 $p_{а1}$, тогда атмосферное давление во втором сечении $p_{а2} = p_{а1} - \rho_в gH$. Абсолютное давление в сечении 1-1 $p_1 = p_{а1} - 10\rho_{воды}g$ (здесь 10 м.вод.ст. принят по условию задачи), а в сечении 2-2 $p_2 = p_{а2} = p_{а1} - \rho_в gH$.

Местные потери напора на входе в трубу с поворотом $h_м = \zeta \frac{\text{v}_1^2}{2g} = 0{,}7 \cdot \frac{4{,}12^2}{19{,}62} = 0{,}61 \text{м}$. Потери напора на трение по длине, равной высоте трубы $h_l = \lambda \frac{H}{d} \frac{\text{v}_2^2}{2g} = 0{,}02 \cdot \frac{H}{0{,}700} \cdot \frac{8{,}24^2}{19{,}62}$.

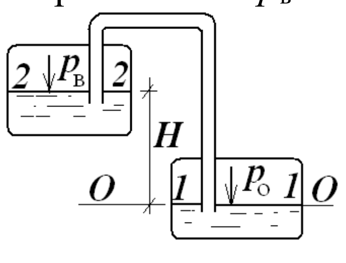
Плоскость сравнения примем по оси борова: $z_1 = 0$, $z_2 = H$. Напишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2, приняв при $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$:

$$0 + \frac{p_{a1} - 10\rho_{воды} g}{\rho_Г g} + \frac{4{,}12^2}{19{,}62} = H + \frac{p_{a1} - \rho_в gH}{\rho_Г g} + \frac{8{,}24^2}{19{,}62} + 0{,}61 + 0{,}02 \frac{H}{0{,}700} \cdot \frac{8{,}24^2}{19{,}62}$$

Отсюда H = 31,1 м.

Задача 6.5. Труба, соединяющая два бака, заполнена жидкостью вязкостью ν = 10^{-6} м^2/с и плотностью ρ = 1000 кг/м^3. Длина трубы l = 2,5 м., диаметр d = 8 мм, коэффициент сопротивления колена $\varsigma_к$ = 0,5. Избыточное давление в нижнем баке $p_о$ = 7 кПа, вакуум в верхнем баке $p_в$ = 3 кПа. Трубу считать гидравлически гладкой.

Определить, при какой высоте H жидкость будет двигаться из нижнего бака в верхний с расходом Q = 0,05 л/с, а при какой высоте H будет двигаться в обратном направлении.



Решение. Площадь сечения трубы

$$\omega = \pi \cdot d^2/4 = 3{,}14 \cdot 0{,}008^2/4 = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{м}^2.$$

Скорость течения воды в трубе

$$\text{v} = Q/\omega = 0{,}05 \cdot 10^{-3}/(5 \cdot 10^{-5}) = 1\ \text{м/с}.$$

Коэффициенты местных сопротивлений равны: для входа из бака в трубу $\varsigma_{вх} = 0{,}5$, для выхода из трубы в бак $\varsigma_{вых} = 1{,}0$. Скоростями в баках (в сечениях 1-1 и 2-2) будем пренебрегать из-за больших размеров баков: $\text{v}_1 \approx \text{v}_2 \approx 0$.

Число Рейнольдса $Re = \text{v}d/\nu = 1{,}0 \cdot 0{,}008/10^{-6} = 8000$.

Для гидравлически гладкой зоны сопротивления коэффициент трения найдем по формуле Блазиуса: $\lambda = 0{,}3164/Re^{0,25} = 0{,}033$. Потери напора в трубе

$$h_{п} = \left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_{вх} + 2\zeta_{к} + \zeta_{вык}\right)\frac{\text{v}^2}{2g} = \left(0{,}033 \cdot \frac{2{,}5}{0{,}008} + 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5 + 1\right)\frac{1^2}{19{,}62} = 0{,}65\text{м}\ .$$

Для случая движения жидкости из нижнего бака в верхний напишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 (плоскость сравнения *О-О* совпадает с 1-1, $z_1 = 0$, $z_2 = H$, $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 1$, $p_1 = p_{атм} + p_{о}$, $p_2 = p_{атм} - p_{в}$):

$$0 + \frac{p_{атм} + p_0}{\rho g} + 0 = H + \frac{p_{атм} - p_{в}}{\rho g} + 0 + h_{П}. \qquad (6.4)$$

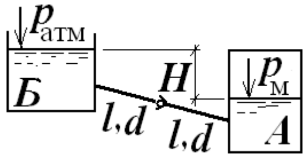
Отсюда искомый напор $H = \dfrac{p_0 + p_в}{\rho g} - h_П = \dfrac{(7+3)10^3}{1000 \cdot 9{,}81} - 0{,}65 = 0{,}37\text{м}.$

При движении жидкости в обратном направлении (из верхнего бака в нижний) в уравнении (6.4) потери напора $h_{п}$ будут в левой части и конечная формула для определения напора получится в виде

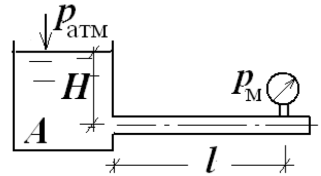
$$H = \frac{p_0 + p_в}{\rho g} + h_П = \frac{(7+3)10^3}{1000 \cdot 9{,}81} + 0{,}65 = 1{,}67\text{м}.$$

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.6. Определить манометрическое давление $p_{м}$ на поверхности воды в закрытом резервуаре *А*, необходимое для обеспечения подачи воды расходом $Q = 3{,}0$ л/с при температуре 20°С в открытый резервуар *Б*? Разность уровней в резервуарах $H = 5{,}4$ м. Трубы алюминевые, имеют длину $2l = 10{,}0$ м и диаметр $d = 50$ мм. Посередине трубопровода установлен обратный клапан с коэффициентом местного сопротивления $\varsigma_{кл} = 6{,}5$.

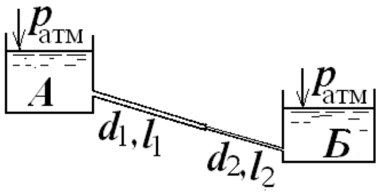


Задача 6.7. В баке *А* трансформаторное масло подогревается до температуры 75°С и самотеком по трубопроводу из нержавеющей стали попадает в производственный цех. Какой должна быть величина диамет-

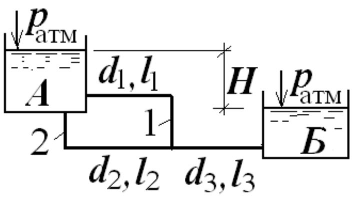


ра трубопровода, чтобы обеспечивалась подача жидкости в количестве Q = 1,8 л/с, а манометрическое давление в конце трубопровода было не ниже $p_м$ = 23 кПа, если напор в баке H = 6,2 м. При расчете принять, что местные потери напора составляют 20 % от потерь напора по длине.

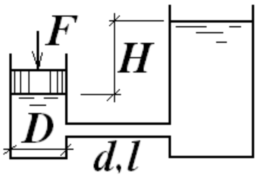
Задача 6.8. Из большого открытого резервуара *А* по трубопроводу, состоящему из двух последовательно соединенных алюминиевых трубопроводов, течет керосин при температуре 20°С в резервуар *Б*. Уровни в резервуарах поддерживаются постоянными, а разность уровней в них H = 8,0 м. Длины труб l_1 = 10 м, l_2 = 9,8 м, а диаметры d_1 = 60 мм, d_2 = 40 мм. Определить расход жидкости, протекающий из резервуара *А* в резервуар *Б*.



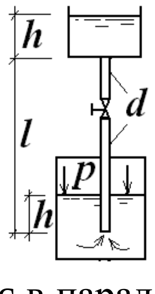
Задача 6.9. Из большого открытого резервуара *А* по трубопроводу, состоящему из трех медных труб, течет глицерин при температуре 20°С в резервуар *Б*. Уровни в резервуарах поддерживаются постоянными, а разность уровней в них H = 7,2 м. Длины труб l_1 = 10 м, l_2 = 10,0 м, l_3 = 9,8 м , а диаметры d_1 = 60 мм, d_2 = 40 мм, d_3 = 40 мм. Определить расход жидкости, протекающий из резервуара *А* в резервуар *Б*, а также распределение расходов между параллельно соединенными трубопроводами 1 и 2. В расчетах принять, что местные потери напора составляют 10 % от потерь напора по длине.



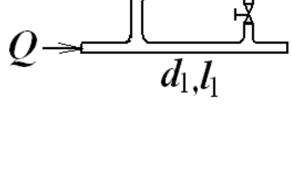
Задача 6.10. Поршень диаметром D = 180 мм движется равномерно вниз в цилиндре, подавая воду в открытый резервуар с постоянным уровнем. Диаметр трубопровода d = 60 мм, длина l = 18 м. Когда поршень находится ниже уровня жидкости в резервуаре на H = 5 м, потребная для его перемещения сила F = 12,4 кН. Коэффициент гидравлического трения принять λ = 0,03. Определить скорость поршня и расход жидкости в трубопроводе.



Задача 6.11. Бензин подается в открытый верхний бак с постоянным уровнем по трубе длиной l = 6 м и диаметром d = 50 мм за счет давления воздуха в нижнем замкнутом резервуаре. Определить давление p воздуха, при котором расход Q = 4 л/с. Коэффициент местного сопротивления вентиля ς = 8,0, эквивалентная шероховатость стенок трубы Δ = 0,2 мм.

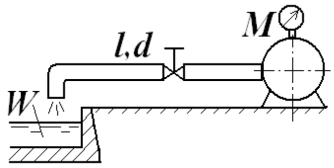


Задача 6.12. Определить распределение расхода Q = 25 л/с в параллельно соединенными трубами, одна из которых имеет длину l_1 = 30 м и диаметр d_1 = 50 мм, а другая с задвижкой с коэффициентом местного сопротивления ς = 3 имеет длину l_2 = 50 м и диаметр d_2 = 100 мм. Какова будет потеря напора на разветвленном участке? Значения коэффициентов гидравлического трения принять

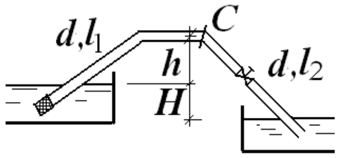


соответственно равными $\lambda_1 = 0{,}04$ и $\lambda_2 = 0{,}03$. Потери напора в тройниках не учитывать.

Задача 6.13. Наполнение бассейна из магистрали с заданным избыточным давлением $p_м = 245$ кПа производится по горизонтальной трубе общей длиной $l = 45$ м, снабженной вентилем ($\varsigma = 4$) и отводом ($\varsigma = 0{,}3$). Определить диаметр трубы, который обеспечит наполнение бассейна количеством воды $W = 36$ м^3 за время $t = 30$ мин.



Задача 6.14. По сифонному стальному трубопроводу, для которого задан напор $H = 6$ м, необходимо подавать расход воды $Q = 50$ л/с. Вакуумметрическая высота в самом опасном сечении C, расположенной на высоте $h = 4$ м, не должна превосходить 7 м. Длина трубопровода до сечения C равна $l_1 = 100$ м, а ниже - $l_2 = 60$ м. В начале трубопровод снабжен приемным клапаном с сеткой ($\varsigma = 5$) и задвижкой. Определить диаметр трубопровода и коэффициент сопротивления задвижки. Потери напора на поворотах не учитывать.



7 РАСЧЕТ ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

7.1 Краткие теоретические сведения

Необходимые для расчетов зависимости (уравнения Бернулли, неразрывности и формулы для определения потерь напора) в случае длинных трубопроводов сводятся к одной формуле:

$$H = s_0 l Q^2 \tag{7.1}$$

или

$$H = lQ^2/K^2, \tag{7.2}$$

где H – напор,

s_0 – удельное сопротивление трубопровода, $s_0 = 8\lambda/(g\pi^2 d^5) = \lambda/(2gd\omega^2)$,

l – длина трубопровода,

Q – расход жидкости,

λ – коэффициент гидравлического трения,

ω – площадь живого сечения трубопровода,

K – модуль расхода трубопровода, $K = \sqrt{s_0}$.

Параметры s_0 и K можно определить по справочным таблицам или формуле, зная область гидравлического сопротивления, диаметр и материал трубопровода.

При расчете трубопроводов надо иметь в виду превышение давления при возможном гидравлическом ударе, появляющемся при резком изменении скорости. Изменение давления Δp зависит от соотношения времени изменения скорости $t_з$ (например, времени открытия или закрытия задвижки) к фазе удара $t_ф$ (времени, в течение которого ударная волна со скоростью c дойдет до резервуара на расстояние длины трубопровода l и отраженная вернется к месту изменения скорости), $t_ф = 2l/c$.

Если $t_з/t_ф \le 1$, то произойдет прямой гидравлический удар и по формуле Н.Е.Жуковского

$$\Delta p = \rho c \Delta v, \tag{7.3}$$

где Δv – изменение скорости, $\Delta v = v_{нач} - v_{кон}$,

c – скорость распространения ударной волны,

$$c = \frac{\sqrt{E_ж/\rho}}{\sqrt{1 + \frac{E_ж}{E_т} \cdot \frac{d}{\delta}}}, \tag{7.4}$$

$E_ж$ – модуль объемной упругости жидкости,

$E_т$ – модуль упругости материала трубопровода,
d – диаметр трубопровода,
δ – толщина стенок трубопровода,
ρ – плотность жидкости.

Если $t_з/t_ф > 1$, то имеем непрямой гидравлический удар и превышение давления

$$\Delta p_1 = 2\rho \Delta \mathrm{v} l / t_з. \qquad (7.5)$$

Гидравлический удар можно «смягчить» путем снижения скорости, увеличением времени $t_з$, установкой на трубопроводе предохранительных клапанов или устройством воздушных подушек.

В полезных целях принцип гидравлического удара применяется в гидравлических таранах и других устройствах.

При расчете трубопроводов полезно помнить и о том, что если несколько труб соединены последовательно, то расход по всем трубам один и тот же (при условии отсутствия притока или оттока между рассматриваемыми сечениями), а потери напора могут быть разными и складываются. А при параллельном соединении трубопроводов расход по разным трубам может быть разным, а потери напора по всем трубам одинаковые.

Решение любых задач при расчете трубопроводов не представляет трудности при применении ЭВМ, используя существующее или собственной разработки программное обеспечение.

7.2 Примеры решения задач

Задача 7.1. Определить потери напора по длине в стальном нефтепроводе длиной l = 1000 м при расходе нефти Q = 60 м^3/час, если коэффициент кинематической вязкости нефти ν = 0,8 см^2/с, а диаметр трубопровода d = 100 мм.

Решение. Из [8-14 и др.] для стальных труб абсолютная эквивалентная шероховатость Δ = 0,2 мм, тогда относительная шероховатость $\Delta_г = \Delta/d$ =0,2/100 = 0,002. Значение расхода в системе СИ Q = 60/3600 = 0,0167 м^3/с.

Скорость движения нефти по трубопроводу

$$\mathrm{v} = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q}{\pi d^2/4} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0167}{3{,}14 \cdot 0{,}01} = 2{,}13 \text{м/с}.$$

Первое предельное число Рейнольдса $Re' = 10/\Delta_г = 10/0{,}002 = 5 \cdot 10^3$, а второе предельное число $Re'' = 500/\Delta_г = 500/0{,}002 = 25 \cdot 10^4$. Фактическое число Рейнольдса $Re = \frac{\mathrm{v}d}{\nu} = \frac{2{,}13 \cdot 0{,}1}{(0{,}8 \cdot 10^{-4})} \approx 2{,}67 \cdot 10^3$.

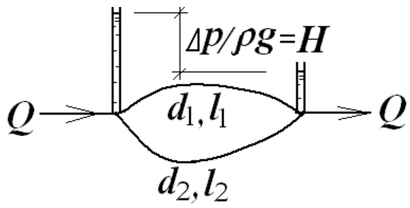
Поскольку $2320 < Re < 4000 < Re'$, то имеем зону неустойчивого режима, где наблюдаются зоны перехода ламинарного режима течения в турбулентный и обратно. Для этой зоны коэффициент гидравлического трения λ определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} = \frac{64}{2670} = 0{,}024.$$

Потери напора по длине h_l найдем по формуле Дарси-Вейсбаха

$$h_l = \lambda \frac{l}{d}\frac{\mathrm{v}^2}{2g} = 0{,}024 \cdot \frac{1000}{0{,}100} \cdot \frac{2{,}13^2}{19{,}62} = 55{,}5 м.$$

Задача 7.2. Водопровод запроектирован в виде двух параллельных горизонтальных участков с длинами $l_1 = 300$ м и $l_2 = 200$ м при разности давлений в начале и в конце трубопровода $\Delta p = 49$ кПа. В каком случае и на какую величину будет больше пропускная способность стальных трубопроводов:



а) при диаметрах d_1=200 мм и d_2 =150 мм,

б) или $d_1 = 150$ мм и $d_2 = 200$ мм.

Решение. По [11 и др.] найдем удельные сопротивления стальных труб для квадратичной области сопротивления: s_{o150}= 45 с^2/м^6, s_{o200}= 9,27 с^2/м^6. При параллельном соединении трубопроводов расход по разным трубам разный, а потери напора одинаковые:

$$H = s_{o1}l_1 \cdot Q_1^2 \quad \rightarrow \quad Q_1 = \sqrt{\frac{H}{s_{o1}l_1}},$$

$$H = s_{o2}l_2 \cdot Q_2^2 \quad \rightarrow \quad Q_2 = \sqrt{\frac{H}{s_{o2}l_2}}$$

Полный расход $Q = Q_1 + Q_2 = \sqrt{H}\left(\frac{1}{\sqrt{s_{01}l_1}} + \frac{1}{\sqrt{s_{02}l_2}}\right)$, где $H = \frac{\Delta p}{\rho g}$.

Из последней формулы расход для случаев а) и б) равен:

а) $$Q = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9{,}81}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{9{,}27 \cdot 300}} + \frac{1}{\sqrt{45{,}0 \cdot 200}}\right) = 0{,}0659 м^3/с = Q_а$$

б) $$Q = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 10^4}{1000 \cdot 9{,}81}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{45{,}0 \cdot 300}} + \frac{1}{\sqrt{9{,}27 \cdot 200}}\right) = 0{,}0711 м^3/с = Q_б$$

Во втором случае по трубопроводам пойдет больше воды на величину

$$Q_б - Q_а = 0{,}0711 - 0{,}0659 = 0{,}0052 м^3/с = 5{,}2 л/с.$$

Для окончательного вывода нужно уточнить область гидравлического сопротивления. По [5, 13, 14, 16 и др.] находим: для бывших в употреблении стальных труб эквивалентную абсолютную шероховатость

$\Delta = 0{,}2$ мм, коэффициент кинематической вязкости воды при температуре 15°C $\nu = 1{,}3\cdot10^{-6}$ м²/с. Далее для длинной и наименьшего диаметра трубы ($l = 300$ м и $d = 150$ мм) найдем:

- расход $Q_2 = \sqrt{\dfrac{\Delta p}{\rho g s_{o2} l_2}} = \sqrt{\dfrac{4{,}903\cdot10^4}{1000\cdot9{,}81\cdot45{,}0\cdot200}} = 0{,}0236 м^3/с,$

- скорость v = $4Q/(\pi d^2) = 4\cdot0{,}0236/(3{,}14\cdot0{,}150^2) = 1{,}336$ м/с,

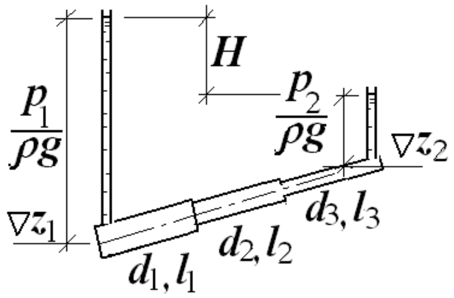
- число Рейнольдса $Re = \mathrm{v}d/\nu = 1{,}336\cdot0{,}150/(1{,}3\cdot10^{-6}) = 154173$,

- относительную шероховатость $\Delta_г = \Delta/d = 0{,}2/150 = 0{,}00133$,

- второе предельное число Рейнольдса $Re'' = 500/0{,}00133 = 375000$.

Поскольку $Re > Re''$, то действительно имеет место область квадратичного сопротивления и сделанные выводы остаются в силе.

Задача 7.3. Определить пропускную способность водопровода, состоящего из трех последовательно соединенных участков со следующими диаметрами и длинами: $d_1 = 1000$ мм, $l_1 = 1000$ м,
$d_2 = 900$ мм, $l_2 = 1300$ м,
$d_3 = 800$ мм, $l_3 = 1500$ м.



Геодезическая отметка в начале $z_1 = 10$ м, в конце $z_2 = 50$ м, избыточное давление соответственно $p_1 = 8\cdot10^5$ Па, $p_2 = 3\cdot10^5$ Па.

Решение. По [11 и др.] находим удельные сопротивления для стальных труб для квадратичной зоны гидравлического сопротивления:

$$s_{01} = 0{,}00174\ с^2/м^6,\ s_{02} = 0{,}00303\ с^2/м^6,\ s_{03} = 0{,}00566\ с^2/м^6.$$

При последовательном соединении труб расход по всем трубам одинаковый, а потери напора складываются:

$$H = H_1 + H_2 + H_3 = s_{01}l_1Q^2 + s_{02}l_2Q^2 + s_{03}l_3Q^2 .$$

С другой стороны, как видно из рисунка

$$H = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} - (z_2 - z_1).$$

Приравнивая эти выражения для напора H, можно получить выразим для определения расхода:

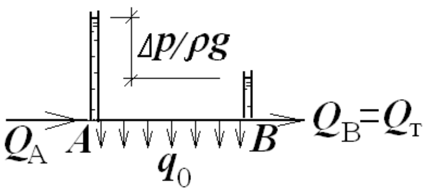
$$Q = \sqrt{\frac{p_2 - p_1 - \rho g(z_2 - z_1)}{\rho g(s_{01}l_1 + s_{02}l_2 + s_{03}l_3)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8\cdot10^5 - 3\cdot10^5 - 1000\cdot9{,}81(50-10)}{1000\cdot9{,}81(0{,}00174\cdot1000 + 0{,}00303\cdot1300 + 0.00566\cdot1500)}} = 0.87 м^3/с.$$

Далее нужно уточнить принятое первоначально допущение о квадратичной области сопротивления, однако оставим это для самостоятельной работы студента (в качестве примера см. решение задачи 6.7).

Задача 7.4. Чугунный водопровод длиной $l = 1$ км и диаметром $d = 200$ мм имеет разность давлений в начале и в конце $\Delta p = 98000$ Па. Определить транзитный расход $Q_т$, если удельный путевой расход q_0 = 0,01 л/(с·м).

Решение. Для чугунных труб диаметром d = 200 мм по [11 и др.] можно найти удельное сопротивление для квадратичной зоны гидравлического сопротивления s_0 = 9,03 с^2/м^6. Далее воспользуемся основной формулой для расчета длинных трубопроводов



$$H = h_l = s_0 l Q^2 ,$$

куда подставим выражения для определения потерь напора на трение $h_l = \Delta p/(\rho g)$ и расчетный расход на участке АВ $Q = 0{,}55q_0 + Q_т$.

$$\Delta p/(\rho g) = s_0 l(0{,}55q_0 + Q_т)^2,$$

Отсюда при значении плотности воды ρ = 1000 кг/м^3 величина искомого расхода

$$Q_т = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho g s_0 l}} - 0{,}55 q_0 l =$$

$$= \sqrt{\frac{98000}{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 9{,}03 \cdot 1000}} - 0{,}55 \cdot 0{,}01 \cdot 10^{-3} = 0{,}0045 \text{ м}^3/\text{с} = 4{,}5 \text{ л/с}.$$

Задача 7.5. При каком предельном расходе в стальном трубопроводе длиной 1000 м и диаметром 150 мм потери напора не превысят 20м?

Решение. По [11 и др.] найдем удельное сопротивление стального трубопровода (для квадратичной области гидравлического сопротивления) s_0 = 45 с^2/м^6. Поскольку в условии задачи не указаны местные сопротивления типа задвижки, поворота и т.д., а длина трубы l = 1000 м > (50…100) м, то это является основанием того, что имеем случай длинных трубопроводов, для которого потери напора находят по формуле

$$H = s_0 l Q^2,$$

откуда искомый расход

$$Q = \sqrt{\frac{H}{s_0 l}} = \sqrt{\frac{20}{45 \cdot 1000}} = 0{,}07 м^3/с.$$

Задача 7.6. Определить превышение давления в трубе диаметром d = 5 см, толщиной стенки δ = 2 мм и длиной l = 3500 м при возможном гидравлическом ударе в результате полного закрытия задвижки за время $t_з$ = 4 с. Скорость потока в трубе v = 7,0 м/с, плотность жидкости ρ = 900 кг/м^3, модуль объемной упругости жидкости $E_ж$ = 2700 МПа, модуль упругости материала трубы $E_т = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Скорость распространения звука в покоящейся жидкости

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_ж}{\rho}} = \sqrt{\frac{2700 \cdot 10^6}{900}} = 1732 м/с.$$

Скорость распространения ударной волны

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{d}{\delta} \cdot \frac{E_{ж}}{E_T}}} = \frac{1732}{\sqrt{1 + \frac{0,05}{0,002} \cdot \frac{2700 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}}} = 1498 м/с.$$

Фаза удара

$$t_ф = 2l/c = 2 \cdot 3500/1498 = 4,67 \text{ с.}$$

Поскольку $t_з < t_ф$, то имеет место прямой гидравлический удар и превышение давления по формуле Н.Е.Жуковского

$$\Delta p = \rho c \Delta v = 900 \cdot 1498 \cdot 7,0 = 9437400 \text{ Па.}$$

Задача 7.7. Определить время закрытия задвижки, установленной на свободном конце стального водопровода диаметром d = 0,2 м, длиной l = 1600 м с толщиной стенки δ = 10 мм, при условии, чтобы максимальное повышение давления в водопроводе было в три раза меньше, чем при мгновенном закрытии задвижки. Через сколько времени после мгновенного закрытия задвижки повышение давления распространится до сечения, находящегося на расстоянии 0,7l от задвижки?

Решение. Скорость распространения ударной волны по (7.5),

$$\tilde{n} = \frac{\sqrt{\AA_{\ae} / \rho}}{\sqrt{1 + \frac{E_{\ae}}{\AA_{ò}} \cdot \frac{d}{\delta}}} = \frac{\sqrt{2100 \cdot 10^6 / 1000}}{\sqrt{1 + \frac{2100 \cdot 10^6 \cdot 0,2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,01}}} = 1317,4 ì \; / \tilde{n}.$$

Согласно условию задачи максимальное повышение давления Δp_1 в водопроводе должно быть в три раза меньше, чем при мгновенном закрытии задвижки Δp, то есть $\Delta p_1 = \Delta p/3$ или в соответствии с (7.4) и (7.6) $2\rho \Delta v l/t_з = \rho c \Delta v/3$, где Δv – изменение скорости, $\Delta v = v_{нач} - v_{кон}$.

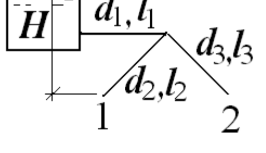
Отсюда время закрытия задвижки $t_з = 6l/c = 6 \cdot 1600/1317,4 = 7,3$ с.

Время, через которое повышение давления после мгновенного закрытия задвижки распространится до сечения, находящегося на расстоянии 0,7l от задвижки

$$t = \frac{0,7l}{c} = \frac{0,7 \cdot 1600}{1317,4} = 0,85 \text{ с.}$$

7.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.8. Определить расход турбинного масла, температура которой 20°С, протекающей по латунному трубопроводу в пункты 1 и 2, если напор H = 7,6 м в резервуаре постоянный. Длины труб l_1 = 10 м, l_2 = 10,0 м, l_3 = 9,8 м , а диаметры d_1 = 60 мм, d_2 = 40 мм, d_3 = 40 мм. Местные потери напора в расчетах не учитывать.

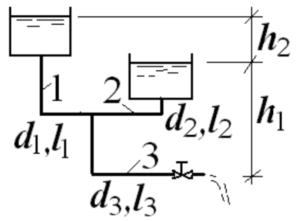


Задача 7.9. Как изменятся потери напора по длине в трубопроводе диаметром D = 50 мм и длиной l = 500 м при изменении расхода воды от 0,02 до 2 л/с? Построить график зависимости $h_l = f(Q)$, если трубы: а) новые стальные, б) полиэтиленовые, в) асбестоцементные.

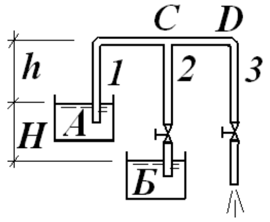
Задача 7.10. Определить потери напора по длине в стальном нефтепроводе длиной l = 1000 м при расходе нефти Q =180 м^3/ч, если кинематический коэффициент вязкости нефти ν = 0,8 см^2/с, а диаметр трубопровода D: а) 200 мм; б) 250 мм; в) 300 мм; г) 150 мм; д) 100 мм. Построить график зависимости $h_l = f(d)$.

Задача 7.11. Из резервуара нефть протекает по стальному нефтепроводу диаметром D = 250 мм и длиной l = 1000 м/ Плотность нефти ρ = 900 кг/м^3, а кинематический коэффициент вязкости ν = 1 см^2/с. Определить необходимый уровень нефти в резервуаре над входом в трубопровод, если уклон трубопровода i = 0,02, а расход нефти Q =180 м^3/ч.

Задача 7.12. Определить расходы Q_1, Q_2 и Q_3 воды вязкостью ν = 0,01 Ст в стальных трубах шероховатостью Δ = 0.2 мм, имеющих приведенные дины l_1 = 200 м, l_2 = 100 м и l_3 = 150 м и диаметры $d_1 = d_3$ = 100 мм, d_2 = 80 мм, если напоры h_1 = 7 м и h_2 = 3 м. При какой приведенной длине l_3' трубопровода 3 расход Q_2 станет равным 0.

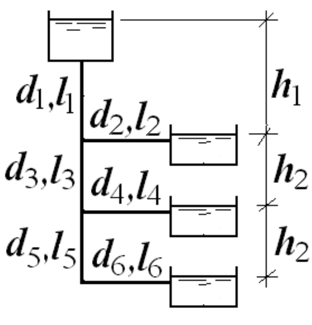


Задача 7.13. Сифонный трубопровод составлен из трех труб, приведенные длины которых l_1 = 50 м, l_2 = 100 м и l_3 = 150 м и диаметры d_1 = d_3 = 75 мм, d_2 = 50 мм, Определить напор H, необходимый для того, чтобы из резервуара A в резервуар $Б$ поступала вода в количестве Q = 3 л/с. Найти при этом напоре величину наименьшего давления в трубопроводе, если h = 2 м, а длина участка CD трубы 3 равна 20 м.



Задачу решить в предположении квадратичной области сопротивления труб, приняв значения коэффициентов гидравлического трения λ_1 = 0,025, λ_2 = 0,028 и λ_3 = 0,025. Скоростным напором при выходе из трубы 3 пренебречь. Атмосферное давление принять равным 100 кПа.

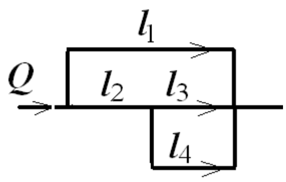
Задача 7.14. Определить расход Q_1, который подается в верхний бак, если система труб (d_1 = 100 мм l_1 = 150 м,), все остальные трубы (d_i = 60 мм, l_i = 50 м) работают при постоянных напорах h_1= 6 м и h_2 = 2 м. Коэффициенты гидравлического трения равны: λ_1 = 0,02, остальных труб λ_i = 0,03. Местными потерями напора пренебречь. Определить расходы, которые устанавливаются при этом во всех трубах системы.



Задача 7.15. Керосин перекачивается по горизонтальной трубе длиной l = 50 м и диаметром d = 50 мм в количестве Q = 9,8 л/с. Определить потребное давление и необходимую мощность насоса, если пара-

метры керосина равны: коэффициент кинематической вязкости $\nu = 0{,}025$ Ст, а плотность $\rho = 900$ кг/м^3. труба гидравлически гладкая. Потерями на местных сопротивлениях пренебречь.

Задача 7.16. Для сложного трубопровода, изображенного на рисунке, определить расходы в каждом из участков, если их длины соответственно равны: $l_1 = 5$ м, $l_2 = 3$ м и $l_3 = 3$ м и $l_4 = 6$ м, а суммарный расход $Q = 60$ л/мин. Считать, что режим течения ламинарный, а диаметры трубопроводов одинаковые. Потерями на местных сопротивлениях пренебречь.



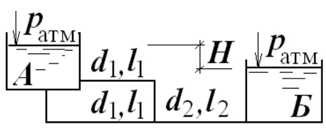
Задача 7.17. Сравнить расход воды ($\nu = 10^{-2}$ Ст), турбинного масла ($\nu = 1$ Ст) и бензина ($\nu = 6 \cdot 10^{-3}$ Ст) при температуре $t = 20^{\circ}$С по стальному трубопроводу длиной $l = 200$ м и диаметром $d = 100$ мм (эквивалентная шероховатость $\Delta = 0{,}1$ мм) при одинаковом напоре $H = 10$ м.

Задача 7.18. Какой напор необходимо создать в начале горизонтальной стальной трубы длиной $l = 1300$ м и диаметром $d = 150$ мм для пропуска расхода $Q = 18$ л/с при напоре в конце трубы $H_к = 10$ м. Как изменится напор в начале трубы, если для пропуска того же расхода параллельно основной трубе будет уложена дополнительная труба диаметром $d_2 = 100$ мм той же длины.

Задача 7.19. При каком начальном давлении p воды в стальной трубе будет длиной $l = 300$ м, $d = 100$ мм и толщиной стенки $\delta = 2$ мм при прямом гидравлическом ударе давление $p_{уд} = 4$ МПа?

Задача 7.20. Из большого резервуара *А*, в котором поддерживается постоянный уровень жидкости, по трубопроводу, состоящему из трех труб, длина которых $l_1 = 20$ м и $l_2 = 30$ м, диаметры $d_1 = 20$ мм и $d_2 = 50$ мм, а эквивалентная шероховатость $\Delta = 0{,}2$ мм, жидкость Ж (бензин) при температуре 20°С течет в открытый резервуар *Б*. Разность уровней жидкости в резервуарах равна $H = 3$ м.

Определить расход Q жидкости, протекающий в резервуар *Б*. В расчетах принять, что местные потери напора составляют 20 % от потери на трение.



Задача 7.21. Жидкость с плотностью $\rho = 850$ кг/м^3 и вязкостью $\nu = 2$ Ст подается на расстоянии $l = 20$ м по горизонтальной трубе диаметром $d = 20$ мм в количестве $Q = 1{,}57$ л/с. Определить давление и мощность, которые требуются для указанной подачи. Местные гидравлические сопротивления отсутствуют.

Задача 7.22. Из цистерны с напором $H = 2$ м перекачивается молоко по горизонтальной пластмассовой трубе длиной $l = 250$ м и диаметром $d = 50$ мм. Определить расход молока Q. Местными гидравлическими сопротивлениями пренебречь.

8 ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

8.1 Краткие теоретические сведения

Рассмотрим истечение жидкости через малые отверстия, когда размер отверстия (диаметр d) значительно меньше напора H: $d < 0{,}1H$. Насадком называется короткая труба длиной от $3d$ до $6d$.

Расход жидкости, вытекающий через малое отверстие при постоянном напоре

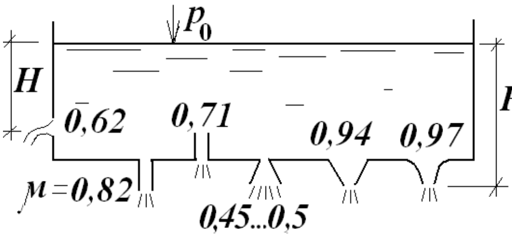


Рисунок 8.1

$$Q_0 = \mu_0 \omega \sqrt{2gH_{пр}}, \tag{8.1}$$

а через насадок

$$Q_н = \mu_н \omega \sqrt{2gH_{пр}}, \tag{8.2}$$

где μ_0, $\mu_н$ - соответственно коэффициенты расхода отверстия и насадка. При совершенном сжатии струи для малого отверстия с острыми кромками $\mu_0 = 0{,}62$, для отверстия на дне $\mu_0 = 0{,}65 \ldots 0{,}7$, для внешнего цилиндрического насадка $\mu_н = 0{,}82$ (рисунок 8.1),

ω – площадь выходного сечения отверстия (насадка),

$H_{ПР}$ - приведенный напор, если сосуд открытый (внешнее давление p_0 равно атмосферному $p_{атм}$), то $H_{пр} = H$,

H – геометрический напор над выходным сечением отверстия (насадка).

В общем случае

$$H_{пр} = H + \frac{p_0 - p_{атм}}{\rho g} = H + \frac{p_{ман}}{\rho g}. \tag{8.3}$$

При истечении из внешнего цилиндрического насадка образуется вакуум, вследствие чего жидкость подсасывается из резервуара. Поэтому коэффициент расхода для такого насадка больше, чем для отверстия в тонкой стенке такого же диаметра. Величина вакуума в насадке зависит от $H_{ПР}$:

$$\frac{p_{вак}}{\rho g} = 0{,}75 H_{пр}.$$

Если при истечении воды с температурой $0 \ldots 50^0$С напор $H_{ПР}$ превысит 12…13 м, то в насадке произойдет срыв вакуума и тогда истечение из насадка будет происходить так же, как через отверстие в тонкой стенке.

На практике часто приходится встречаться со случаями переменных уровней жидкости в резервуарах, когда нужно оценить время опорожнения или изменения уровней.

При отсутствии поступления жидкости из-вне для определения времени изменения разности уровней в открытых цилиндрических резервуарах от $H = z_1$ до $H = z_2$ в [17, 18 и др.] предложена следующая зависимость (рисунок 8.2):

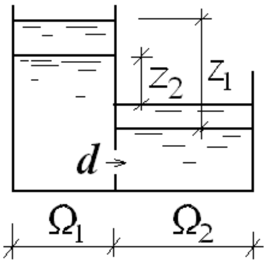


Рисунок 8.2

$$t = \frac{2\Omega_1\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}), \tag{8.4}$$

где μ – коэффициент расхода отверстия или насадка,
ω - площадь выходного сечения,
Ω_1, Ω_2 - соответственно площади сечений первого и второго резервуаров.

Из (8.4) можно получить зависимости для определения времени изменения разности уровней в случае постоянства уровня жидкости в одном из резервуаров. Для этого рассмотрим известную задачу шлюзования лодки из верхнего в нижний бьеф (рисунок 8.3, а - г).

В начале лодка находится в верхнем бьефе(рисунок 8.3, а), ворота первой камеры в сечении 2-2 закрыты, через отверстие в сечении 1-1 вода из верхнего бьефа заполняет камеру до тех пор, пока уровень там не достигнет отметки верхнего бьефа (рисунок 8.3, б). Имеем случай: справа (в первой камере) уровень переменный, а слева от сечения 1-1 - постоянный. Постоянство этого уровня возможно обеспечить двумя способами: при равенстве поступления и отвода воды или при большой площади зеркала Ω_1 в верхнем бьефе (на практике из-за сравнительно незначительного объема камеры по сравнению с объемом водохранилища, уровень в верхнем бьефе можно считать постоянным). Подставляя в (8.4) «большое значение» $\Omega_1 = \infty$, получим:

$$t = \frac{2\Omega_2}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}), \tag{8.5}$$

где z_2 может быть равным и нулю как в случае рисунка 8.3, б. После выравнивания уровней ворота в сечении 1-1 открываются и лодка из верхнего бьефа плывет в первую камеру.

На втором этапе все ворота закрыты (рисунок 8.3, в), открывается отверстие между первой и второй камерами. В результате уровень в первой камере снижется, а во второй поднимается. Затрачиваемое на этот этап время определяется по (8.4) при $z_2 = 0$. После выравнивания уровней лодка из первой камеры плывет во вторую.

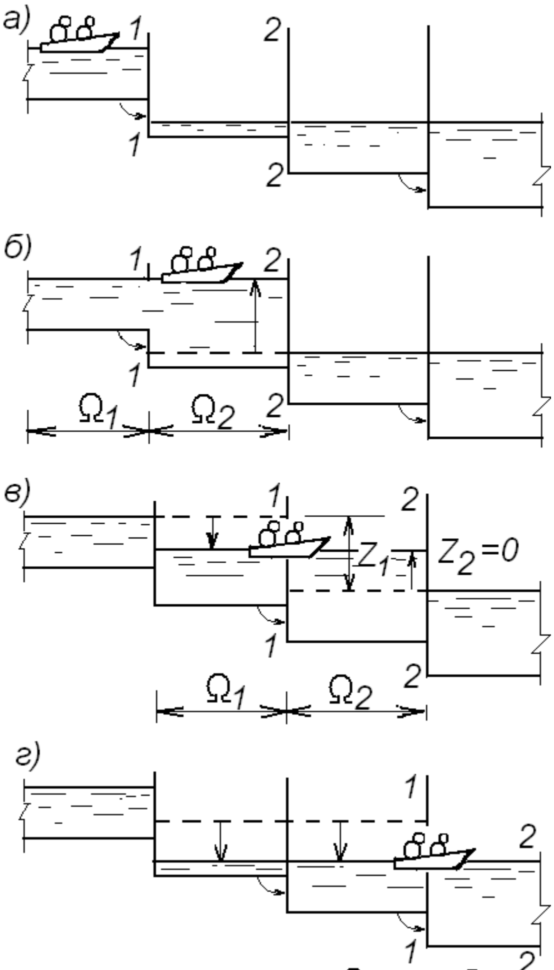


Рисунок 8.3

На третьем этапе (рисунок 8.3 , г) открывается отверстие из второй камеры в нижний бьеф и уровень во второй камере падает до отметки нижнего бьефа. Имеем случай переменного уровня в левом резервуаре и постоянного уровня в правом. Но уровень в правом резервуаре (в нижнем бьефе) может быть постоянным по вышеуказанным причинам. Подставляя в (8.4) $\Omega_2 = \infty$, получим время на реализацию третьего этапа:

$$t = \frac{2\Omega_1}{\mu\omega\sqrt{2g}}(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}), \qquad (8.6)$$

где для случая рисунка 8.3,г $z_2 = 0$, а Ω_1 – площадь второй камеры.

После падения уровня во второй камере до уровня нижнего бьефа ворота открываются и лодка выходит из этой камеры, шлюзование завершается.

Зависимость (8.6) справедлива и в случае истечения жидкости из емкостей в атмосферу, значения z_1 и z_2 при этом будут означать напоры над центром выходного сечения (рисунок 8.4). Время полного опорожнения резервуара из (8.6) при $z_2 = 0$

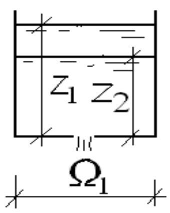


Рисунок 8.4

$$t = \frac{2\Omega_1\sqrt{z_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega_1 z_1}{\mu\omega\sqrt{2gz_1}} = \frac{2W_1}{Q_1}, \qquad (8.7)$$

где W_1 – объем жидкости в баке при напоре z_1,
Q_1 – расход через отверстие при напоре z_1.

Если резервуары соединены трубопроводом или истечение жидкости из резервуара в атмосферу происходит по трубопроводу, то в вышеприведенные формулы вместо коэффициента расхода μ отверстия или насадка надо подставить коэффициент расхода трубопровода

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\varsigma + \lambda\frac{l}{d}}}, \qquad (8.8)$$

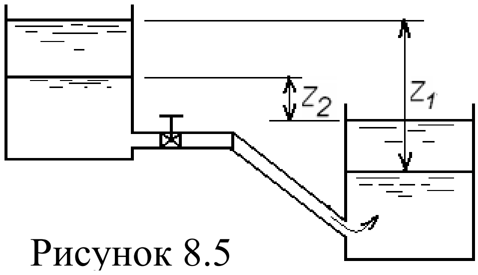


Рисунок 8.5

где $\Sigma\varsigma$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений, например, для рисунка 8.5 $\Sigma\varsigma = \varsigma_{входа} + \varsigma_{крана} + \varsigma_{поворота} + \varsigma_{выхода}$,
λ – коэффициент гидравлического трения,
d и *l* – соответственно диаметр и длина трубопровода.

Рассмотрим другую задачу: опорожнение в атмосферу горизонтальной цистерны с малым отверстием на дне и атмосферном давлении на поверхности при отсутствии поступления жидкости в цистерну из вне.

Для определения времени ее опорожнения приравняем объем вытекающей из отверстия жидкости $dW = Qdt$ за время dt объему уменьшения жидкости в цистерне $dW = -SdH$ за то же время:

$$Qdt = -SdH, \tag{8.9}$$

где H –напор над центром отверстия,
Q - расход, вытекающий из отверстия, $Q = \mu\omega(2gH)^{1/2}$,
μ – коэффициент расхода отверстия,
ω – площадь сечения отверстия,
S – площадь зеркала (свободной поверхности жидкости в резервуаре) при напоре H, $S = 2L(r^2 - (H - r)^2)^{1/2} = 2L(2rH - H^2))^{1/2}$,
r, L и $D = 2r$ – соответственно радиус, длина и диаметр цистерны.

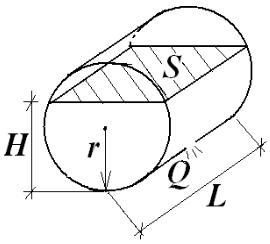


Рисунок 8.6

Подставим в (8.9) выражения входящих параметров и, разделяя переменные, получим уравнение истечения жидкости в виде:

$$dt = -\frac{2L(2rH - H^2)^{1/2}}{\mu\omega(2gH)^{1/2}}dH = -\frac{2L(2r - H)^{1/2}}{\mu\omega(2g)^{1/2}}dH = \frac{2L(D - H)^{1/2}}{\mu\omega(2g)^{1/2}}d(D - H).$$

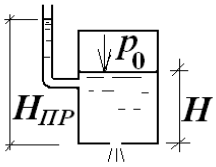
Путем интегрирования полученного выражения найдем время полного опорожнения цистерны:

$$t = \frac{2L}{\mu\omega(2g)^{1/2}}\int_D^0 (D - H)^{1/2} d(D - H) = \frac{2L}{\mu\omega(2g)^{1/2}} 2/3D^{3/2} = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\mu\omega\sqrt{2g}}. \tag{8.10}$$

При негоризонтальном расположении цистерны в (8.9) нужно подставить соответствующее выражение для определения площади S.

8.2 Примеры решения задач

Задача 8.1. В закрытом сосуде поддерживается постоянный напор H = 1 м и постоянное манометрическое давление на поверхности воды $p_м$= 31400 Па. Определить: а) диаметр отверстия в дне бака, при котором расход Q = 1 л/с, б) как необходимо изменить давление $p_м$, чтобы расход воды через отверстие d =10 мм составлял 0,5 л/с.



Решение. а) Для отверстия на дне экспериментально установленное (справочное) значение коэффициента расхода μ_0 =0,7, а расход

$$Q_0 = \mu_0 \omega \sqrt{2gH_{\text{ïð}}} \ .$$

где величина приведенного напора

$$H_{\text{ïÐ}} = \text{Í} + \frac{p_{\text{ì}}}{\rho g} = 1 + \frac{31400}{10^3 \cdot 9{,}81} \approx 4{,}2\text{ì} \ ,$$

а площадь отверстия выразим из зависимости для определения расхода

$$\omega = \frac{Q}{\mu_0 \sqrt{2gH_{\text{ïð}}}} = \frac{0{,}001}{0{,}7\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 4{,}2}} = 0{,}0001574\text{ì}^2 \ .$$

Искомый диаметр найдем из формулы

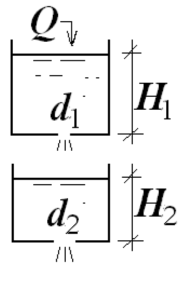
$$\omega = \frac{\pi d^2}{4} \to d = \sqrt{\frac{4\omega}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}0001574}{3{,}14}} = 0{,}0141\text{ì} = 14{,}1\text{ìì} \ .$$

б) приведенный напор из формулы для определения расхода

$$H_{\text{ïÐ}} = \text{Í} + \frac{p_{\text{ì}}}{\rho g} = \frac{Q^2}{\mu_0^2 \omega^2 2g} \to \text{ð}_{\text{ì}} = \frac{Q^2 \rho}{2\mu_0^2 \omega^2} - \rho g H =$$

$$= \frac{0{,}0005^2 \cdot 1000}{2 \cdot 0{,}7^2 \left(\frac{3{,}14 \cdot 0{,}010^2}{4} \right)^2} - 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 1 = 31588\text{í} / \text{ì}^2 \approx 31{,}6\text{êÏà} \ .$$

Задача 8.2. В верхний сосуд поступает вода с расходом Q = 0,25 л/с, которая затем перетекает через малое отверстие на дне диаметром d_1 = 10 мм в нижний сосуд, имеющий также малое отверстие в дне диаметром d_2 = 15 мм.



Определить: а) напоры H_1 и H_2 в обоих сосудах, б) при каком диаметре d_2 напор H_2 будет вдвое меньше, чем H_1.

Решение. а) Для отверстия на дне справочное значение коэффициента расхода μ_0 =0,7, а расход $Q_0 = \mu_0 \omega \sqrt{2gH}$. Применим эту формулу к обоим сосудам и найдем значения напоров в обоих сосудах H_1 и H_2, при которых расходы Q_1 и Q_2 станут равными притоку воды Q = 0,25 л/с:

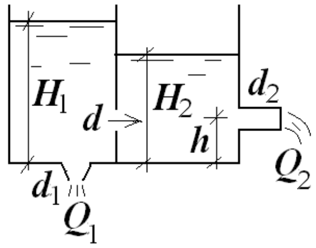
$$H_1 = \left(\frac{Q}{\mu_0 \omega_1 \sqrt{2g}} \right)^2 = \left(\frac{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}01^2 \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \right)^2 = 1{,}055\text{ì} \ .$$

$$H_2 = \left(\frac{Q}{\mu_0 \omega_2 \sqrt{2g}} \right)^2 = \left(\frac{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}015^2 \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \right)^2 = 0{,}208\text{ì} \ .$$

б) Из формулы для определения расхода найдем диаметр d_2, при котором напор $H_2 = H_1/2 = 1{,}055/2 = 0{,}5275$ м:

$$d_2 = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14 \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5275}}} = 0{,}01189\text{ì} \ \approx 12\text{ìì} \ .$$

Задача 8.3. Резервуар разделен тонкой стенкой, в которой имеется круглое отверстие диаметром d =30 мм. Диаметр комического насадка, через который вытекает вода из первого отсека d_1 =15 мм, диаметр цилиндрического насадка, через который вытекает вода из второго отсека d_2 =20 мм. Определить расход Q и глубину H_2 во втором отсеке, если глубина воды в первом отсеке H_1 = 1,25 м поддерживается постоянной, а расстояние от дна до центра цилиндрического насадка h = 0,2 м.



Решение. Расход, вытекающий из первого отсека через конически сходящийся насадок

$$Q_1 = \mu_1 \omega_1 \sqrt{2gH_1} = 0{,}94 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}015^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}25} = 0{,}000822\text{ì}^{\ 3}/c = 0{,}822\text{ë}/\text{ñ}.$$

Расход, вытекающий из первого отсека во второй через отверстие

$$Q_2 = \mu_0 \omega_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = 0{,}62 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}030^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81(1{,}25 - H_2)} \, .$$

Расход, вытекающий из второго отсека в атмосферу через внешний цилиндрический насадок:

$$Q_2 = \mu_2 \omega_2 \sqrt{2g(H_2 - h)} = 0{,}82 \cdot \frac{3.14 \cdot 0{,}020^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9.81(H_2 - 0{,}2)}.$$

Приравняем расходы, вытекающие из отверстия и внешнего цилиндрического насадка, поскольку согласно уравнения неразрывности из внешнецилиндрического насадка будет вытекать тот расход, который в правый отсек поступит туда через отверстие:

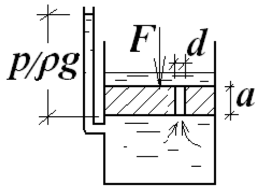
$$0{,}62 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}030^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81(1{,}25 - H_2)} = 0{,}82 \cdot \frac{3.14 \cdot 0{,}020^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9.81(H_2 - 0{,}2)},$$

После сокращений получим: $0{,}62 \cdot 0{,}030^2 \sqrt{1{,}25 - \text{Í}_{\ 2}} = 0{,}82 \cdot 0{,}02^2 \sqrt{\text{Í}_{\ 2} - 0{,}2}$ или $1{,}70122^2(1{,}25 - H_2) = H_2 - 0{,}2$, откуда напор во втором отсеке H_2 = 0,98 м. Далее расход, вытекающий в атмосферу из внешнего цилиндрического насадка Вентури

$$Q_2 = 0{,}82 \cdot \frac{3.14 \cdot 0{,}020^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9.81(0{,}98 - 0{,}2)} = 0{,}001\text{ì} \ 3/c = 1\text{ë}/\text{ñ}.$$

Полный расход $Q = Q_1 + Q_2 = 0{,}822 + 1 = 1{,}822$ л/с.

Задача 8.4. На поршень диаметром D = 100 мм действует сила F=980Н. Определить:



1) Скорость движения поршня, если диаметр отверстия в поршне d = 2 мм, а толщина поршня a = 8 мм.

2) Силу F_2, при которой поршень будет перемещаться со скоростью 1мм/сек, если диаметр отверстия в поршне d =2,5 мм, а толщина поршня a =10 мм.

Указание: противодавлением воды, прошедшей через отверстие в поршне и трением поршня о цилиндр пренебречь.

Решение. 1) Отношение a/d = 4 указывает на то, что имеет место случай истечения жидкости из внешнего цилиндрического насадка Вентури ($3 < l/d < 6$) с коэффициентом расхода $\mu_H = 0{,}82$ и коэффициентом скорости φ = 0,82.

Площадь поршня $\Omega = \pi D^2/4 = 3{,}14 \cdot 0{,}100^2/4 = 0{,}00785\,\text{м}^2$, а площадь отверстия (выходного сечения насадка)

$\omega = \pi d^2/4 = 3{,}14 \cdot 0{,}002^2/4 = 3{,}14 \cdot 10^{-6}\,\text{м}^2$.

Давление под поршнем $p = \dfrac{F}{\Omega} = \dfrac{980}{0{,}00785} \approx 1{,}25 \cdot 10^5\,\text{Па}$ ..

Скорость вытекания воды из отверстия

$$\upsilon_2 = \varphi\sqrt{2g\frac{p}{\rho g}} = \varphi\sqrt{2p/\rho} = 0{,}82\sqrt{2 \cdot 1{,}25 \cdot 10^5/1000} = 12{,}96\,\text{м/с}.$$

Для определения скорости перемещения поршня υ_1 составим уравнение неразрывности: $Q = \upsilon_1\Omega = \upsilon_2\omega$, отсюда

$$\upsilon_1 = \upsilon_2\frac{\omega}{\Omega} = 12{,}96 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0{,}0052\,\text{м/с} = 5{,}2\,\text{мм/с}.$$

2) Вторая часть задачи является обратной решенной:

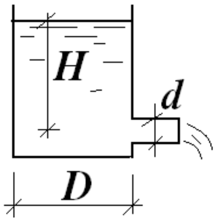
$$\upsilon_2 = \upsilon_1\frac{\Omega}{\omega}; \quad \upsilon_2 = \upsilon_1\frac{\Omega}{\omega} = \varphi\sqrt{2g\frac{p}{\rho g}} = \varphi\sqrt{2g\frac{F/\Omega}{\rho g}}.$$

Или

$$\upsilon_1^2\frac{\Omega^2}{\omega^2} = \varphi^2 \cdot 2 \cdot \frac{F_2}{\Omega \cdot \rho} \rightarrow F_2 = \upsilon_1^2\frac{\Omega^3\rho}{2\varphi^2\omega^2} = \upsilon_1^2\frac{\left(\pi D^2\right)^3 \cdot \rho \cdot 4^2}{2\varphi^2 \cdot 4^3 \cdot \left(\pi d^2\right)^2} =$$

$$= 0{,}001^2\frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^6 \cdot 1000}{2 \cdot 0{,}82^2 \cdot 4 \cdot 0{,}0025^4} = 14{,}94\,\text{Н}.$$

Задача 8.5. Как изменится время опорожнения открытого вертикального цилиндрического резервуара диаметром D = 1,5 м и с начальным напором H = 2,5 м, если в его дне внешний цилиндрический насадок диаметром d = 50 мм заменить: а) коноидальным насадком тоже диаметра выходного сечения, б) внутренним цилиндрическим насадком того же диаметра.



Решение. Площадь сечения резервуара

$$\Omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2}{4} = 1{,}766\text{ì}^{\;2},$$ а площадь выходного сечения

насадка $\omega = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}05^2}{4} = 0{,}00196\text{ì}^{\;2}$.

Из [12-16, 18 и др.] значения коэффициентов расхода:

1) внешнего цилиндрического насадка $\mu_{\text{âíåø}} = 0{,}82$,

2) коноидального насадка $\mu_{\text{êîí}} = 0{,}97$,

3) внутренне цилиндрического насадка $\mu_{\text{âíóò}} = 0{,}71$.

Первоначальный напор в резервуаре $H_1 = H = 2{,}5\text{ì}$, конечный напор над центром выходного сечения H_2 = 0 (резервуар полностью опорожняется). Время опорожнения резервуара

$$t = \frac{2\Omega\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega\sqrt{H}}{\mu\omega\sqrt{2g}}.$$

1) Время опорожнения резервуара с внешним цилиндрическим насадком

$$t_1 = \frac{2 \cdot 1{,}766\sqrt{2{,}5}}{0{,}82 \cdot 0{,}00196\sqrt{2 \cdot 9{,}8}} = \frac{643{,}3}{0{,}82} = 775{,}06\text{ñåê} = 12{,}918\text{ìèí}.$$

2) Время опорожнения резервуара с коноидальным насадком

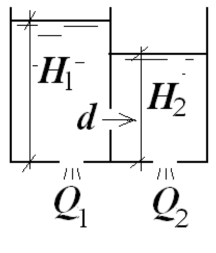
$$t_2 = \frac{643{,}3}{0{,}97} = 663{,}2\text{ñåê} = 11{,}05\text{ìèí}$$

Резервуар опорожнится на 1,87 мин быстрее по сравнению с первым случаем.

3) В случае внутреннего цилиндрического насадка Борда

$$t_3 = \frac{643{,}3}{0{,}71} = 906{,}06\text{ñåê} = 15{,}1\text{ìèí}.$$

По сравнению с первым случаем резервуар опорожнится на 3,2 мин позже.



Задача 8.6. В бак, разделенный перегородкой на два отсека, поступает вода расходом Q = 37 л/с. В перегородке и дне каждого отсека имеются одинаковые отверстия диаметром d = 10 см. Определить: а) расходы через донные отверстия; б) каким должен быть диаметр в дне первого отсека, чтобы расход из обоих донных отверстий был одинаковым.

Решение. а) Значения коэффициента расхода примем равными:

- для донных отверстий μ_0 = 0,7,

- для отверстия в перегородке μ_0 = 0,62.

Расход, вытекающий из первого отсека бака в атмосферу

$$Q_1 = \mu_0 \omega_{01} \sqrt{2gH_1} = 0{,}7 \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2gH_1}\,, \tag{8.11}$$

а из второго отсека бака в атмосферу

$$Q_2 = 0{,}7 \frac{\pi d_2^2}{4} \sqrt{2gH_2}\,. \tag{8.12}$$

Полный расход, вытекающий из обоих донных отверстий

$$Q = Q_1 + Q_2\,. \qquad (8.13).$$

Расход, вытекающий из второго отсека в атмосферу равен расходу, поступающему из первого отсека бака во второй отсек:

$$Q_2 = \mu_0 \omega_{03} \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = 0{,}62 \frac{\pi d_3^2}{4} \sqrt{2g(H_1 - H_2)}\,. \tag{8.14}$$

По условию задачи $d_1 = d_2 = d_3$ = 10 см = 0,1 м.

Далее уравнением (8.13) воспользуемся дважды: в (8.13) подставим (8.11) и (8.12), а затем в (8.13) подставим (8.11) и (8.14), при этом общие члены вынесем за скобки:

$$37 \cdot 10^{-3} = 0{,}7 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \left(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2} \right), \tag{8.15}$$

$$37 \cdot 10^{-3} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \left(0{,}7\sqrt{H_1} + 0{,}62\sqrt{H_1 - H_2} \right). \tag{8.16}$$

Разделим (8.16) на (8.15):

$$1 = \frac{0{,}7\sqrt{H_1} + 0{,}62\sqrt{H_1 - H_2}}{0{,}7(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2})},$$

отсюда

$$0{,}7(\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}) = 0{,}7\sqrt{H_1} + 0{,}62\sqrt{H_1 - H_2}$$

или $0{,}7\sqrt{H_2} = 0{,}62\sqrt{H_1 - H_2}$, откуда

$$H_1 = 2{,}275 H_2\,. \tag{8.17}$$

Подставим (8.17), например, в (8.15) и выразим H_2:

$$37 \cdot 10^{-3} = 0{,}7 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \left(\sqrt{2{,}275 H_2} + \sqrt{H_2} \right)$$

Отсюда

$$H_2 = \left(\frac{37 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \left(\sqrt{2{,}275} + 1 \right)} \right)^2 = 0{,}367\text{ì}\,.$$

По (8.17) $H_1 = 2{,}275 H_2 = 0{,}8349\text{ì}$.

Подставляя полученные значения в (8.11) и (8.12), найдем искомые расходы:

$$Q_1 = 0{,}7\frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8349} = 0{,}02224\text{ì}^{\ 3}/c,$$

$$Q_2 = 0{,}7\frac{3{,}14 \cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}367} = 0.01475\text{ì}^{\ 3}/c.$$

Проверкой правильности выполненных расчетов является условие (8.13) – поступающий в бак расход равен суме вытекающих из донных отверстий расходов: 0,02224 + 0.01475 = 0,03699 ≈ Q = 0,037 м^3/с.

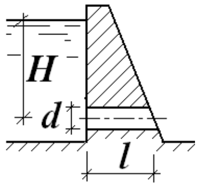
б) При равенстве расходов, вытекающих из донных отверстий, в (8.11) подставим $Q_1 = Q/2$ = 0,0185 м^3/с:

$$0{,}0185 = 0{,}7\frac{3{,}14 \cdot d_1^{\ 2}}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8349}$$

Откуда искомое значение диаметра

$$d_1 = \sqrt{\frac{0{,}0185 \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}8349}}} = 0{,}0912\text{ì} \ \approx 91{,}2\text{ìì} \ .$$

Задача 8.7. Из водохранилища вода вытекает через отверстие в плотине диаметром d = 0,5 м. Определить:



1) время, за которое уровень воды в водохранилище опустится на 0,5 м, если начальный напор H = 6,5 м, толщина плотины l = 2 м, при условии, что площадь зеркала воды в водохранилище 0,224 км^2 не изменится с изменением уровня.

2) диаметр отверстия d, при котором уровень воды в водохранилище с площадью зеркала $\Omega = 0{,}185\text{êì}^{\ 2}$ опустится на 0,5 м за 10 часов, если начальный напор H = 6 м.

Решение. 1) Отношение l/d = 4 указывает на то, что имеет место случай истечения жидкости из внешнецилиндрического насадка Вентури ($2 < l/d < 6$) с коэффициентом расхода $\mu_H = 0{,}82$. Первоначальный напор над центром насадка $H_1 = H = 6{,}5\text{ì}$. За время t_1 этот напор уменьшается на 0,5 м и $H_2 = H_1 - 0{,}5$ = 6,0 м. Время изменения напора от H_1 до H_2 определяется по формуле:

$$t = \frac{2\Omega\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)}{\mu_H \omega\sqrt{2g}} = \frac{2 \cdot 0{,}224 \cdot 10^6\left(\sqrt{6{,}5} - \sqrt{6}\right)}{0{,}82 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81}} = 63000\text{ñåê} = 17{,}5\text{÷àñ}$$

где ω - площадь сечения насадка (выходного отверстия), $\omega = \pi d^2/4$.

2) Во втором случае H_1 = 6 м, а $H_2 = H_1 - 0{,}5$ = 5,5 м, время опорожнения водохранилища от H_1 до H_2 дано $t = 10\text{÷} = 10 \cdot 3600 = 36000\text{ñåê}$. Из формулы для определения времени опорожнения водохранилища от H_1 до H_2 искомый диаметр насадка

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 2\Omega\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)}{t\mu_H \pi \sqrt{2g}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 0{,}185 \cdot 10^6\left(\sqrt{6} - \sqrt{5{,}5}\right)}{36000 \cdot 0{,}82 \cdot 3{,}14\sqrt{2 \cdot 9{,}81}}} = 0{,}614\text{ì} \ .$$

Задача 8.8. Определить давление струи жидкости на неподвижную стену, наклоненную к горизонту под углом 15°. Струя вытекает из конического насадка диаметром d = 1 мм с давлением Δp = 20 мПа. Плотность жидкости ρ = 900 кг/м^3.

Решение. Напор на выходе из насадка $H = \dfrac{\Delta p}{\rho g} = \dfrac{20 \cdot 10^6}{900 \cdot 9{,}81} = 2265\text{ì}$, а

расход $Q = \mu_H \omega \sqrt{2gH} = 0{,}94 \cdot \dfrac{3{,}14 \cdot 0{,}001^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2265} = 0{,}0001555\text{ì}^{\ 3}/c.$

Скорость вытекания струи из насадка

$$\upsilon = \varphi_H \sqrt{2gH} = 0{,}94\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2265} \approx 198{,}2\text{ì} \ /\text{ñ}.$$

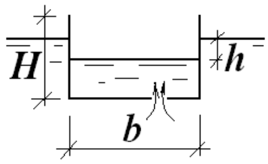
Сила давления струн на стенку

$$F = Q\rho\upsilon \sin\alpha = 0{,}1555 \cdot 10^{-3} \cdot 900 \cdot 198{,}2 \cdot 0{,}26 = 7{,}212H.$$

Если стенка стояла бы вертикально, α = 90^o то сила давления струи

$$F_1 = \frac{F}{\sin\alpha} = Q\rho\upsilon = 27{,}74H.$$

Задача 8.9. Открытый пантон, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда шириной b = 2 м, длиной l = 5 м, высотой H = 0,5 м и весом G = 10 кН получил в дне пробоину диаметром d = 15 мм. Считая пробоину затопленным отверстием в тонкой стенке, определить время, в течение которого пантон затонет.



Решение. Из условия равенства архимедовой силы и веса пантона величина осадки пантона до получения пробоины $h = \dfrac{G}{bl\rho g} = \dfrac{10 \cdot 10^3}{2 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 9{,}81} = 0{,}102\text{ì}$.

При напоре h расход через пробоину

$$Q = \mu_0 \omega \sqrt{2gh} = 0{,}7 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}015^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}102} = 0{,}000175\text{ì}^{\ 3}/c = 0{,}175\text{ë}/\text{ñ}.$$

Увеличение глубины воды в понтоне за секунду в результате притока

$$h_1 = \frac{Q}{bl} = \frac{0{,}175 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5} = 1{,}75 \cdot 10^5\,\text{ì} \ .$$

Осадка пантона от веса поступающей в него воды за секунду

$$h_2 = \frac{Q\rho g}{\rho g bl} = \frac{Q}{bl}.$$

Поскольку $h_1 = h_2$, то напор h над пробоиной остается постоянным в течение всего времени погружения понтона.

Пантон затонет, когда его вес станет равным $G_1 = \rho gbl(H - h)$ или когда в него поступит объем воды

$$W = bl(H - h) = 2 \cdot 5(0{,}5 - 0{,}102) = 3{,}98 \text{ м}^3.$$

Время от начала получения пробоины до затопления пантона

$$h_1 = \frac{W}{Q} = \frac{3{,}98}{0{,}175 \cdot 10^{-3}} = 22743c = 6{,}32 \text{÷àñà}$$

Задача 8.10. Цилиндрическая бочка радиусом r = 0,3 м и высотой L = 1 м залита водой, давление на свободной поверхности которой равно атмосферному. Определить время опорожнения бочки: а) через отверстие диаметром d = 2 см в боковой стенке при горизонтальном положении бочки (рисунок 8.6), б) через такое же отверстие в дне при вертикальном положении бочки.

Решение. Для отверстия на дне справочное значение коэффициента расхода μ_0 =0,7.

а) При горизонтальном положении бочки для ее полного опорожнения необходимо, чтобы отверстие диаметром d = 2 см в боковой стенке было внизу. Необходимое для опорожнения бочки время по (8.10)

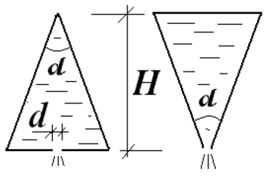
$$t_1 = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{8Lr\sqrt{r}}{3\mu\omega\sqrt{g}} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 0{,}3\sqrt{0{,}3} \cdot 4}{3 \cdot 0{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}02^2\sqrt{9{,}81}} = 636c = 10{,}61\text{ìèí} \;.$$

б) При вертикальном положении бочки и нахождении отверстия в дне необходимое для ее опорожнения время по (8.7)

$$t_2 = \frac{2W}{Q} = \frac{2\pi r^2 L}{\mu\omega\sqrt{2gL}} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3^2 \cdot 1 \cdot 4}{0{,}7 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}02^2\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1}} = 580{,}53c = 9{,}68\text{ìèí} \;.$$

Вывод: при вертикальном расположении бочка опорожняется почти на минуту раньше или в 10.61/9,68 = 1,1 раза быстрее.

Задача 8.11. Сравнить время опорожнения одинаковых конических сосудов с углом конуса α и высотой H, один из которых расположен вершиной вниз, а другой – вершиной вверх. В обоих случаях истечение происходит через отверстие диаметром d с коэффициентом расхода μ. Давление на свободной поверхности жидкости считать атмосферным, а течение – установившимся. Принять $H >> d$.



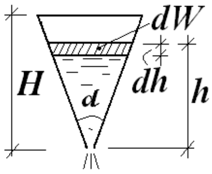
Решение. За элементарное время dt напор над центром отверстия уменьшится на dh, а объем жидкости в сосуде уменьшится на величину

$$dW = -\frac{\pi}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot 3h^2 dh = -\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}h^2 dh = -Ah^2 dh,$$

где обозначено $A = \pi\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

1. Сначала рассмотрим опорожнение конического сосуда, расположенного вершиной вниз. За время dt при напоре h из отверстия площадью $\omega = \pi d^2/4$ будет вытекать объем жидкости

$$Qdt = \mu\omega\sqrt{2gh}dt = \mu\omega\sqrt{2g}\sqrt{h}dt = B\sqrt{h}dt,$$



где обозначено $B = \mu\omega\sqrt{2g}$.

Приравняем объем уменьшения жидкости в сосуде объему жидкости, вытекающему из отверстия:

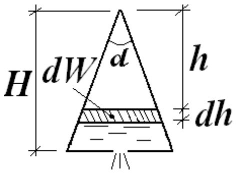
$$dW = Qdt \text{ или } -Ah^2dh = B\sqrt{h}dt.$$

Интегрируя это выражение при изменении h от H до 0, а время t от нуля до t_1, получим время опорожнения сосуда

$$t_1 = \frac{A}{B}\cdot\frac{1}{2{,}5}H^{2{,}5} = \frac{\pi\sin^2\alpha/2}{2{,}5\mu\omega\sqrt{2g}}H^{2{,}5}.$$

2. При расположении сосуда вершиной вверх напор над центром отверстия на дне равен $(H - h)$, а вытекаемый расход $Q = \mu\omega\sqrt{2g(H-h)}$. Аналогично предыдущему случаю воспользуемся равенством $dW = Qdt$:

$$Ah^2dh = B\sqrt{(H-h)}dt.$$



Разделим переменные:

$$dt = \frac{A}{B}\cdot\frac{h^2}{\sqrt{H-h}}dh.$$

Интегрируя полученное уравнение при изменении t от нуля до t_2, а h от 0 до H, получим:

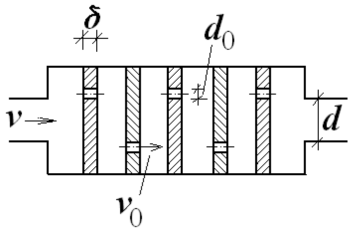
$$t_2 = \frac{A}{B}\cdot\frac{2(3h^2+4Hh+8H^2)}{-15}\sqrt{H-h}\Bigg|_0^H = \frac{A}{B}\cdot\frac{2}{-15}\cdot(-8H^2\sqrt{H}) = \frac{16}{15}\frac{\pi\sin^2\alpha/2}{\mu\omega\sqrt{2g}}H^{2{,}5}.$$

Отношение $t_2/t_1 = 40/15 = 2{,}667$ указывает на то, что при расположении конического сосуда вершиной вверх он опорожнится в 2,667 раза медленнее по сравнению с расположением сосуда вершиной вниз.

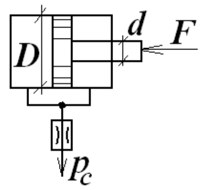
8.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.12. Из закрытого бака вода вытекает через отверстие d = 2 см в его боковой стенке. Постоянный напор над центром тяжести отверстия H = 2 м, манометрическое давление на поверхности воды в баке $p_м$ = 10 кПа. Найти: а) насколько нужно увеличить давление $p_м$, чтобы расход увеличился на 30%, б) при каком давлении $p_м$ расход Q = 0,86 л/с.

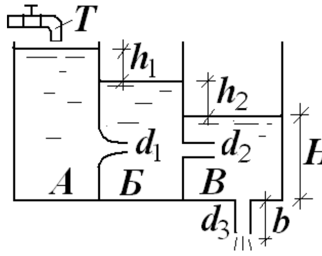
Задача 8.13. Определить коэффициент сопротивления пятиступенчатого дросселя, отнесенный к скорости в трубке диаметром d = 10 мм. Каждая ступень представляет собой отверстие диаметром d_0 = 2 мм в стенке толщиной δ = 1 мм. Коэффициент расхода отверстия μ = 0,62, взаимное влияние ступенек дросселя отсутствует (скорость в промежутках между стенками гасится до нуля), а полная потеря напора распределяется между ступенями поровну. Определить полную потерю давления в дросселе при скорости течения в трубке v = 1 м/с, если плотность жидкости ρ = 900 кг/м^3.



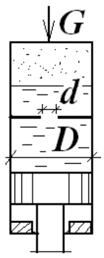
Задача 8.14. Считая жидкость несжимаемой, определить скорость движения поршня под действием силы F = 10 кН на штоке, диаметр поршня D = 80 мм, диаметр штока d = 30 мм, проходное сечение дросселя ω = 2 мм^2, его коэффициент расхода μ = 0,75, избыточное давление слива $p_с$ = 0, плотность рабочей жидкости ρ = 900 кг/м^3.



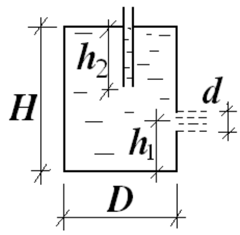
Задача 8.15. Вода в трубе Т подается в резервуар А. откуда через сопло диаметром d_1 = 8 мм перетекает в резервуар Б. Далее через внешний цилиндрический насадок d_2 = 10 мм вода попадает в резервуар В и, наконец, вытекает в атмосферу через внешний цилиндрический насадок d_3= 6 мм. При этом H = 1,1 м, b = 25 мм. Определить расход воды через систему и перепады уровней h_1 и h_2. Коэффициенты истечения принять μ_1=0,97, μ_2=μ_3=0,82.



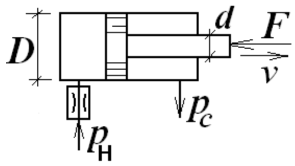
Задача 8.16. На рисунке показана упрощенная схема самолетного гидропневмоамортизатора. Процесс амортизации при посадке самолета происходит за счет проталкивания рабочей жидкости через отверстие d = 8 мм и за счет сжатия воздуха. Диаметр поршня D = 100 мм. Определить скорость движения цилиндра относительно поршня в начальный момент амортизации, если первоначальное давление воздуха в верхней части амортизатора p_1 = 0,2 МПа, расчетное усилие вдоль штока G = 50 кН, коэффициент расхода отверстия μ = 0,75, плотность рабочей жидкости ρ = 900 кг/м^3.



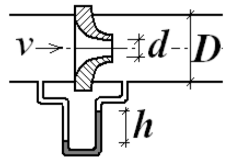
Задача 8.17. «Сосуд Мариотта» представляет собой плотно закрытый сосуд, в крышке которого укреплена трубка, сообщающая сосуд с атмосферой. Трубка может быть укреплена на различной высоте. В стенке сосуда имеется отверстие диаметром d = 10 мм, через которое происходит истечение в атмосферу. Какое давление установится в сосуде на уровне нижнего обреза трубки при истечении? Определить скорость истечения и время опорожнения сосуда от верха до нижнего обреза трубки. Объемом жидкости в трубке сопротивлением при истечении пренебречь (коэффициент сжатия струи на выходе из отверстия ε = 1). Форма сосуда цилиндрическая, D = 100 мм, H = 2 м, h_1 = 0,2 м, h_2 = 1 м.



Задача 8.18. Определить скорость движения штока v при известной величине силы F = 55 кН, преодолеваемой штоком гидроцилиндра при его движении против нагрузки. Давление на входе в дроссель $p_н$ = 20 МПа, давление на сливе $p_с$ = 0,3 МПа, коэффициент расхода дросселя μ = 0,62, диаметр отверстия дросселя d = 1,2 мм, диаметр гидроцилиндра D = 70 мм, диаметр штока $d_ш$ = 30 мм, плотность рабочей жидкости ρ = 900 кг/м^3.

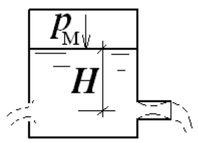


Задача 8.19. Определить расход керосина плотностью ρ = 800 кг/м^3 в трубе диаметром D = 50 мм, если показание ртутного дифференциального манометра, измеряющего перепад давлений в сечениях потока перед соплом и на выходе из него, равно h = 175 мм, выходной диаметр сопла d = 30 мм, а его коэффициент сопротивления ς = 0,08. Сжатие струи при выходе из сопла отсутствует. Какова потеря напора в расходомере? При каком избыточном давлении перед соплом в расходомере начнется кавитация, если давление насыщенных паров керосина $p_{нп}$ = 150 мм.рт.ст.

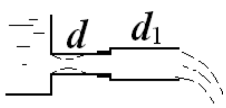


Задача 8.20. Бак с цилиндрическим основанием 1х1 м и высотой H = 2 м заполнен доверху водой. Найти: 1) время, за которое из бака вытечет половина воды через внешний цилиндрический насадок диаметром d = 40 мм в дне бака; 2) время опорожнения бака через коноидальный насадок d = 25 мм в дне бака.

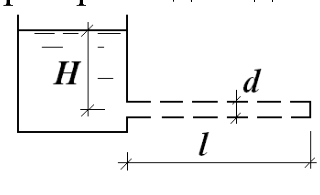
Задача 8.21. Из закрытого резервуара в атмосферу вытекает вода через круглое отверстие в тонкой стенке и внешний цилиндрический насадок диаметрами d_1= d_2 = 20 мм. Определить: 1) манометрическое давление $p_м$ на свободной поверхности воды в резервуаре, если разность расходов отверстия и насадка ΔQ = 0,7 л/с, а напор H = 1,5 м; 2) разность расходов ΔQ отверстия и насадка при H = 1,0 м и $p_м$ = 50 кПа.



Задача 8.22. Как изменится расход воды через внешний цилиндрический насадок (μ = 0,82) диаметром d = 20 мм, если к нему привинтить цилиндрическую трубку d_1 = 30 мм и получить истечение с заполнением выходного сечения трубки? Потерей на трение по длине пренебречь. Подсчитать максимальный расход, при котором возможно такое истечение. Принять коэффициент сжатия струи внутри насадка ε = 0,64, атмосферное давление $h_{атм}$ = 750 мм.рт.ст., давление насыщенных паров $h_{нп}$ = 40 мм.рт.ст.



Задача 8.23. Определить длину трубы l при которой расход жидкости из бака будет в два раза меньше, чем через отверстие того же диаметра d = 50 мм. Напор над отверстием равен H = 5 м. Коэффициент гидравлического трения принять λ = 0,025.



9 ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

9.1 Краткие теоретические сведения

Гидромашины. Понятие «гидромашины» включает в себя насосы и гидродвигатели. В насосе происходит преобразование энергии приводящего двигателя в энергию потока жидкости, а гидродвигатель преобразует энергию потока жидкости в механическую работу.

Наибольшее распространение получили объемные и лопастные насосы и гидродвигатели. Объемные гидромашины работают за счет изменения объема рабочих камер, периодически соединяющихся с входными и выходными патрубками. Рабочим органом лопастной машины является вращающееся рабочее колесо, снабженное лопастями. Энергия от рабочего колеса жидкости (лопастной насос) или от жидкости рабочему колесу (лопастной двигатель) передается путем непрерывного динамического взаимодействия лопастей колеса с обтекающей их жидкостью.

Лопастные насосы. К лопастным насосам относятся центробежные, осевые и диагональные насосы. Основными рабочими параметрами этих насосов являются: производительность Q, развиваемый напор H, мощность N и коэффициент полезного действия η.

Теоретическая производительность насоса равна

$$Q = \pi D_2 b c_{2\text{г}}, \tag{9.1}$$

где D_2 – наружный диаметр рабочего колеса;
b – ширина рабочего колеса на выходе;
$c_{2\text{г}}$ – радиальная составляющая абсолютной скорости на выходе.

Фактическая производительность наноса $Q_\text{н}$ меньше теоретической на величину объемных потерь (утечек), учитываемых объемным коэффициентом полезного действия η_0 : $Q_\text{н} = Q \cdot \eta_0$

Теоретическая величина напора определяется по зависимости

$$\acute{I} = \frac{u_2 c_2 \cos\alpha_2 - u_1 c_1 \cos\alpha_1}{g},$$

где u_1 и u_2 – переносная скорость соответственно на входе и на выходе жидкости из рабочего колеса;
c_1 и c_2 – абсолютная скорость соответственно на входе и на выходе из рабочего колеса;
α_1 и α_2 – углы соответствующих треугольников скоростей.

Фактический напор насоса $H_\text{н}$ меньше теоретического на величину гидравлических потерь, учитываемых гидравлическим коэффициентом полезного действия $\eta_\text{г}$: $H_\text{н} = H\eta_\text{г}$.

Полезная мощность насоса равна

$$N_\text{н} = Qp = QH\rho g, \tag{9.2}$$

где ρ – плотность жидкости.

Потребляемая мощность $N_{пот}$ больше полезной на величину потерь в насосе. Эти потери оцениваются коэффициентом полезного действия насоса η

$$N_{пот} = \frac{N_{í}}{\eta}. \qquad (9.3)$$

Полный коэффициент полезного действия насоса равен:

$$\eta = \eta_{о} \cdot \eta_{г} \cdot \eta_{м}. \qquad (9.4)$$

Формулы пересчета основных рабочих параметров для одного и того же насоса, работающего на разных частотах вращения принимают вид (при условии $\eta = const$):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{n_1}{n_2}, \frac{H_1}{H_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}; \frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1^3}{n_2^3}. \qquad (9.5)$$

Для сравнительной оценки различных типов колес насосов служит коэффициент быстроходности n_s (об/мин)

$$n_s = 3{,}65 \frac{n\sqrt{Q}}{H^{3/4}}. \qquad (9.6)$$

Значения n_s для соответствующих типов колес приведены в [8 и др.].

Допустимая высота всасывания $h_{вс}$ насосов рассчитывается из условия бескавитационного режима работы

$$h_{âñ} \le h_{âàê} - \frac{v_{âñ}^2}{2g} - \sum h_{âñ} - h_{ï}, \qquad (9.7)$$

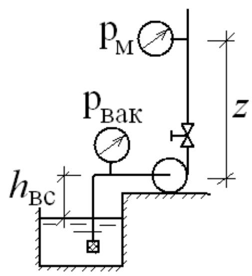
где $h_{âàê}$ - вакуумметрическая высота всасывания; $h_{âàê} = (p_{àòì} - ð_{âñ})/(\rho g)$,

$v_{âñ}$ - средняя скорость во всасывающей трубе насоса;

$\sum h_{âñ}$ - потери напора во всасывающей трубе;

$h_{ï}$ - высота давления насыщенного пара $(h_{ï} = p_{ïï}/(\rho g))$;

$p_{í.ï}$ - давление насыщенного пара жидкости, зависящее от рода жидкости и ее температуры.



Когда абсолютное давление на входе в центробежный насос оказывается слишком низким, на входных элементах лопаток рабочего колеса возникает кавитация. При этом напор, создаваемый насосом, и КПД резко падают.

Кавитационным запасом называют разность между полным напором жидкости на входном патрубке насоса и давлением насыщенных паров жидкости, то есть

$$h_{ÊÀÂ} = \frac{p_{â}}{\rho g} + \frac{v_{â}^2}{2g} - \frac{p_{í.ï.}}{\rho g},$$

где $p_{В}$ и $v_{в}$ - давление и скорость во входном патрубке насоса;
$p_{н.п.}$ - давление насыщенных паров жидкости при данной температуре.

Значение кавитационного запаса, при котором начинается кавитация в насосе, называют критическим или минимально допустимым кавитационным запасом и обозначают $h^{кр}_{КАВ}$. Эта величина будет тем больше, чем больше подача насоса и частота вращения его колеса, и может быть найдена по формуле С.С. Руднева:

$$\Delta h^{кр}_{КАВ} = 10\frac{(n^2 Q)^{2/3}}{C^{4/3}} . \qquad (9.8)$$

C = 800…1000 – коэффициент для обычных насосов. Для насосов с повышенными кавитационными свойствами $C \le 1300$.

Объемные насосы и гидродвигатели. К гидрообъемным насосам (насосам вытеснения) относятся поршневые, плунжерные, радиально-поршневые, аксиально-поршневые, пластинчатые и червячно-винтовые.

Теоретическая производительность объемных насосов определяется по формуле

$$Q = V_{н} n, \qquad (9.9)$$

где $V_{н}$ – рабочий объем гидромашины, равный расчетному объему жидкости, вытесненной за один оборот вала;
n – частота вращения вала.

Фактическая производительность насосов $Q_{н}$ меньше расчетной на величину потерь (утечек жидкости)

$$Q_{н} = Q{\cdot}\eta_0 = V_{н}{\cdot}n{\cdot}\eta_0, \qquad (9.10)$$

где η_0 – объемный коэффициент полезного действия насоса. Значения η_0 некоторых типов приведении в [8, 14 и др.].

Давление жидкости, развиваемое насосом, согласно уравнению Бернулли равно:

$$p = p_{м} + p_{вак} + \alpha\rho\frac{v_{н}^2 - v_{вс}^2}{2},$$

где $p_{м}$ – манометрическое давление в нагнетательной линии насоса;
$p_{вак}$ - вакуумметрическое давление во всасывающей линии насоса;
$v_{н}$ и $v_{вс}$– средние скорости соответственно в нагнетательной и всасывающей линиях.

Крутящий момент на валу насоса определяется по формуле:

$$M_{н} = \frac{1}{2\pi} p_{н} V_{н} \frac{1}{\eta_{м}}, \qquad (9.11)$$

где $\eta_м$ – механический коэффициент полезного действия гидромашины, учитывающий потери на трение в ее деталях, значения его указаны в приложении 10 [8].

Эффективная (полезная) мощность, развиваемая насосом, равна

$$N_н = Q_н\, p_н\,. \tag{9.12}$$

Потребляемая мощность выражается через крутящий момент и угловую скорость вращения вала

$$N_{пот} = M_н\, \omega_н\,. \tag{9.13}$$

Потребляемая насосом мощность выше эффективной на величину потерь мощности, обусловленных потерями производительности, давления и механического трения

$$\eta = \frac{N_н}{N_{пот}}\,. \tag{9.14}$$

Полный КПД насоса равен: $\eta = \eta_0 \eta_м \eta_г$.

Объемные гидроприводы по характеру движения выходного звена делятся:

- на гидроцилиндры, осуществляющие возвратно-поступательное движение;
- поворотные гидродвигатели с поворотным движением выходного звена на ограниченный угол;
- гидромоторы с вращательным движением выходного звена, в качестве которых используются роторные гидромашины.

Фактический расход жидкости, подводимый к гидромотору, определяется по формуле

$$Q_м = \frac{V_м\, n_м}{\eta_0}. \tag{9.15}$$

Полезная мощность, развиваемая гидромотором равна

$$N_м = M_н\, \omega_н\,. \tag{9.16}$$

Потребляемая гидромотором мощность

$$N_{пот} = Q_м\, p\,. \tag{9.17}$$

Потребляемая гидромотором мощность выше эффективной на величину потерь мощности, обусловленных потерями производительности, давления и механического трения

$$\eta = \frac{N_н}{N_{пот}}\,. \tag{9.18}$$

Полный КПД гидродвигателя равен: $\eta = \eta_0 \eta_м \eta_г$.

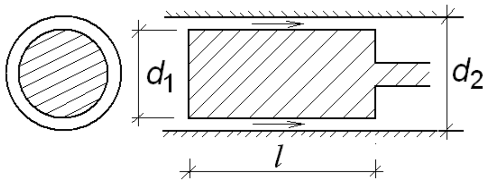
Момент, развиваемый на валу гидромотора, равен

$$M_{\text{ì}} = \frac{1}{2\pi}\Delta p_{\text{ì}} V_{\text{ì}} \eta_{\text{ì}} , \qquad (9.19)$$

где $\Delta p_м$ – перепад давления на гидромоторе, равный разности давлений на входе и выходе гидромотора.

9.2 Примеры решения задач

Задача 9.1. Определить расход жидкости через зазор между цилиндрическими деталями, если d_1 = 20,04 см, d_2 = 20,0 см, длина стержня l = 15 см. Поршень неподвижный. Перепад давления Δp = 20 МПа, динамическая вязкость жидкости μ = 0,017 Н·с/м = 0,017 Па·с.



Решение. Ширина радиального зазора

$$\delta = (d_2 - d_1)/2 = 0{,}02 \text{ см.}$$

Периметр зазора

$$B = \pi(d_2 + d_1)/2 = 3{,}14 \cdot 20{,}02 = 62{,}86 \text{ см} = 0{,}6286 \text{ м.}$$

Расход жидкости через зазор

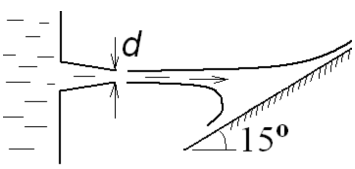
$$Q = v \cdot \omega = \delta B v = \delta^3 B \Delta p/(12\mu l) =$$

$$= (0{,}02 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 0{,}6286 \cdot 20 \cdot 10^6/(12 \cdot 0{,}017 \cdot 0{,}15) = 3{,}28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 3{,}28 \text{ л/с.}$$

При максимальном значении эксцентриситета расход через щель увеличивается в 2,5 раза по сравнению с концентричным зазором. Поэтому расход при полном эксцентриситете

$$Q_0 = 2{,}5Q = 2{,}5 \cdot 3{,}28 = 8{,}2 \text{ л/с.}$$

Задача 9.2. Определить давление струи жидкости на неподвижную стену, наклоненную к горизонту на 15°. Струя вытекает из конического насадка диаметром 1 мм под давлением 20 МПа. Плотность жидкости ρ = 900 кг/м^3.



Решение. При напоре $H = \Delta p/(\rho g)$ и площади живого сечения $\omega = \pi d^2/4$ вытекающий через конический насадок расход

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0{,}94 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}001^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{20 \cdot 10^6}{9{,}81 \cdot 900}} = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \text{ ì}^3/c = 0{,}15 \text{ë}/c.$$

Скорость вытекания струи из насадка

$$v = \mu\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 0{,}94\sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 10^6}{900}} = 205 \text{ì}/c.$$

Сила давления струи на стенку

$$F = Q\rho v \sin\alpha = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 900 \cdot 205 \cdot 0{,}26 = 75{,}8 \text{ Н.}$$

Если стенка была бы вертикальной α = 90°, то $F_1 = Q\rho v = F/0{,}26$ = 292 Н.

Задача 9.3. Определить изменение заключенного в стальном цилиндре объема индустриального масла, находящегося под атмосферным давлением, при увеличении давления до 20МПа. Длина цилиндра l = 1 м, внутренний диаметр d = 100 мм, толщина стенки цилиндра δ = 1 мм, модуль упругости масла $E_ж = 1700 \cdot 10^6$ Па, модуль упругости материала трубы $E_т = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение. Объем масла в цилиндре

$$W = l\omega = l\pi d^2/4 = 1 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2/4 = 7{,}85 \cdot 10^{-3}\ м^3.$$

Приведенный модуль упругости индустриального масла находят по формуле:

$$E_п = \frac{E_æ}{1 + \frac{d}{\delta}\frac{E_æ}{E_Ò}} = \frac{1700 \cdot 10^6}{1 + \frac{100}{1} \cdot \frac{1700 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6}} = 9{,}2 \cdot 10^8\ \text{Ïà}\ .$$

Коэффициент объемного сжатия β_p (или модуль упругости E_n) находим из формулы: $\beta_ð = -\frac{1}{W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta p} = \frac{1}{E_п}$,

откуда искомое изменение объема

$$\Delta W = -\frac{W \cdot \Delta p}{E_п} = -\frac{7{,}85 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^6}{9{,}2 \cdot 10^8} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{ì}^{\ 3} = 1{,}7\ \text{ë}.$$

Задача 9.4. Определить основные рабочие параметры силового цилиндра по следующим данным: рабочая нагрузка F = 8000 Н, максимальная скорость перемещения поршня v = 0,5 м/с, время разгона поршня от 0 до 0,5 м/с Δt = 0,1 с и давление p = 3 МПа.

Решение. Силу инерции в период разгона находят из формулы:

$$F_{ин} = \Delta vF/(g\Delta t) = (0{,}5 - 0) \cdot 8000/(9{,}81 \cdot 0{,}1) = 4077\ Н.$$

При постоянном ускорении длина пути разгона составит

$$L = Fv^2/(F_{ин}2g) = 8000 \cdot 0{,}5^2/(4077 \cdot 2 \cdot 9{,}81) = 0{,}025\ м.$$

Общее усилие на поршне

$$F_п = F + F_{ин} = 8000 + 4077 = 12077\ Н.$$

С другой стороны, при диаметре цилиндра D

$$F_п = p\omega = p\pi D^2/4,$$

откуда диаметр цилиндра с учетом коэффициента потерь k = 1,5

$$D = \sqrt{k\frac{4F_ï}{\pi ð}} = \sqrt{1{,}5\frac{4 \cdot 12077}{3{,}14 \cdot 3 \cdot 10^6}} = 0{,}88\text{ì}\ .$$

Принимая коэффициент трения f = 0,2, ширину уплотнения b = 4 см, величину контактного давления на контактную поверхность $p_к$ = 2,2 Н/см^2, найдем силу трения в цилиндре

$$R_{тр} = f\pi Dbp_к = 0{,}2 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}8 \cdot 4 \cdot 2{,}2 = 48{,}6\ Н.$$

Требуемая подача насоса

$$Q = S_п v = 56{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 100 = 28{,}2 \cdot 10^2\ см^3/с.$$

Мощность гидроцилиндра при статической нагрузке

$$N = Fv = 8000 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 4\ кВт.$$

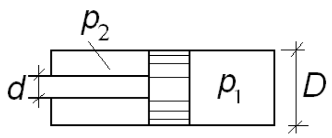
Мощность, расходуемая на трение, составит:

$$N_{тр} = R_{тр}v = 48{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 24{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ кВт.}$$

Коэффициент полезного действия цилидра

$$\eta = \frac{N}{N + N_{\text{ðð}}} = \frac{4}{4 + 0{,}0243} = 0{,}99.$$

Задача 9.5. Определить давление p_1, которое нужно приложить к поршню силового гидроцилиндра для создания силы вдоль штока F = 7850 Н. Силы трения поршня в цилиндре и штока в сальнике равны 10% от полного давления на поршень. Избыточное давление по левую сторону поршня p_2 = 9,81 Н/см^2, диаметр гидроцилиндра D = 100мм, диаметр штока d = 30 мм.



Решение. Сила давления жидкости на поршень справа $p_1 s_1 = p_1 \pi D^2/4$ должна преодолевать силы: F = 7850 Н, $p_2\pi(D^2 - d^2)/4$ и трения, равную $0{,}1[p_1\pi D^2 - p_2\pi(D^2 - d^2)]/4$:

$$p_1\frac{\pi D^2}{4} = F + p_2\frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4} + 0{,}1\left[p_1 D^2 - p_2\left(D^2 - d^2\right)\right]\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда искомое давление

$$p_1 = \frac{4F}{0{,}9\pi D^2} + \frac{p_2\left(D^2 - d^2\right)}{D^2} = \frac{4 \cdot 7850}{0{,}9 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1^2} + \frac{9{,}81\left(0{,}1^2 - 0{,}03^2\right)}{0{,}1^2} = 1{,}2 \cdot 10^6\ \text{Ïà}\ .$$

Задача 9.6. Давление в напорной линии золотника $p_н$ = 20 МПа, давление нагрузки p_1 = 18 МПа. Расход рабочей жидкости через золотник Q = 30 л/мин (золотник четырехцелевой, рабочая жидкость – минеральное масло). Определить основные размеры золотника.

Решение. Секундный расход $Q = 30 \cdot 10^3/60 = 500$ см^3/с.
Перепад давления на рабочих окнах составит

$$\Delta p = (p_н - p_1)/2 = (29 - 18)/2 = 1 \text{ МПа.}$$

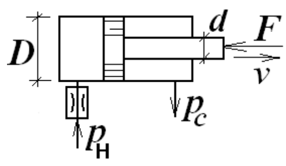
Площадь рабочего окна

$$\omega = \frac{Q}{\upsilon} = \frac{Q}{\mu\sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho}}} = \frac{500 \cdot 10^{-4}}{0{,}7\sqrt{\dfrac{2 \cdot 10^6 \cdot 1}{900}}} = 0{,}15\ \text{ñì}^2.$$

Ширина рабочего окна при ходе плунжера x = 2 мм

$$b = \frac{10}{x} = \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}8\ \text{ñì}\ .$$

Задача 9.7. Определить значение силы F, преодолеваемой штоком гидроцилиндра при движении его против нагрузки со скоростью v = 20 мм/с. Давление на входе в дроссель $p_н$ = 20 МПа, давление на сливе $p_с$ = 0,3 МПа, коэффициент расхода дросселя μ = 0,62, диа-



метр отверстия дросселя d = 1,2 мм, диаметр гидроцилиндра D = 70 мм, диаметр штока $d_ш$ = 30 мм, плотность рабочей жидкости ρ = 900 кг/м^3.

Решение. Обозначим давление на выходе из дросселя через p. Расход жидкости, прошедший через дроссель по формуле истечения из отверстия

$$Q_1 = \mu \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_{н} - p\right)},$$

равен расходу, поступившему в поршневую полость $Q_2 = vs = v\pi D^2/4$, то есть $Q_1 = Q_2$ или

$$\mu \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_{н} - p\right)} == v\frac{\pi D^2}{4}.$$

Отсюда давление на выходе из дросселя

$$p = p_{н} - \frac{v^2 D^4 \rho}{2\mu^2 d^4}.$$

Далее составим уравнение равновесия сил, действующих на поршень:

$$ps - F - p_с(s - s_ш) = 0,$$

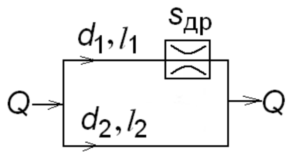
где s – площадь поршня, $s_ш$ – площадь штока.
Из данного уравнения находим силу F, преодолеваемую штоком гидроцилиндра при движении его против нагрузки:

$$F = ps - p_с\left(s - s_ш\right) = \left(p_{н} - \frac{v^2 D^4 \rho}{2\mu^2 d^4}\right)\cdot\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi p_с}{4}\left(D^2 - d_ш^2\right) =$$

$$= \left(20\cdot 10^6 - \frac{\left(20\cdot 10^{-3}\right)^2\cdot 0{,}07^4\cdot 900}{2\cdot 0{,}62^2\cdot\left(1{,}2\cdot 10^{-3}\right)4}\right)\cdot\frac{3{,}14\cdot 0{,}07^2}{4} -$$

$$-\frac{3{,}14\cdot 0{,}3\cdot 10^6}{4}\cdot\left(0{,}07^2 - 0{,}03^2\right) = 55132{,}4\,Н \approx 55\ кН.$$

Задача 9.8. Определить, при каком проходном сечении дросселя расходы в параллельных трубопроводах будут одинаковыми, если длины трубопроводов l_1 = 5 м, l_2 = 10 м, их диаметры $d_1 = d_2$ = 12 мм, коэффициент расхода дросселя μ =0,7, коэффициент кинематической вязкости рабочей жидкости ν = 0,01 Ст; расход жидкости перед разветвлением Q = 0,2 л/с. Трубопровод считать гидравлически гладким.



Решение. Для решения задачи воспользуемся двумя условиями:

1) равенство расходов по ветвям $Q_1 = Q_2$ или $Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1 = 2Q_2$,
2) равенство в параллельно соединенных трубах потерь напора $\sum h_1 = \sum h_2$ или, что то же самое, равенство потерь давления $\sum\Delta p_1 = \sum\Delta p_2$.

Расход в каждой ветви равен половине общего расхода:

$$Q_1 = Q_2 = Q/2 = 0{,}2\cdot10^{-3}/2 = 0{,}1\cdot10^{-3}\ \text{м}^3/\text{с} = 0{,}1\ \text{л/с}.$$

Для установления режима течения рабочей жидкости в трубопроводах, найдем числа Рейнольдса Re_1 и Re_2. Поскольку $d_1 = d_2$ и $Q_1 = Q_2$, то

$$\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2 = \frac{4Q_1}{\pi d_1 \nu} = \frac{4\cdot 0{,}1\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 12\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}01\cdot 10^{-4}} = 10616.$$

Согласно условию задачи трубы являются гидравлически гладкими, тогда коэффициенты сопротивления трения

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{10616}} = 0{,}031.$$

Согласно уравнению неразрывности расход по первому трубопроводу Q_1 равен расходу дросселя $Q_{\text{др}}$, который в свою очередь определим из формулы истечения жидкости через отверстия:

$$Q_1 = Q_{\text{др}} = \mu S_{\text{др}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta p_{\text{др}}}\,.$$

Отсюда потери давления на дросселе

$$\Delta p_{\text{др}} = \frac{\rho Q_1^2}{2\mu^2 S_{\text{др}}^2}.$$

Далее определим потери давления в каждом из трубопроводов

$$\sum\Delta p_1 = \rho g\sum h_1 = \Delta p_{1l} + \Delta p_{\text{др}} = \lambda_1\frac{l_1}{d_1}\frac{8Q_1^2\rho}{\pi^2 d_1^4} + \Delta p_{\text{др}},$$

$$\sum\Delta p_2 = \rho g\sum h_2 = \Delta p_{2l} = \lambda_2\frac{l_2}{d_2}\frac{8Q_2^2\rho}{\pi^2 d_2^4}.$$

Эти уравнения с учетом равенства потерь давления $\sum\Delta p_1 = \sum\Delta p_2$ можно записать в виде:

$$\lambda_1\frac{l_1}{d_1}\frac{8Q_1^2\rho}{d_1\pi^2 d_1^4} + \frac{\rho Q_1^2}{2\mu^2 S_{\text{др}}^2} = \lambda_2\frac{l_2}{d_2}\frac{8Q_2^2\rho}{\pi^2 d_2^4}\ .$$

Или с учетом $\lambda_1 = \lambda_2$, $d_1 = d_2$ и $Q_1 = Q_2$ получим

$$\lambda\frac{8l_1}{\pi^2 d^5} + \frac{1}{2\mu^2 S_{\text{др}}^2} = \lambda\frac{8l_2}{\pi^2 d^5}.$$

Отсюда искомое значение площади проходного отверстия дросселя

$$S_{\text{др}} = \sqrt{\frac{\pi^2 d^5}{16\lambda\mu^2(l_2 - l_1)}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2\cdot(12\cdot10^{-3})^5}{16\cdot 0{,}031\cdot 0{,}7^2(10-5)}} = 45{,}9\cdot10^{-6}\ \text{м}^2.$$

9.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.9. При испытании насоса получены следующие данные: избыточное давление на выходе из насоса p_2 = 0,35 МПа, вакуум перед входом в насос $h_{вак}$ = 294 мм рт. ст., подача Q = 6,5 л/с, крутящий момент на валу насоса M = 41 Н·м, частота вращения вала насоса n = 800 об/мин. Определить мощность, развиваемую насосом, потребляемую мощность и КПД насоса. Диаметры всасывающего и напорного трубопроводов считать одинаковыми.

Задача 9.10. Центробежный насос системы охлаждения двигателя имеет рабочее колесо диаметром D = 200 мм с семью радиальными лопатками (β_2 = 90°), диаметр окружности входа D_1 = 100 мм. Какую частоту вращения нужно сообщить валу этого насоса при работе на воде для получения давления насоса p = 0,2 МПа? Гидравлический КПД насоса принять равным $\eta_г$ = 0,7.

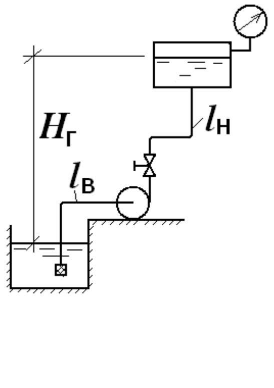
Задача 9.11. Центробежный насос при n = 1450 об/мин подает 75 л/с воды под давлением p = 0,5 МПа.

Определить производительность, напор и мощность насоса при n_1=1150 об/мин и n_2=1150 об/мин, считая КПД постоянным.

Задача 9.12. Определить часовую производительность лопастного насоса, диаметр рабочего колеса которого D = 300 мм, ширина b = 50 мм. Абсолютная скорость на выходе c_2 = 50 м/с, угол α_2 = 10°. Принять объемный КПД равным η_0 = 0,95.

Задача 9.13. Для рабочего колеса центробежного насоса с внутренним диаметром D_1 = 150 мм и наружным диаметром D_2 = 400 мм построить в масштабе треугольники скоростей, приняв следующие значения величин: c_1 = 5 м/с, c_2 = 25 м/с; α_1 = 75°, α_2 = 30°,число оборотов n=1200 об/мин. Найти величину теоретического напора.

Задача 9.14. Центробежный насос подает воду из нижнего заборного резервуара, на свободной поверхности которого давление равно атмосферному, в верхний напорный бак, где поддерживается манометрическое давление p_0 = 0,2 Мпа. Внутренние диаметры всасывающего и напорного трубопроводов одинаковы и равны 100 мм, а их длины соответственно $l_в$ = 5,4 м, $l_н$ = 25 м. Высота подъема воды $H_г$ = 24 м. Принять числовые значения коэффициентов сопротивления задвижки (на напорном трубопроводе): $\zeta_з$ = 4, $\zeta_{кл}$ = 5; эквивалентная шероховатость Δ = 0,1 мм.



Для заданных условий определить напор, развиваемый насосом, и полезную мощность, если производительность насоса $Q_н$ = 32 л/с.

10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

10.1 Инструкция по технике безопасности при работе в лаборатории

К лабораторным занятиям в лаборатории допускаются студенты, получившие инструктаж по технике безопасности у руководителя занятий с соответствующим оформлением его в журнале.

Студентам запрещается самостоятельно включать электродвигатели насосов, открывать и закрывать задвижки трубопроводов и вентили, включать измерительные приборы и установки. Эти работы должны выполняться обслуживающим персоналом лаборатории; либо студентом, но под наблюдением руководителя лабораторных занятий.

Оборудование учебного зала лаборатории относится к разряду особо опасных в отношении поражения электротоком и поэтому студенты обязаны строго соблюдать правила техники безопасности (заземление установок, диэлектрические коврики), и должны уметь оказать первую помощь.

1. Окончив работу на установке, студент обязан поставить в известность об этом руководителя лабораторных занятий или обслуживающий персонал.

10.2 Правила выполнения лабораторных работ.

1. Лабораторные работы выполняются по предварительно составленному кафедрой графику.

2. До начала лабораторных занятий студент обязан ознакомиться с методическими указаниями к данной лабораторной работе, изучить соответствующие вопросы учебной программы по рекомендуемой литературе и составить бланк отчета. Студент допускается к выполнению лабораторной работы при условии сдачи в начале занятия коллоквиума по теоретическим вопросам и методике измерений.

3.Экспериментальная часть работы выполняется бригадой в составе 2-3 студентов под руководством преподавателя или старшего лаборанта. Результаты измерений и наблюдений заносятся каждым студентом в бланк отчета и предъявляются преподавателю для визирования.

4.В конце лабораторного занятия студент должен сдать преподавателю и защитить законченный отчет по выполненной работе. Отчет составляется на стандартных листах бумаги (210x297), должен иметь титульный лист (форма титульного листа дана в приложении) и включать следующие разделы: цель работы; основные положения и расчетные зависимости; схема экспериментальной установки и методика проведения работы; результаты экспериментов (таблицы экспериментальных данных с результатами обработки и графики); анализ полученных результатов.

Студент, защитивший отчет, получает зачет по лабораторной работе.

5.Студент, не допущенный к выполнению лабораторной работы, готовится в течение данного занятия и в конце занятия, после повторного опроса получает допуск к работе. Отработка невыполненной работы проводится по графику отработок во внеурочное время до начала следующего лабораторного занятия.

6.Студент, не получивший зачет по лабораторной работе, не допускается к выполнению следующей работы и обязан сдать зачет во внеурочное время до начала следующего занятия.

7.Студент, получивший зачет по всем лабораторным работам, в конце семестра автоматически получает зачет по всему лабораторному циклу дисциплины.

10.3 Лабораторная работа № 1

ИЗМЕРЕНИЕ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Цель работы:

1. Ознакомление с приборами для измерения давления.
2. Измерение давления пьезометром и жидкостным манометром.

Основные положения и расчетные зависимости:

Гидростатическим давлением называется величина, определяемая зависимостью

$$P = \lim \frac{P}{W}, \tag{1}$$

где P – сила давления на площадь W, выделенную внутри покоящейся жидкости или на ее поверхности.

В системе СИ давление измеряется в Паскалях: 1Па = 1 Н/м^2.

В технике в качестве единицы измерения давления используется также техническая атмосфера: 1 ат = 1 кгс/см^2 = 98100 Па.

Абсолютное (или полное) гидростатическое давление в точке покоящейся жидкости определяется основным уравнением гидростатики:

$$P = P_o + \rho g h, \tag{2}$$

где P_o – внешнее давление на поверхности жидкости;

ρ – плотность жидкости;

g – ускорение свободного падения;

h – глубина погружения точки, в которой измеряется давление.

Разность между абсолютным давлением и атмосферным называется манометрическим (или избыточным) давлением.

$$P_м = P - P_{ат} \tag{3}$$

В открытых сосудах

$$P_м = \rho g h \tag{4}$$

Недостаток давления до атмосферного называется вакуумом

$$P_{вак} = P_{ат} - P \tag{5}$$

Для измерения гидростатического давления и вакуума применяются пьезометры, манометры, вакуумметры. Эти приборы могут быть жидкостными, механическими, электрическими.

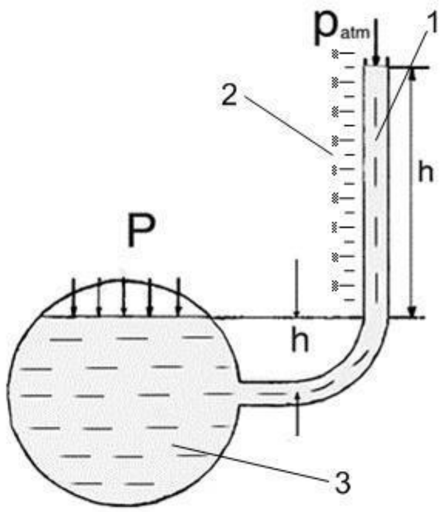


Рис. 1. Пьезометр

Пьезометр состоит из вертикальной стеклянной трубки 1 с внутренним диаметром 10-15 мм (что позволяет исключить явление капиллярного поднятия жидкости) и шкалы 2, проградуированной в миллиметрах. Верхний конец трубки открыт, а нижний присоединяется к резервуару 3 с жидкостью, в которой измеряется давление (рис. 1).

Избыточное давление в точке А присоединения пьезометра определяется зависимостью (4)

$$P_м = \rho g h_п \tag{6}$$

где $h_п$ – высота столба жидкости в пьезометре, называемая пьезометрической высотой.

С помощью пьезометра можно определить давление P_o на поверхности жидкости в закрытом резервуаре:

$$P_o = P_{ат} + pg(h_п - h) \tag{7}$$

где h – глубина погружения точки присоединения пьезометра.

Пьезометрами практически можно измерять давление в жидкости до 10^4 Па.

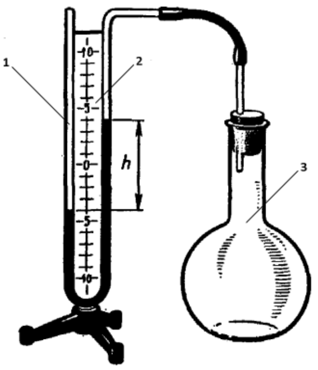


Рис. 2. Жидкостный манометр

Жидкостный манометр (рис. 2) представляет собой U-образную стеклянную трубку 1, снабженную шкалой 2. Один конец трубки открыт, а другой присоединяется к резервуару 3, в которое измеряется давление. В качестве рабочей жидкости в манометрах используется ртуть, вода, спирт, масло и др.

Под действием давления жидкости или газа в резервуаре $P>P_{am}$ в коленах манометра устанавливается разность уровней $h_м$, по которой можно вычислить давление в резервуаре. Абсолютное давление жидкости в резервуаре в точке присоединения манометра равно:

$$P = P_{ат} + \rho_м g h_м - \rho g h_о \qquad (8)$$

где $\rho_м$ – плотность рабочей жидкости в манометре;

ρ – плотность жидкости в резервуаре;

$h_о$ – высота столба жидкости, в которой измеряется давление, над уровнем рабочей жидкости в закрытом колене манометра.

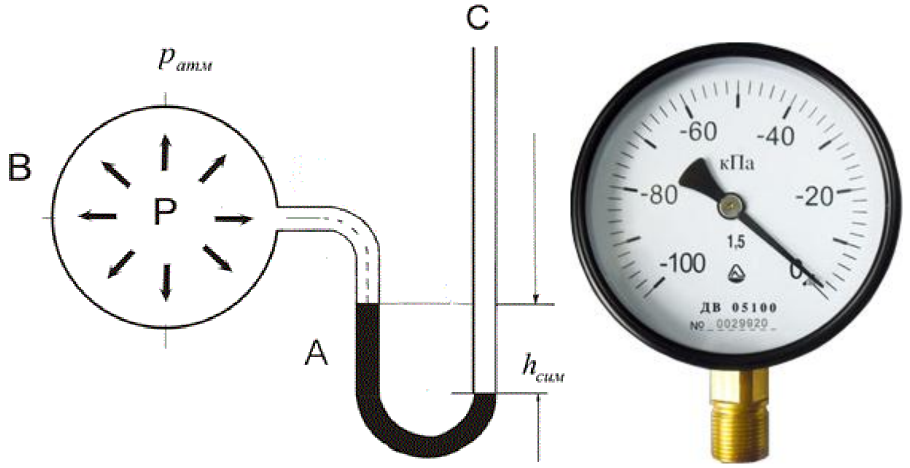


Рис. 3. Вакуумметр

Для измерения вакуума применяется обратный пьезометр, или вакуумметр (рис. 3), представляющий собой изогнутую трубку 1, соединенную с областью вакуума (сосуд 2). Нижний конец трубки опускается в сосуд 3, заполненный жидкостью, на поверхность которой действует атмосферное давление, так как давление в сосуде 2 $P>P_{am,}$ то жидкость в трубке поднимается на некоторую высоту $h_{вак}$, называемую вакуумметрической высотой. Величина вакуума в сосуде вычисляется по формуле:

$$P_{вак} = \rho g h_{вак} \tag{9}$$

В практике измерений широко распространены механические манометры: пружинные и мембранные.

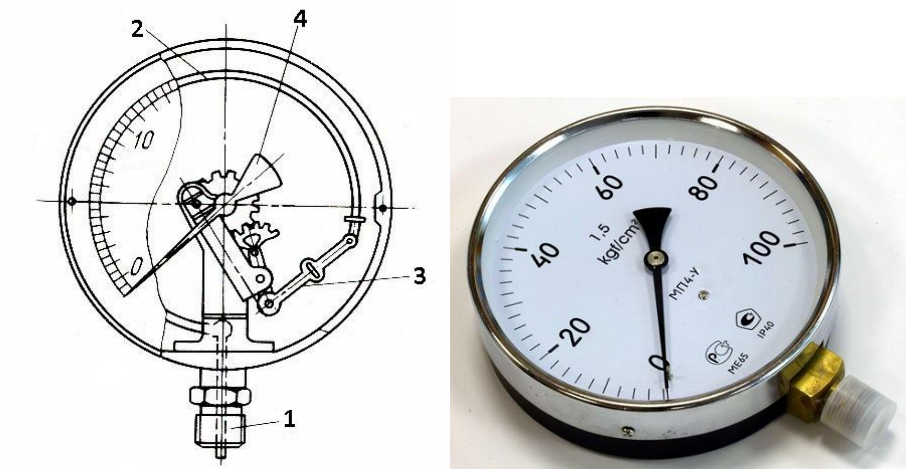


Рис. 4. Пружинный манометр

В пружинном манометре (рис. 4) жидкость или газ поступает через штуцер 1 в изогнутую латунную трубку-пружину 2. При давлении внутри трубки, превышающем атмосферное окружающее, трубка несколько распрямляется. Распрямление трубки при помощи пластины 3 передается на зубчатку, приводящую в движение стрелку 4. нуль шкалы манометра соответствует нормальному атмосферному давлению am = 1,033 ат. Отклонение стрелки 4 показывает избыточное (манометрическое) давление.

Пружинные манометры позволяют измерять давление до 10000 ат. Недостатком их является возникновение остаточных деформаций при длительной эксплуатации, вследствие чего эти манометры требуют периодической проверки и тарировки.

а б

Рис. 5. Мембранный манометр

а – схема; б – общий вид

Основной частью мембранного манометра (рис. 5) является металлическая мембрана 1 волнообразного сечения, соединенная со стрелкой посредством рычажной системы или зубчатого механизма. Под влиянием давления в присоединенном резервуаре мембрана деформируется, и эти деформации передаются стрелке, перемещающейся вдоль шкалы. Мембранные манометры применяют для измерения давления до 40 ат.

Для измерения вакуума также применяются механические вакуумметры аналогичные по устройству механическим манометрам.

Манометры делятся на классы точности. Класс точности определяется величиной максимальной допустимой случайной погрешности, выраженной в процентах от предельного значения шкалы прибора №:

$$K = \frac{\max}{N} x100\%$$

Установлены следующие классы точности приборов для измерения давления: 0,005; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,35; 0,5; 1; 2,5; 4; 6.

Приборы классов точности 0,35-6 используются в качестве рабочих.

Приборы высоких классов точности 0,005-0,35 используются как образцовые. Они применяются при измерениях, требующих повышенной точности и для проверки рабочих манометров.

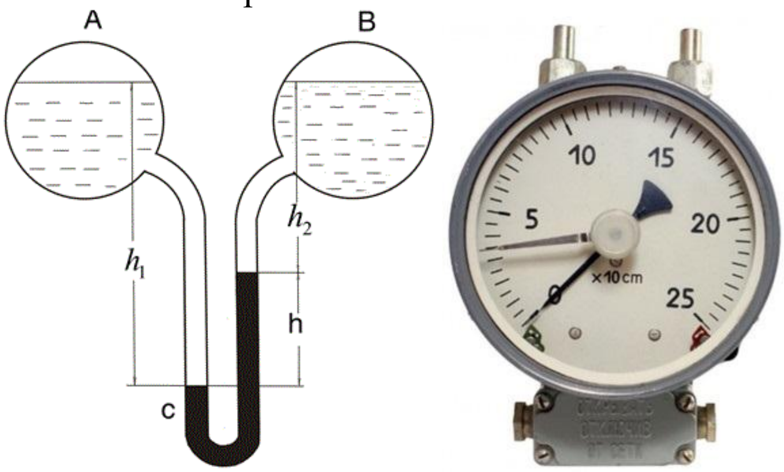


Рис. 6. Дифференциальный манометр.

Для измерения перепада давления в трубопроводах, резервуарах применяются дифференциальные манометры (рис. 6), состоящие из двух пьезометров I и II, соединенных между собой. При больших разностях давлений в качестве рабочей жидкости применяется ртуть, а для измерения небольших давлений возможно применение воды, спирта, масла и др.

Перепад давления $\Delta P = P_a - P$ в точках А и В одной и той же жидкости, находящихся на одинаковой высоте, можно определить, применяя основное уравнение гидростатики (2) для вычисления давлений P_a и $P_в$.

$$\Delta\rho = (\rho_m - \rho)gh \qquad (10)$$

где h – разность уровней в коленах дифференциального манометра,
ρ_m – плотность рабочей жидкости в манометре,
ρ – плотность жидкости, в которой измеряется перепад давления.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 7, где с помощью пьезометра 1 и жидкостного манометра 2 измеряется давление воздуха P_o в воздушной полости закрытого сосуда 3. Избыточное давление воздуха в сосуде создается ручным воздушным насосом. Жидкостный манометр соединен непосредственно с воздушной полостью сосуда 3, а пьезометр подсоединен к патрубку, ось которого расположена на глубине h, под поверхностью жидкости (точка А).

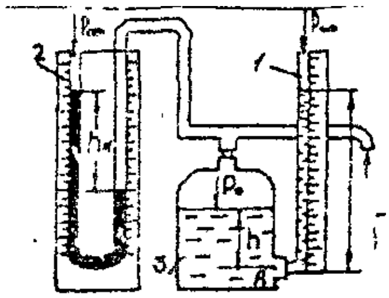


Рис. 7. Схема экспериментальной установки.

Порядок проведения опыта

1. Для измерения давления в воздушной полости сосуда (рис. 7) при помощи насоса создают там давление больше атмосферного. Измеряют высоту поднятия жидкости в пьезометре $h_п$ и разность уровней рабочей жидкости в манометре $h_{m.}$ Одновременно замеряют глубину погружения h точки присоединения пьезометра.

По барометру берут отсчет атмосферного давления $P_{ат}$. Полученные данные заносят в таблицу 1.

Обработка экспериментальных данных

1. При обработке опытных данных, полученных на первом стенде, заполняют таблицу 1.

По формуле (6) вычисляют избыточное давление $P_м$ в точке присоединения пьезометра (в точке А, рис. 7).

Таблица 1

Плотность жидкости в сосуде и пьезометре ρ = 1000 кг/м^3.
Плотность рабочей жидкости в манометре $\rho_м$ =   кг/м^3.
Атмосферное давление $P_{ат}$ = ……… Па.

Номер опыта	Показание пьезометрам	Глубина погружения точки присоединения пьезометра, м	Показание манометрам	Избыточное давление в точке А, $P_м$, Па	Абсолютное давление воздуха в сосуде $P_о$, Па	
					по пьезометру	по манометру

Используя показание пьезометра $h_п$, по формуле (7) вычисляют абсолютное давление воздуха $P_о$ на поверхности жидкости в сосуде. Вычисляют ту же величину $P_о$ по формуле (8) используя показание манометра h_m. При этом $pgh_о = 0$, так как измеряется давление в воздушной среде.

Данные вычислений вносят в таблицу 1 и сопоставляют между собой.

Контрольные вопросы:

1. Гидростатическое давление, его свойства и единицы измерения.
2. Основное уравнение гидростатики. Закон Паскаля.
3. Абсолютное и избыточное давление (манометрическое). Вакуум.
4. Приборы для измерения давления и вакуума.

10.4. Лабораторная работа № 2

ИЗУЧЕНИЕ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Цель работы:

1. Визуальное наблюдение ламинарного и турбулентного режимов движения жидкости.
2. Определение по опытным данным чисел Рейнольдса при ламинарном и турбулентном режимах.
3. Определение критического числа Рейнольдса.

Основные положения и расчетные зависимости

Существуют два режима движения жидкости: ламинарный и турбулентный. Ламинарный режим (лат. lamina – слой) наблюдается при малых скоростях потока и характеризуется слоистым движением жидкости без перемешивания ее. Турбулентный режим (лат. turbulentus – вихревой) наблюдается при больших скоростях потока и характеризуется возникновением в потоке вихревых образований различного масштаба и интенсивным перемешиванием жидкости. От режима движения существенно зависят затраты механической энергии потока на преодоление гидравлических сопротивлений.

Критерием для определения режима движения жидкости служит безразмерный параметр, называемый числом Рейнольдса. В общем случае он имеет вид:

$$R_e = \frac{Vd_э}{Y} \qquad (10.11)$$

где V – средняя скорость потока;

$d_э$ – эквивалентный диаметр;

Y – кинематический коэффициент вязкости.

Для напорного движения жидкости в трубопроводах круглого сечения число Рейнольдса определяется по формуле:

$$R_{e(d)} = \frac{Vd}{Y} \qquad (10.12)$$

где d – диаметр трубопровода.

Число Рейнольдса, при котором турбулентный режим переходит в ламинарный, называют критическим числом Рейнольдса $R_{e(k)}$. Различают нижнее критическое число Рейнольдса $R_{e(k)}$ и верхнее критическое число Рейнольдса $R_{e(k)}$. Пользуясь этими величинами, устанавливают режим движения жидкости: при $R_e < R_{e(k)}$ имеет место ламинарный режим; при $R_e > R_{e(k)}$ – турбулентный режим; при $R_{e(k)} < R_e < R_{e(k)}$ имеет место переходная зона неустойчивых режимов, в которой движение жидкости может быть как ламинарным, так и турбулентным. Однако ламинарный режим в этой зоне неустойчив и при небольших возмущениях в потоке переходит в турбулентный.

Поэтому на практике для определения режима движения жидкости число Рейнольдса обычно сравнивают с нижним критическим значением $R_{e(k)}$ и при $R_e > R_{e(k)}$ считают режим турбулентным.

Для напорного движения в круглых трубах критические числа Рейнольдса равны: $(R_{ed})_k$ = 1000-2300, $(R_{ed})_x$ = 4000 и более.

Ламинарный режим наблюдается преимущественно при движении жидкостей повышенной вязкости (нефти, смазочных масел и др.), а также при движении воды в порах грунта. Движение воды в реках, каналах, в системах водоснабжения является турбулентным.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 1) состоит из резервуара 1, в который подается вода по трубопроводу 2, снабженному вентилем 3. уровень воды в резервуаре поддерживается постоянным с помощью переливной трубы 4. К резервуару присоединена стеклянная труба 5, в конце которой имеется вентиль 6, служащий для регулирования расхода воды. Расход воды измеряется мерным сосудом 7. Над резервуаром 1 укреплен сосуд 8 с окрашенной жидкостью той же плотности, что и вода. Из сосуда 8 подкрашенная жидкость подается по стеклянной трубке 9, открытый конец которой устанавливается по оси трубы 5. Расход подкрашенной жидкости регулируется вентилем 10.

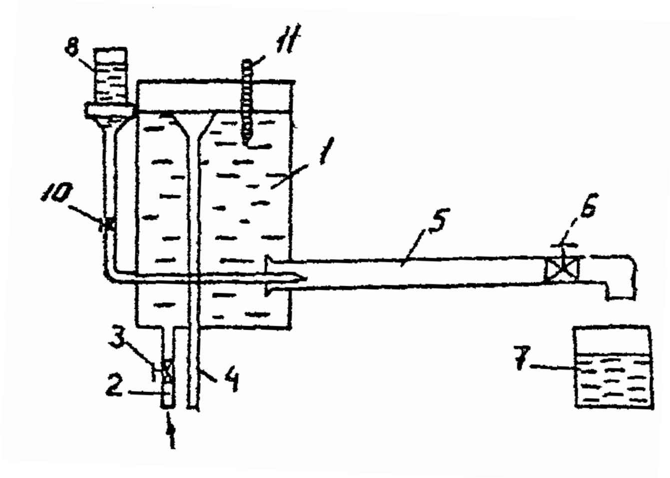


Рисунок 10.8- Схема экспериментальной установки

Порядок проведения опытов

Открывают полностью вентиль 3 на трубопроводе 2 и наполняют резервуар 1 водой. После того, как начнется сброс воды через переливную трубу 4, открывают частично вентиль 6, так чтобы в трубе 5 установилась небольшая скорость движения воды. Открывая вентиль 10, регулируют поступление подкрашенной жидкости в стеклянную трубу 5 так, чтобы скорость краски и скорость воды в трубе были примерно одинаковы. Действуя вентилями 6 и 10, добиваются того, чтобы в стеклянной трубе установился ламинарный режим, при этом окрашенная жидкость будет двигаться в виде тонкой прямолинейной струйки.

Объемным способом определяют расход воды в трубе 5, для чего фиксируют объем жидкости W, поступившей в мерный сосуд 7, и время его наполнения t. Одновременно термометром II измеряется температура воды t_o.

Увеличивая степень открытия вентиля 6, устанавливают новый расход воды в трубе и все измерения повторяют. Таким образом, проводят 2-3 опыта при ламинарном режиме.

Действуя вентилем 6, увеличивают расход воды в стеклянной трубе до такой степени, чтобы окрашенная струйка начала колебаться, приобретая волнистый характер с местными разрывами. Такое поведение струйки соответствует смене ламинарного режима турбулентным. При этом состоянии потока проводят все описанные выше измерения.

Дальнейшее увеличение степени открытия вентиля 6 приводит к резкому изменению характера движения: струйка краски полностью размывается, и вода в стеклянной трубе равномерно окрашивается.

Это свидетельствует об установлении в трубе турбулентного режима. При турбулентном режиме также проводят 2-3 опыта с различными расходами воды. Данные измерений вносят в таблицу 1.

Обработка экспериментальных данных

При обработке экспериментальных данных заполняется таблица 1. Для каждого опыта вычисляют расход воды Q = W/t и среднюю скорость движения воды в стеклянной трубе V′ = Q/w, где w – площадь поперечного сечения трубы.

По формуле (2) для каждого опыта вычисляют число Рейнольдса R_{ed}. Определяют на основе опытных данных критическое число Рейнольдса $(R_{ed})_k$ и сопоставляют его с известными значениями.

Диаметр трубы d = м.

Площадь поперечного сечения трубы W = $м^2$.

Температуры воды t^o = ^0C.

Кинематический коэффициент вязкости V = $м^2/с$.

Таблица 10.2

Номер опыта	Режим движения	Объем воды W, $м^3$	Время t, с	Расход, $м^3/с$	Средняя скорость потока V, м/с	Число Рейнольдса R

Контрольные вопросы

1. Гидравлические элементы сечения потока. Расход. Средняя скорость потока.
2. Виды движения жидкости: установившееся и неустановившееся, равномерное и неравномерное, напорное и безнапорное.
3. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Опыты Рейнольдса.
4. Число Рейнольдса и его критические значения для напорного и безнапорного движения.

10.5 **Лабораторная работа № 3**

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА РАСХОДА ВОДОМЕРА ВЕНТУРИ

Цель работы.

1. Экспериментальное определение членов уравнения Бернулли: потенциальной, кинетической энергии и потерь энергии.
2. Определение коэффициента расхода водомера Вентури и построение его тарировочной кривой.

Основные положения и расчетные зависимости

1. Уравнение Бернулли устанавливает зависимости между гидродинамическим давлением *p* и средней скоростью движения жидкости *v* и для потока реальной жидкости при установившемся движении имеет вид:

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + h_w, \tag{10.13}$$

где z – геометрический напор (или геометрическая высота) или удельная (отнесенная к единице веса жидкости) потенциальная энергия положения относительно плоскости сравнения О – О (рис. 10.9);

$\frac{P}{\rho g}$ - пьезометрическая высота или удельная потенциальная энергия давления;

$\frac{\alpha V^2}{2g}$ - скоростной напор или удельная кинетическая энергия жидкости;

h_w – потери напора или потеря удельной энергии на участке потока между сечениями 1 и 2;

p – плотность жидкости;

α – корректив кинетической энергии (коэффициент Кориолиса). Индексы "1" и "2" относят названные величины к соответствующим сечениям потока.

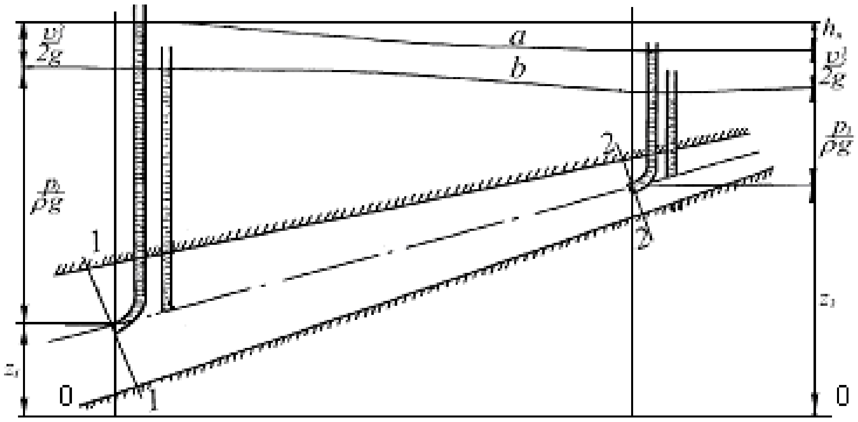


Рисунок 10.9- Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли

Выражение

$$H = z + \frac{P}{\rho g} \tag{10.14}$$

в уравнении (1) называется потенциальным напором; его величина определяет общий запас удельной потенциальной энергии жидкости в данном сечении потока.

Сумма потенциального и скоростного напоров

$$H_2 = z + \frac{P}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{10.15}$$

называется гидродинамическим или полным напором; его величина определяет полную удельную энергию жидкости в данном сечении потока.

Изменение потенциального и гидродинамического напора по длине потока наглядно иллюстрируется пьезометрической линией Р – Р и напорной линией Е – Е (рис. 1). Падение пьезометрической линии и напорной линии на единице длины потока называется соответственно пьезометрическим J и гидравлическим J_e уклоном:

2. Уравнение Бернулли широко применяется в гидравлике для решения многих теоретических и практических задач. В частности, на основе этого уравнения устанавливается расчетная формула водомера Вентури, который служит для измерения расхода жидкости в напорном трубопроводе (рис. 2).

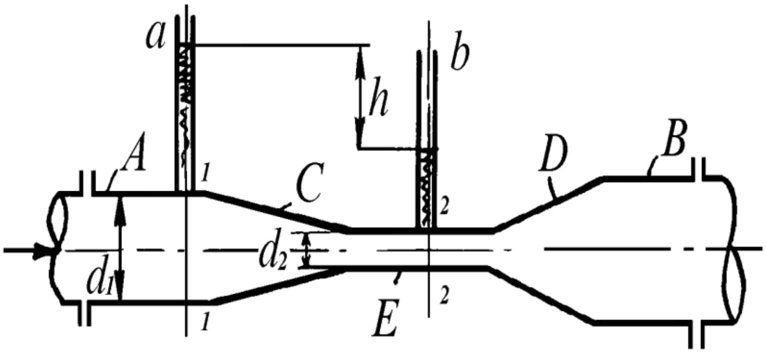


Рисунок 10.10 – Водомер Вентури

Водомер Вентури представляет собой патрубок, имеющий в средней части сужение. Цилиндрические участки водомера с диаметрами $d_1 > d_2$ соединяются между собой коническими вставками и снабжены пьезометрами.

Составляя уравнение Бернулли для сечений I и II (без учета потерь напора) относительно горизонтальной оси О – О,

$$\frac{P_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g} \qquad (10.16)$$

и выражая скорость V_2 через V_1 по уравнению неразрывности

$$v_1 w_1 = v_2 w_2,$$

после соответствующих преобразований получаем формулу теоретического расхода жидкости, где h – разность уровней жидкости в пьезометрах, м,

$$h=\frac{P_1}{\rho g}-\frac{P_2}{\rho g}$$

$$Q_m = v_1 w_1 = A\sqrt{h}, \qquad (10.17)$$

А – постоянная водомера Вентури:

$$A = w_1\sqrt{\frac{2g}{(\frac{w_1}{w_2})^2-1}} \qquad (10.18)$$

где q = 9,81 м/сек^2

Вследствие потерь энергии при движении реальной жидкости действительный расход будет меньше теоретического. Отношение действительного расхода Q к теоретическому Q $_т$ называется коэффициентом расхода водомера Вентури.

$$\mu = \frac{Q}{Q_m} \tag{10.19}$$

На основе выражений (4) и (6) действительный расход будет равен

$$Q = \mu A \sqrt{h} \tag{10.20}$$

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка состоит из горизонтального трубопровода 1 переменного сечения (рис. 3), присоединенного к напорному баку 2. Вода в напорный бак подается по трубопроводу 3, снабженному вентилем 4. Напор воды поддерживается постоянно с помощью переливной трубы 5 и измеряется водомерным стеклом 6.

На характерных участках трубопровода – в сечениях I, II и III, т.е. при переходе от труб одного диаметра к другому, установлены пьезометры I_1, II_2 и III_3, выведенные на специальный щит, нуль шкалы которого совпадает с плоскостью сравнения, расположенной на оси трубопровода.

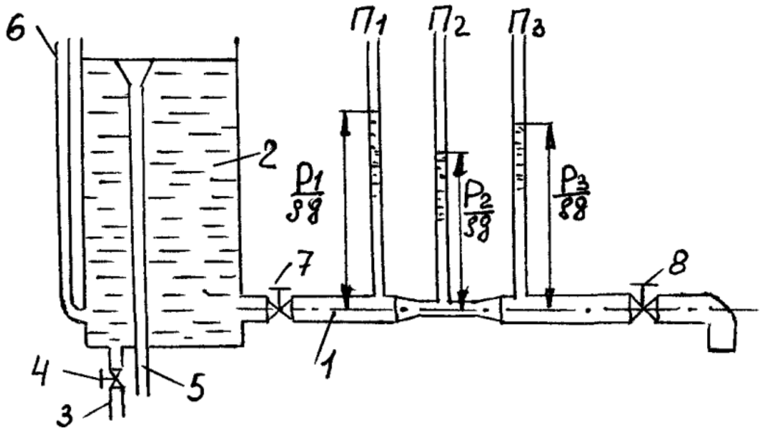


Рисунок 10.11- Схема экспериментальной установки

В начале трубопровода установлен вентиль 7, отключающий трубопровод от напорного бака, а в конце трубопровода кран 8, регулирующий расход воды.

На трубопроводе установлен водомер Вентури. Перепад давления в водомере измеряется при помощи пьезометров $П_1$ и $П_2$.

Порядок проведения опытов

1. Перекрыв вентиль 7 и кран 8 на трубопроводе, открывают вентиль 4 на подводящей трубе и подают воду в напорный бак, после заполнения напорного бака (о чем свидетельствует начавшийся сброс воды через переливную трубу) открывают полностью вентиль 7, соединяя трубопровод 1 с напорным баком, и проверяют отсутствие воздуха в пьезометрах $П_1$, $П_2$ и $П_3$ (при закрытом кране 8 уровни жидкости в них должны находиться на одной высоте).

2. Открывают частично кран 8, при этом в трубопроводе устанавливается некоторый расход воды. Объемным способом замеряют расход воды Q, для чего фиксируют объем воды W, поступивший в мерный сосуд за некоторое время t.

3. При установленном расходе снимают показания пьезометров $П_1$, $П_2$ и $П_3$. При колебании уровней жидкости в пьезометрах вследствие пульсации скоростей и давлений при турбулентном режиме необходимо фиксировать среднее положение уровня воды в каждом пьезометре. Геометрические характеристики участков трубопровода даны в таблице 1.

4. Изменяя степень открытия крана 8, устанавливают различные расходы воды и все измерения повторяют. По указанной методике проводят 5-7 опытов.

Данные измерений вносят в таблицу 10.3.

Обработка экспериментальных данных

1. При обработке опытных данных по проверке уравнения Бернулли заполняют таблицу 3 и строят пьезометрическую и напорные линии для рассматриваемого участка трубопровода.

Для каждого опыта вычисляют расход воды

$$Q = \frac{W}{t}$$

Таблица 10.3

Номер сечения	Внутренний диаметр трубопровода d, м	Площадь поперечного сечения трубопровода, w, м^2	Расстояние между сечениями l, м	
			I-II	II-III
I II III	$2{,}8\cdot10^{-2}$ $1{,}5\cdot10^{-2}$ $2{,}8\cdot10^{-2}$		0,32	0,31

Таблица 10.4

Номер опыта	Показания пьезометров в м			Объем воды w, м^3	Время t, с	Расход Q, м^3/сек
	I сеч $\frac{P_1}{\rho g}$	II сеч $\frac{P_2}{\rho g}$	III сеч $\frac{P_3}{\rho g}$			

Таблица 10.5

Номер опыта	Средняя скорость потока в м/с			Скоростной напор в м			Полный напор в м			Потери напора в м		
	v_1	v_2	v_3	$\frac{v_1^2}{2g}$	$\frac{v_2^2}{2g}$	$\frac{v_3^2}{2g}$	H_{l_1}	H_{l_2}	H_{l_3}	h_w^{I-II}	h_w^{II-III}	

и средние скорости движения воды во всех сечениях трубопровода

$$V = \frac{Q}{W},$$

а затем скоростные напоры $\frac{V^2}{2g}$.

По показаниям пьезометров и значениям скоростных напоров находят полный напор в сечениях трубопроводов по формуле (3) (при горизонтальном трубопроводе для всех сечений принимается z = 0). По разности полных напоров H_l определяют потери напора между сечениями трубопровода h_w^{I-II} и h_w^{II-III}.

По данным таблиц 2 и 3 для одного из опытов строят в масштабе на миллиметровой бумаге пьезометрическую и напорную линии для рассматриваемого участка трубопровода с указанием всех слагаемых уравнения Бернулли для сечений I, II, III.

На основании анализа опытных данных по определению коэффициента расхода водомера Вентури заполняют таблицу 4 и строят тарировочную кривую водомера.

Для каждого опыта вычисляют разность показаний пьезометров $П_1$ и $П_2$ и вносят в таблицу 4 опытные значения расходов воды Q, записанные в таблице 2.

По формуле 5 вычисляют постоянную расходомера A, а затем для каждого опыта находят теоретический расход воды по формуле (4). По формуле (6) подсчитывают для каждого опыта коэффициент расхода водомера Вентури μ и затем находят его среднее значение $\mu_{ср}$.

По значениям действительного расхода Q и разности показаний пьезометра h строят тарировочную кривую расходомера Q = f(h).

Таблица 10.6

Номер опыта	Показания пьезометров		Разность показаний пьезометров h, м	Действительный расход		Коэффициент расхода μ
	$\frac{P_1}{\rho g}, м$	$\frac{P_2}{\rho g}, м$		Q м³/с	$Q_т$ м³/с	

Контрольные вопросы

1. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной и реальной жидкости.
2. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости. Корректив кинетической энергии.
3. Геометрическая и энергетическая интерпретация уравнения Бернулли.
4. Пьезометрическая и напорная линии. Потенциальный и полный напор. Пьезометрический и гидравлический уклон.
5. уравнение неразрывности потока. Гидравлические элементы живого сечения потока.
6. Водомер Вентури: устройство, формула расхода, коэффициент расхода.

10.6 Лабораторная работа № 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ НАПОРА ПО ДЛИНЕ ПРИ НАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ

Цель работы.

1. Экспериментальное определение потерь напора по длине при ламинарном и турбулентном режимах движения жидкости в напорных трубопроводах.
2. Экспериментальное определение коэффициента Дарси и сопоставление опытных и расчетных его значений при различных режимах.
3. Построение по опытным данным графиков зависимости $h_f = f(v)$ и $\lambda = f(Re_d)$ и их анализ.

Основные положения и расчетные зависимости

При движении реальной жидкости часть ее механической энергии затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений, вызванных внешними и внутренними силами трения, распределенными по всей длине потока. Эта часть потерь удельной энергии потока носит название потери напора по длине h_f.

При установившемся движении жидкости в напорном трубопроводе круглого сечения потери напора по длине определяются по формуле Дарси-Вейсбаха

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad (10.21)$$

где l – длина трубопровода;

d – диаметр;

v – средняя скорость потока;

λ – коэффициент Дарси (коэффициент гидравлического трения), зависящий в общем случае от относительной шероховатости стенок трубопровода Δ/d (Δ - средняя высота выступов шероховатости) и числа Рейнольдса $Re_d = vd/\nu$.

Эта зависимость установлена экспериментальным путем и представлена в графическом виде на рис. 10.12 (график Никурадзе).

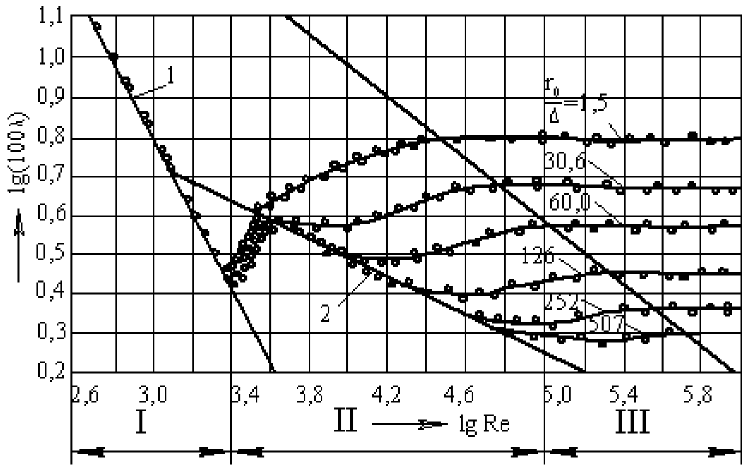


Рисунок 10.12- Зависимость коэффициента гидравлического трения от числа Рейнольдса для искусственной равномерно-зернистой шероховатости в трубах (по Никурадзе)

При ламинарном режиме коэффициент Дарси вычисляется по формуле

$$\lambda = \frac{64}{R_e} \qquad (10.22)$$

При турбулентном режиме для определения величины λ существует ряд эмпирических формул, относящихся к различным областям сопротивления. Среди них наиболее распространены:

в области гидравлических гладких труб I, при $4000 \le Re_d \le (Re_d)^{I}_{пр}$ формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0{,}316}{Re_d^{0.25}} \qquad (10.23)$$

в области квадратичного сопротивления III, при $Re_d \ge (Re_d)^{II}_{пр}$ формула Шифринсона

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25} \tag{10.24}$$

во всех трех областях I, II, III (в том числе и в области доквадратичного сопротивления, при $(Re_d)^{I}_{пр} < Re_d < (Re_d)^{II}_{пр}$ формула А.Д.Альтшуля

$$\lambda = 0{,}11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re}\right)^{0.25} \tag{10.25}$$

Предельные числа Рейнольдса могут быть найдены приближенно по формулам:

$$(Re_d)^{i}_{np} \approx \frac{10d}{\Delta} \tag{10.26}$$

$$(Re_d)^{ii}_{np} \approx \frac{500d}{\Delta} \tag{10.27}$$

Анализ формулы (1) совместно с формулами (2)-(5) показывает, что величину потерь напора по длине можно представить в виде:

$$h_p \sim v^m \tag{10.28}$$

где m – показатель степени, равный: при ламинарном режиме m = 1, при турбулентном режиме – в области гидравлически гладких труб m=1,75, в области доквадратичного сопротивления m = 1,75 ÷ 2, в области квадратичного сопротивления m=2.

Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 10.13) состоит из напорного бака 1 и горизонтального трубопровода с диаметром d = 2,8 см. В начале и в конце трубопровода 2 установлены пьезометры $П_1$ и $П_2$. В конце трубопровода имеются вентиль 3, при помощи которого регулируется расход воды.

Вода в напорный бак подается по трубе 4, снабженной вентилем 5. Напор воды в баке поддерживается во время опытов постоянным с помощью переливной трубы 6 и измеряется водомерным стеклом 7. Вентиль 8 служит для соединения трубопровода с напорным баком.

Порядок проведения опытов

Опыты проводятся последовательно: вначале на трубопроводе малого диаметра, затем на трубопроводе большого диаметра.

1. При закрытых вентилях 3 и 8 на трубопроводе открывают вентиль 5 на трубе 4 и подают воду в напорный бак. После заполнения напорного бака (о чем свидетельствует начавшийся сброс воды через переливную трубу) откры-

вают вентиль 8 на трубопроводе и проверяют отсутствие воздуха в пьезометрах $П_1$ и $П_2$ (уровни жидкости в них должны находиться на одинаковой высоте).

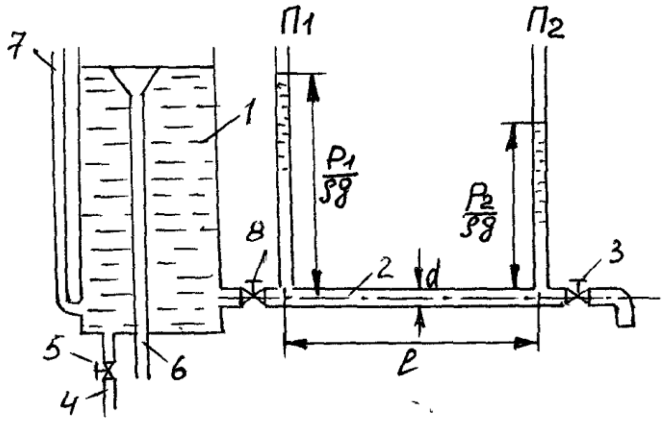


Рисунок 10.13 – Схема экспериментальной установки

2. Открывают вентиль 3, и в трубопроводе устанавливается некоторый постоянный расход воды. Объемным способом измеряют расход воды Q, для чего фиксируют объем воды W, поступившей в мерный сосуд, и время его наполнения t.

3. Замеряют температуру воды в мерном баке t^0 и снимают показания обоих пьезометров, установленных на трубопроводе, $\frac{P_1}{\rho g}$ и $\frac{P_2}{\rho g}$.

4. Увеличивают степень открытия крана 3 и все замеры повторяют. Проводят не менее 5 опытов при постепенно увеличивающейся степени открытия крана 3.

Все опытные данные вносят в таблицу 1.

Обработка экспериментальных данных

При обработке экспериментальных данных, записанных в таблице 1, заполняются таблицы 2 и 3 и строятся графики $h_f = f(v)$ и $\lambda = f(\mathrm{Re}_d)$.

По значению температуры воды t^0 по справочнику или по формуле $\nu=f(t^0)$ определяется кинематический коэффициент вязкости воды.

По значению расхода воды Q для каждого опыта вычисляется средняя скорость потока v = Q/ω, где ω – площадь поперечного сечения соответствующего трубопровода.

По разности показаний пьезометров в каждом опыте определяются потери напора по длине трубопровода

$$h_f = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g}, \qquad (10.29)$$

а затем на основе формулы (1) вычисляются опытные значения коэффициента Дарси

$$\lambda_{on} = \frac{2gdh_f}{lv^2} \qquad (10.30)$$

Температура воды $t^0 = \ldots..{}^0C$.

Кинематический коэффициент вязкости $\nu = \ldots\ldots..м^2/с$.

Таблица 10.8

Номер опыта	Геометрические характеристики трубопровода	Объем воды W, $м^3$	Время T, с	Расход Q, $м^3/с$	Показания пьезо-метров	
					$\frac{P_1}{\rho g}$, м	$\frac{P_2}{\rho g}$, м
	$d = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ м $l = 1{,}32$ м $\Delta =$ м $\omega =$ $м^2$					

По значениям v, d и ν для каждого опыта подсчитывают числа Рейнольдса Re_d, а затем по формулам (6) и (7) находят предельные числа Рейнольдса $(Re_d)^I_{пр}$ и $(Re_d)^{II}_{пр}$. Найденные на основе опытных данных величины вносят в таблицу 2, а затем для каждого опыта путем сравнения значений Re_d с $(Re_d)_{пр}$, $(Re_d)^I_{пр}$ и $(Re_d)^{II}_{пр}$ устанавливают режим движения и область сопротивления.

В зависимости от режима движения и области сопротивления находят расчетные значения коэффициента Дарси по существующим формулам (2)-(5). Результаты этих расчетов вносят в таблицу 3. Сравнивают опытные и расчетные значения λ.

Таблица 10.9

Номер опыта	Расход Q, $м^3/с$	Средняя скорость V, м/с	Потери напора h_f, м	Коэффициент Дарси $\lambda_{оп}$	Предельные числа Рейнольдса		Режим движения и область сопротивления
					$(Re_d)^I_{пр}$	$(Re_d)^{II}_{пр}$	

На основе данных таблицы 2 строят на миллиметровой бумаге следующие графики: 1) зависимость потерь напора по длине от средней скорости потока $h_f = f(v)$; 2) зависимость коэффициента Дарси от числа Рейнольдса $\lambda = f(Re)$. Второй график строят в логарифмических координатах (см. рис. 1). На обоих графиках указывают зоны, соответствующие ламинарному и турбулентному режиму, а также области сопротивления I, II, III.

Таблица 10.10

Номер опыта	Режим движения и область сопротивления	Опытное значение коэффициента Дарси $\lambda_{оп}$	Расчетные значения коэффициента Дарси, найденные по формулам			
			для ламинарного режима (I)	Блазиуса (3)	А.Д.Альтшуля (4)	Шифринсона (5)

Контрольные вопросы

1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Критические числа Рейнольдса.
2. Распределение скоростей и потери напора при ламинарном режиме в круглой трубе. Формулы Дарси-Вейсбаха, Пуазейля.
3. Кинематическая структура турбулентного потока. Пульсация скоростей. Распределение осредненных скоростей по сечению турбулентного потока в круглой трубе.
4. Потери напора при турбулентном движении. Коэффициент Дарси. График Никурадзе. Области сопротивления при турбулентном режиме. Эмпирические формулы для коэффициента Дарси.
5. Формула Шези. Эмпирические формулы для коэффициента Шези.

ЛИТЕРАТУРА

1.Аминов М.С., Мурадов М.С., Аминова Э.М. Процессы и аппараты пищевых производств.М.Колос, 1998.

2.Альтшуль А.Д. и др. Гидравлика и аэродинамика/ Альтшуль А.Д., Животовский Л.С., Иванов Л.П. – М.: Стройиздат, 1987. – 414 с.

3.Башта Т.М. и др. Гидравлика, гидромашины и гидроприводы. – М.: Машиностроение, 1982. – 424 с.

4.Багомолов А.И., Михайлов К.А. Гидравлика: - М.: Стройиздат, 1972. – 648 с.

5.Задачник по гидравлике, гидромашинам и гидроприводу/ Под ред. Некрасова Б.Б. – М.: Высш. шк., 1989. – 192 с.

6.Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроения, 1975. – 559 с.

7.Калицун В.В. и др. Гидравлика, водоснабжение, канализация. – М.: Стройиздат, 1980. – 359 с.

8.Метревели В.Н. Сборник задач по гидравлике с решениями: Уч. пособие для вузов. – М.: Высш.шк., 2008. -192 с.

9.Примеры расчетов по гидравлике/ Под ред. Альтшуля А.Д. – М.: Стройиздат, 1976. – 254 с.

10.Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам/ Под ред. Некрасова Б.Б. – Минск: Выш. ш., 1985, - 383 с.

11.Угинчус А.А. Гидравлика и гидравлические машины.- Харьков: Харьк. унр-т, 1960. – 358 с.

12.Чугаев Р.Р. Гидравлика. – Л.: Энергия, 1982. – 672 с.

13.Штеренлихт Д.В. Гидравлика. – М.:Энергоатомиздат, 1984.–640с.

14.Юшкин В.В. Гидравлика и гидравлические машины – Минск: Высш. шк., 1974. – 270 с.