

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Баламидов Махмуд Давидович

Должность: И.о. ректора

Дата подписания: 20.08.2023 22:10:53

Уникальный программный ключ:

2a04bb882d7edb7f477c9230e1a4c1d5c3411

Министерство науки и высшего образования РФ

**ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**



**Кафедра радиотехники, телекоммуникаций и  
микроэлектроники**

**Х.М. Гаджиев Т.Д. Нежведилов**

**ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**для бакалавров направления подготовки 11.03.01  
«Радиотехника», профиль "Радиотехнические средства  
передачи, приема и обработки сигналов"**

**Махачкала 2022**

УДК 621.385.6(075)

Х.М. Гаджиев, Т.Д. Нежведилов

Техническая электродинамика: Учебное пособие для бакалавров направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника», профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов» / - Махачкала: ДГТУ, - 117 с.

Рассмотрены вопросы теории электромагнитных полей и волн, пассивные линейные устройства антенно-фидерных трактов радиотехнических систем и волоконно-оптических линий связи. Приведены сведения о методах анализа, технических характеристиках и конструктивных особенностях таких устройств как регулярные волноводы и устройства СВЧ.

Предназначено для бакалавров направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника», профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов".

Рецензенты: д.т.н., профессор  
кафедры БиМАС  
ФГБОУ ВО «ДГТУ»

Магомедов Д.А.

д.т.н., зав. лабораторией  
ИТвЭ ФГБУН «ИПГ»  
ДНЦ РАН

Кобзаренко Д.Н.

Печатается согласно постановлению Ученого совета Дагестанского государственного технического университета от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2022 г.

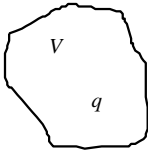
## ВВЕДЕНИЕ

В современной радиотехнике широко используются различные волновые электромагнитные процессы (например, направляемые волны в разнообразных линиях передачи и линейных устройствах, излучение и приём радиоволн антеннами, распространение этих волн в среде между антеннами и др.). Их многообразные свойства и особенности могут быть рассмотрены только при помощи законов электродинамики. Техническая электродинамика как раз и занимается изучением этих законов, исследованием на их основе технических устройств, в которых применяются различные способы управления электромагнитными процессами.

В учебном пособии систематизированно и подробно рассматриваются основные положения электродинамики, на их базе исследуются разнообразные линейные устройства, широко используемые в электросвязи и радиотехнике, в частности регулярные волноводы и устройства СВЧ, обсуждается практическое применение этих устройств. Особое внимание уделяется чёткому и последовательному введению системы понятий электродинамики и физической интерпретации получаемых результатов.

# 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ. ЗАКОН КУЛОНА  
 Пусть в некотором объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$  сосредоточен совокупный электрический заряд  $q$ . Так как диаметр электрона, как элементарного отрицательного



заряда, составляет порядка  $5,6 \cdot 10^{-13}$  см, то даже в самом малом объеме, который доступен наблюдателю, содержится большое число элементарных зарядов. Можно считать, что в рассматриваемом объеме  $V$  элементарные заряды распределены не дискретно, а

непрерывно с *объемной плотностью*

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \text{ Кл/м}^3. \quad (1.1)$$

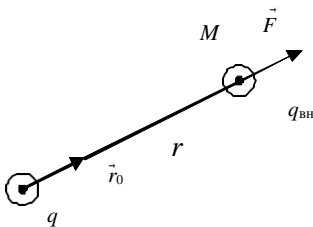
Если совокупный заряд  $q$  распределён по поверхности  $S$ , то говорят о *поверхностной плотности* зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \text{ Кл/м}^2. \quad (1.2)$$

Иногда бывают заданы законы распределения величин  $\rho$  и  $\sigma$ , тогда совокупный заряд  $q$  определяется как

$$q = \int_V \rho dV, \text{ Кл.} \quad (1.3)$$

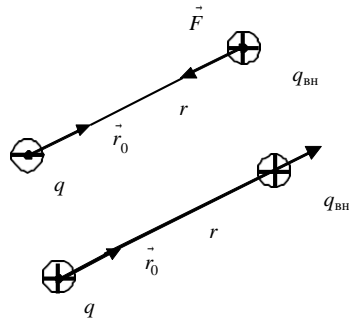
$$q = \int_S \sigma dV, \text{ Кл.} \quad (1.4)$$



В самом простом случае совокупный заряд  $q$  характеризуется постоянством во времени, т.е.  $dq/dt = 0$ , и неподвижностью в пространстве  $v = 0$ , где  $v$  – скорость перемещения совокупного заряда  $q$ . Такой заряд создаёт так называемое *электростатическое поле*.

## Закон Кулона

Пусть два неподвижных, постоянных во времени точечных заряда разнесены в пространстве (в вакууме) на расстояние  $r$ . Понятие «точечный заряд» условно. Говоря о точечных зарядах, предполагают, что размеры тел, на которых распределены заряды  $q$  и  $q_{\text{вн}}$ , значительно меньше расстояния  $r$ . Взаимодействие между зарядами характеризуется законом Ш. Кулона (1785 г.) в вакууме



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_{\text{вн}}}{r^2} \vec{r}_0, \text{ Н или Кл}\cdot\text{В/м}, \quad (1.5)$$

где  $\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{-9}$  – электрическая постоянная, Ф/м.

Единичный вектор  $\vec{r}_0$  ориентирован от источника силового поля  $F$ , т.е. заряда  $q$  к точке наблюдения  $M$ , т.е. к заряду  $q_{\text{вн}}$ . Если заряд  $q$  и  $q_{\text{вн}}$  одного знака, то сила  $F$ , действующая на заряд  $q_{\text{вн}}$ , будет совпадать с вектором  $\vec{r}_0$ , т.е. будет наблюдаться отталкивание зарядов. Если заряды разного знака, они будут притягиваться.

### НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

Для характеристики силового воздействия поля заряда  $q$  вводится понятие напряжённости электростатического поля как силы, действующей на единичный положительный заряд  $q_{\text{вн}}$ :

$$E = F / q_{\text{вн}}, \text{ В/м} \quad (1.6)$$

или с учётом выражения (1.5)

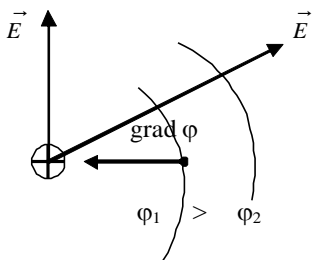
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0, \text{ В/м}. \quad (1.7)$$

Учитывая сказанное выше, можно показать, что вектор  $E$  всегда направлен от положительного заряда к отрицательному заряду или в бесконечность.

Электрическое поле, созданное зарядом  $q$  в окружающем пространстве, имеет силовую и энергетическую характеристики – напряжённость поля  $E$  и потенциал  $\phi$ .

## Свойства поля точечного заряда

Сначала вспомним некоторые разделы математики, которые потребуются нам в будущем.



Градиент скалярной функции  $\varphi(r)$  – векторная величина, определяемая как

$$\text{grad}\varphi(r) = \nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  – оператор

(бла) в прямоугольной системе координат.

Другими словами, градиент скалярной функции  $\varphi(r)$  в любой точке  $M(r)$  есть вектор, нормальный к поверхности уровня в данной точке и направлен в сторону наибольшего возрастания функции, численно равный её производной по нормали к поверхности, т.е.

$$\text{grad}\varphi(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}$$

2. *Дивергенция* векторной функции  $E(r)$  – скалярная величина, определяемая как

$$\text{div} E = \nabla E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.8)$$

Геометрический смысл дивергенции заключается в том, что дивергенция (расходимость) поля есть предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку  $M$ , к объёму  $V$ , ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается к точке. Если дивергенция отлична от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются источники поля ( $\text{div}E > 0$ ) или его стоки ( $\text{div}E < 0$ ). Если  $\text{div}E = 0$ , то в рассматриваемой точке поля отсутствуют источники и стоки поля.

3. *Ротор* (вихрь) векторной функции  $E(r)$  есть векторная величина, определяемая как

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Ротор характеризует степень завихрённости векторного поля в точке  $M(r)$ .

Вихревые линии любого векторного поля обладают тем свойством, что они нигде не начинаются и нигде не кончаются, так как

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} E = 0.$$

Чтобы определить свойства электростатического поля, описываемого равенством (1.7), необходимо определить дифференциальные характеристики поля в точке:  $\operatorname{rot} E$ ,  $\operatorname{div} E$ . Если в каждой точке поля

$$\operatorname{rot} E \begin{cases} = 0 - \text{поле потенциальное,} \\ \neq 0 - \text{поле вихревое.} \end{cases}$$

Если в каждой точке поля

$$\operatorname{div} E \begin{cases} = 0 - \text{поле соленоидальное, т.е. замкнутое,} \\ \neq 0 - \text{поле несоленоидальное.} \end{cases}$$

Для получения  $\operatorname{rot} E$  и  $\operatorname{div} E$  представим выражение (1.7) в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{r}}{r^3} = f(r) \vec{r}, \quad (1.10)$$

где  $\vec{r} = xi + yj + zk$ .

После соответствующих вычислений, которые необходимо провести самостоятельно (оставить для этого 0,5-1 страничку), получим, что для электростатического поля одиночного заряда вне его

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{div} E = 0. \quad (1.11)$$

Это означает следующее.

1. Из первого равенства следует, что поле потенциальное, вектор  $E$  является градиентом скалярного поля, называемого *потенциалом*  $\varphi$  электростатического поля, т.е.

$$E = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (1.12)$$

2. В потенциальном поле работа сил поля по перемещению вносимого заряда определяется только разностью потенциалов исходной и конечной точек и не зависит от формы пути.

3. Поле соленоидальное, т.е. в точках, не принадлежащих области  $V$  линии напряжённости электростатического поля непрерывны, а это значит, что в этих точках источники поля отсутствуют.

Теперь остановимся более подробно на равенстве (1.12).

## Потенциал электростатического поля

Установлено, что в электростатическом поле имеет место равенство (1.12). Определим выражение для  $\varphi$ , так как  $E = f(r)$ , то предположим, что и  $\varphi = f(r)$ , тогда

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}_0, \quad (1.13)$$

где  $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Поскольку выражение для  $E$  известно, приравнявая выражения (1.7) и (1.13) и найдя первообразную, определим  $\varphi$  как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad \text{В.} \quad (1.14)$$

Знак « $\leftarrow$ » в выражении (1.12) учитывает, что вектор  $E$  направлен от « $+$ » к « $\leftarrow$ », а  $\text{grad}\varphi$  направлен в сторону увеличения потенциала. Линии равных потенциалов (эквипотенциали) образуют своеобразные энергетические уровни.

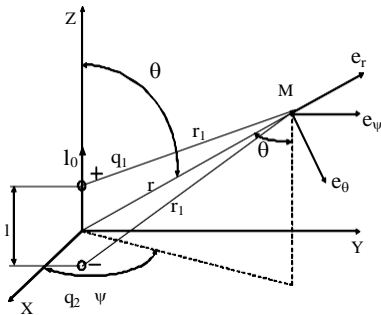
## 2. ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Пусть имеется система, состоящая из  $N$  зарядов. Поле в точке  $M$  будет определяться как векторная сумма полей каждого из зарядов

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n, \quad (2.1)$$

а потенциал, соответственно,

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n. \quad (2.2)$$



*Рассмотрим простейший случай системы зарядов. Электрически нейтральные атом и молекула при появлении электрического поля поляризуются, т.е. происходит смещение отрицательно заряженных частиц (электронов) против внешнего поля, а положительно заряженных ядер – вдоль, т.е. электрически нейтральная частица становится диполем.*



В сферической системе координат рассмотрим систему, состоящую из двух различных зарядов, отстоящих на расстоянии  $l$  друг от друга.

В соответствии с выражением (1.16) определим потенциал в точке  $M$ . Запишем

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.3)$$

Оговоримся, что  $M$  удалена от частицы на расстояние  $r \gg l$ , тогда лучи  $r_1, r_2, r$  можно считать параллельными, а это значит, что

$$r_2 = r - l/2 \cos\theta, \quad r_1 = r + l/2 \cos\theta. \quad (2.4)$$

Подставляем в (2.3), и считая, что  $(l/2 \cos\theta)^2 \ll r^2$ , получим

$$\varphi = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.5)$$

Произведение  $q$  на  $l$  определяет модуль электрического момента диполя и является величиной векторной, направленной от « $-q$ » к « $+q$ »:

$$P = ql\vec{l}_0, \quad (2.6)$$

где  $\vec{l}_0$  – единичный вектор. Для того, чтобы записать выражение для вектора  $E$  в сферической системе координат, вспомним, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d\varphi}{d\psi} \vec{e}_\psi,$$

и учитывая, что  $\varphi = f(\theta, r)$ , запишем

$$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left( 2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta \right), \text{ В/м.} \quad (2.7)$$

## ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА, МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### Поле объёмных зарядов

Пусть заряды расположены в некотором объёме не дискретно, как было в предыдущем случае, а непрерывно с объёмной плотностью  $\rho$ . В этом случае потенциал в точке  $M$ , если использовать выражения (1.3) и (1.14), запишется

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV, \quad (2.8)$$

а  $E = -\text{grad}\varphi$ ,  $\text{rot}E = 0$ ,  $\text{div}E = 0$  для точек поля, не принадлежащих области  $V$ .

Во всех предыдущих случаях мы рассматривали ситуацию, когда по известному распределению заряда определялось поле – так называемая прямая задача. Иногда необходимо решать обратную задачу – найти закон распределения заряда по заданному полю.

Пусть в объёме  $V$  распределён электрический заряд  $q$  с объёмной плотностью  $\rho$ . Известно электростатическое поле, создаваемое этим зарядом. Определим закон распределения заряда в области  $V$ . Окружим  $V$  замкнутой поверхностью  $S$ . Для этого обратимся к закону Гаусса

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (2.9)$$

согласно которому поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую совокупный заряд  $q$ , пропорционален величине этого заряда.

С учётом соотношения (1.3)  $q = \int_V \rho dV$  закон Гаусса можно записать

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (2.10)$$

Обратимся к теореме Остроградского-Гаусса, которая непосредственно вытекает из определения дивергенции и согласно которой поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность, ограничивающую объём  $V$ , равен расхождению поля из этого объёма

$$\oint_S \vec{E} dS = \int_V \text{div}E dV \quad (2.11)$$

Приравнявая левые части равенств (2.10) и (2.11)

$$\int_V \text{div}E dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (2.12)$$

откуда

$$\text{div}E = \rho / \epsilon_0. \quad (2.13)$$

Данное уравнение даёт возможность решать обратную задачу. Если известен закон изменения потенциала  $\varphi$ , уравнение (2.13) принимает вид:

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = \rho/\varepsilon_0 - \text{уравнение Пуассона}, \quad (2.14)$$

иначе записывается

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0, \text{ или } \frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{dy^2} + \frac{\partial^2}{dz^2} = -\rho/\varepsilon_0.$$

При нулевой правой части, т.е. для точек вне рассматриваемого объёма уравнение приобретает вид уравнения Лапласа. Решение уравнения (2.14) имеет вид (2.8).

### **Электростатическое поле в диэлектрике (Электрическая индукция). Материальные уравнения**

Все предыдущие рассуждения мы проводим для случая, когда заряд находится в вакууме. Рассмотрим реальный случай, когда окружающая среда – *диэлектрик*.

При внесении в электростатическое поле с вектором напряжённости  $E$  диэлектрика, в последнем наблюдается явление поляризации. Физическая сторона этого явления следующая: диэлектрик содержит в себе «связанные» заряды, т.е. связанные с данным веществом молекулярными силами и неотделимые от него.

При воздействии внешнего поля связанные заряды диэлектрика перемещаются так, что их собственное поле  $E_{\text{св}}$  компенсирует действие внешнего поля  $E'$ . Результирующее поле

$$E = E' + E_{\text{св}}. \quad (2.15)$$

Поскольку поле связанных зарядов вызвано потенциальным полем, то и оно, и результирующее поле потенциальны, т.е.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}E' = 0; \quad \operatorname{rot}E_{\text{св}} = 0; \quad \operatorname{rot}E = 0; \\ \operatorname{div}E' = \rho/\varepsilon_0; \quad \operatorname{div}E_{\text{св}} = \rho_{\text{св}}/\varepsilon_0 = -\frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{div} \vec{P}, \end{aligned}$$

где  $P$  – вектор электрической поляризации или поляризованность единицы объёма вещества.

Выясним, чему равно расхождение вектора (электрические заряды не только создают электростатическое поле в окружающем их пространстве, но и поляризуют его).

$$\operatorname{div}E = \operatorname{div}E' + \operatorname{div}E_{\text{св}} = \rho/\varepsilon_0 - \operatorname{div}P/\varepsilon_0 \text{ или } \operatorname{div}(\varepsilon_0 E + P) = \rho. \quad (2.16)$$

Выражение  $\varepsilon_0 E + P = D$  – вектор электрической индукции или вектор электрического смещения.

Таким образом:

$$\operatorname{div} D = \rho . \quad (2.17)$$

Для линейных (*Линейной* называется среда, свойства которой не зависят от величины напряженности поля (воздух, фторопласт). *Однородная* – параметры среды  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$  одинаковы во всех ее точках. *Изотропная* – физические свойства её одинаковы по всем направлениям в каждой точке) однородных изотропных сред справедливо

$$P = k_3 \varepsilon_0 E , \quad (2.18)$$

где  $k_3$  – диэлектрическая восприимчивость вещества;  $k_3 \varepsilon_0$  – абсолютная восприимчивость.

Подставляя (2.18) в выражение для  $D$ , получим

$$D = \varepsilon_0 (1 + k_3) E , \quad (2.19)$$

где  $1 + k_3 = \varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\varepsilon \varepsilon_0 = \varepsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Тогда

$$D = \varepsilon_a E , \text{ Кл/м}^2 . \quad (2.20)$$

Уравнения (2.19), (2.20) называются материальными уравнениями. Они описывают макроскопические свойства вещества при воздействии на них электромагнитных полей.

## ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электростатическое поле зарядов, распределённых с объёмной плотностью  $\rho$  в объёме  $V$ , обладает запасом энергии

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV , \text{ Дж} \quad (2.21)$$

или

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV , \text{ Дж} . \quad (2.22)$$

Последнее выражение показывает, что энергия электростатического поля распределена в пространстве, окружающем объём  $V$ , причём объёмная плотность энергии равна

$$w = \frac{dW_3}{dV} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \text{ Дж/м}^3; \quad (2.23)$$

для изотропной среды

$$w_3 = \varepsilon_a E^2 / 2, \text{ Дж/м}^3.$$

### 3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

#### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА

*Постоянный электрический ток* – упорядоченное движение электрически заряженных частиц.

Рассмотрим некоторый проводник и выделим в нём объём  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Если величина заряда внутри этого объёма  $q$  меняется во времени, то согласно закону сохранения заряда это может происходить за счёт того, что заряженные частицы пересекают поверхность  $S$ , т.е. через границу  $S$  течёт ток. *Сила тока* – скорость изменения заряда  $q$  в объёме  $V$  со временем, взятая с обратным знаком:

$$I = - \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Знак « $\leftarrow$ » означает, что ток направлен против движения электронов.

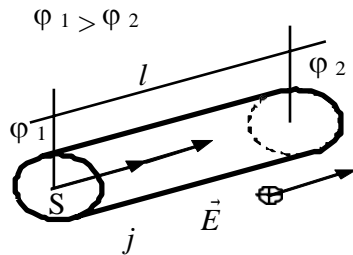
#### Вектор плотности тока

Так как сила тока  $I$  – скаляр, она не даёт исчерпывающей информации об электрическом токе. Введём понятие *вектора плотности электрического тока проводимости  $j$*  или *плотности тока*

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}.$$

1. Ориентация  $j$  совпадает с направлением движения положительных зарядов, т.е. совпадает с вектором  $E$  внешнего поля.

2. Модуль  $j$  равен силе тока положительных зарядов, пересекающих единичную поверхность, перпендикулярную направлению их движения.



ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ.  
УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

**Закон Ома в дифференциальной форме (для участка цепи)**

Определим связь между вектором плотности  $j$  и вектором напряжённости  $E$  в точке. Рассмотрим прямолинейный участок внешней электрической цепи в виде однородного проводника постоянного сечения. Модуль  $j$  равен  $j = I / S$ , откуда

$$I = jS. \quad (3.2)$$

Сопротивление проводника  $R$  равно  $R = \frac{1}{\gamma S} l$ , где  $\gamma$  – удельная проводимость, См/м. Тогда

$$I = \frac{U}{R} = (\varphi_1 - \varphi_2) / R, \quad (3.3)$$

но  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_l \vec{E} dl = El$ , откуда  $I = \frac{El\gamma S}{l} = E\gamma S$ . Тогда (3.3) можно записать в виде  $jS = El\gamma S / l$ , или

$$j = \gamma E, \quad j = \gamma E. \quad (3.4)$$

Эти выражения – *закон Ома* в дифференциальной форме для участка внешней цепи.

*Закон Ома для полной цепи.* Если рассматривать всю замкнутую цепь, ток направлен от отрицательного электрода к положительному, т.е. против электрического поля. В пространстве между этими электродами закон Ома (3.4) не выполняется. Это может иметь место только в том случае, если имеется какая-либо дополнительная сторонняя причина, заставляющая двигаться частицы в сторону, противоположную действию электрического поля. Такой причиной является стороннее электрическое поле  $E^{ct}$ , которое обусловлено действием внешних причин, не связанных с электрическими зарядами. Эти причины могут быть механического, химического, теплового или иного происхождения. В этом случае закон Ома запишется

$$j = \gamma(E + E^{ct}). \quad (3.5)$$

Выясним характер стороннего поля  $E^{ct}$ , для чего рассмотрим циркуляцию векторов плотности тока проводимости по контуру  $l$ , включающему внутренние и внешние цепи. Проинтегрируем (3.5) по  $dl$ .

$$\frac{1}{\gamma} \int_l \vec{j} dl = \int_l (\vec{E} + \vec{E}^{ct}) dl. \quad (3.6)$$

Так как поле  $E$  постоянного тока потенциально, т.е.  $\text{rot}E = 0$ ,  $E = -\text{grad}\phi$ , то первый член в правой части этого равенства равен нулю. Учтём, что полное сопротивление контура  $R = R_B + R_H$ . Тогда

$$\frac{1}{\gamma} j l = \frac{I}{\gamma S} l = IR = I(R_B + R_H) = \varepsilon; \quad (3.7)$$

$$\int_l E dl = \varepsilon, \text{ В.}$$

Этот результат показывает, что циркуляция вектора напряжённости стороннего электрического поля по замкнутому контуру отлична от нуля, из чего следует вывод, что это поле не может быть потенциальным и является вихревым, т.е.  $\text{rot}E^{ct} \neq 0$ .

Уравнение

$$\varepsilon = \int_l \vec{E}^{ct} dl = I(R_B + R_H)$$

представляет собой закон Ома для полной цепи (закон Ома в интегральной форме).

### Уравнение непрерывности

(закон сохранения заряда в дифференциальной форме)

Изменение заряда в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , определяется силой тока  $I$

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{или} \quad I = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.8)$$

Данное выражение устанавливает связь между интегральными характеристиками – силой тока и совокупным электрическим зарядом  $q$  в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ .

Нельзя ли установить подобную связь в дифференциальной форме, т.е. в точке (иными словами, связь между плотностью тока  $j$  и объёмной плотностью заряда  $\rho$ )?

Исходя из определения плотности тока проводимости  $j$ , можно записать

$$I = \int_S \vec{j} dS$$

или согласно теореме Гаусса-Остроградского

$$I = \int_S \vec{j} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (3.9)$$

Приравняем правые части (3.8) и (3.9)

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

тогда

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется *уравнением непрерывности* и может рассматриваться как математическая формулировка закона *сохранения заряда* для бесконечно малого объёма. В общем случае это уравнение показывает, что расхождение вектора плотности тока проводимости отлично от нуля только там, где имеется изменяющийся во времени заряд, который определяется объёмной плотностью  $\rho$ .

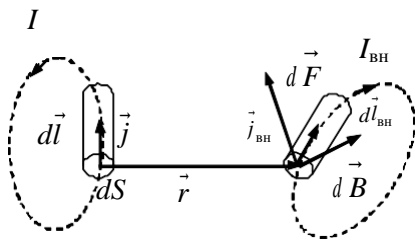
Так для постоянного тока  $\rho = \text{const}$   $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ . Это говорит о том, что линии постоянного тока замкнуты. Из этого выражения может быть получен 1-й закон Кирхгофа, согласно которому сумма токов в проводниках, сходящихся к разветвлению, равна нулю.

## ЗАКОН АМПЕРА. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Подобно тому, как вокруг неподвижных зарядов существует электрическое поле, вокруг проводников с током или движущихся зарядов существует магнитное поле.

Свойства магнитного поля рассмотрим для случая постоянного тока.

Пусть в вакууме расположены два элемента тока  $dl$ . Под элементом тока понимают тонкий отрезок проводника с током, длина которого значительно меньше расстояния до точки наблюдения, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока. Все обозначения Вам известны, кроме  $dl$  – вектор элемента тока, совпадающий с направлением вектора плотности тока  $j$ . Согласно закону Ампера первый элемент тока будет действовать на внешний элемент тока с силой



известны, кроме  $dl$  – вектор элемента тока, совпадающий с направлением вектора плотности тока  $j$ . Согласно закону Ампера первый элемент тока будет действовать на внешний элемент тока с силой



$$d\vec{B} = I \, dl \, \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right], \quad \text{Н}, \quad (3.11)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м – магнитная проницаемость среды (вакуума).

Выражение в квадратных скобках характеризует силовое действие элемента тока  $dl$  на единичный вносимый элемент тока  $d\vec{l}_B$  и определяет согласно закону Био-Савара-Лапласа вектор магнитной индукции

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad \text{Вб/м}^2. \quad (3.12)$$

Для контура постоянного тока длиной  $L$  и сечением  $S$  вектор магнитной индукции в любой точке пространства определяется

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j \times \vec{r}}{r^3} dV. \quad (3.13)$$

Можно показать, что

$$\vec{B} = \text{rot} A, \quad (3.14)$$

где  $A$  – векторный потенциал магнитного поля, равный

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j}{r} dV, \quad (3.15)$$

аналогично тому, как было показано для скалярного потенциала электростатического поля, для вектора  $A$  справедливо

$$\nabla^2 A = -\mu_0 j, \quad (3.16)$$

т.е.  $A$  удовлетворяет уравнению Пуассона.

Выясним характер стационарного магнитного поля:  $\text{div} B = ?$   
Из векторного анализа известно, что

$$\text{div rot} A = 0, \quad \text{div} B = 0. \quad (3.17)$$

магнитное поле постоянного тока соленоидально – т.е. магнитные силовые линии всегда замкнуты, источников магнитного поля, на которые они замыкаются, в пространстве нет. Силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на электрических зарядах.

Определим значение

$$\text{rot} B = \text{rot rot} A = \text{grad div} A - \nabla^2 A.$$

Для постоянного тока  $\operatorname{div} A = 0$ ,  $\nabla^2 A = -\mu_0 j$ . Тогда

$$\operatorname{rot} B = +\mu_0 j, \quad (3.18)$$

магнитное поле постоянного тока вне проводника ( $j = 0$ ) потенциально, так как

$$\operatorname{rot} B = 0. \quad (3.19)$$

### НАПРЯЖЁННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При отсутствии магнитного поля стороннего источника в намагниченных средах магнитное поле создаётся только молекулярными токами. При этом молекула в целом остаётся электрически нейтральной. При введении в среду внешнего магнитного поля  $B'$  создаётся результирующее поле

$$B = B' + B_M. \quad (3.20)$$

Поскольку вакуумное магнитное поле молекулярных токов  $B_M$  вызвано соленоидальным полем, то и оно и результирующее поле соленоидально, т.е.

$$\operatorname{div} B' = 0, \operatorname{div} B_M = 0, \operatorname{div} B = 0.$$

Кроме того,  $\operatorname{rot} B' = +\mu_0 j$ ,  $\operatorname{rot} B_M = +\mu_0 j_M$ ,

где  $j_M$  – вектор плотности молекулярных токов (или вектор плотности магнитных токов), определяемый как  $j_M = \operatorname{rot} J$ ,  $J$  – вектор намагниченности или намагниченность единицы объёма вещества.

Выясним, чему равна циркуляция вектора  $B$ .

$$\operatorname{rot} B = \operatorname{rot} B' + \operatorname{rot} B_M = \mu_0 j + \mu_0 j_M = \mu_0 j + \mu_0 \operatorname{rot} J$$

или

$$\operatorname{rot} \left[ \begin{array}{c} B \\ \mu_0 j \\ \mu_0 \operatorname{rot} J \end{array} \right] = \mu_0 j. \quad (3.21)$$

Выражение, стоящее под знаком ротора  $\vec{H} = \frac{B}{\mu_0} - \vec{J}$  – вектор напряжённости магнитного поля.

Таким образом,

$$\operatorname{rot} H = j . \quad (3.22)$$

Для изотропных сред справедливо,

$$J = k_m H , \quad (3.23)$$

где  $k_m$  – магнитная восприимчивость вещества.

Подставляя (3.23) в выражение для  $H$ , получаем

$$B = \mu_0 (1 + k_m) H = \mu_0 \mu H = \mu_a H , \quad (3.24)$$

где  $1 + k_m = \mu$  – относительная магнитная проницаемость среды;  $\mu_0 \mu = \mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость среды. Уравнение (3.24) также называется материальным по аналогии с электростатическим полем, так как описывает макроскопические свойства вещества в магнитном поле.

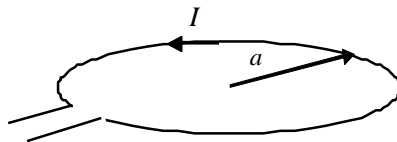
Тогда

$$B = \mu_a H . \quad (3.25)$$

Уравнения (3.24), (3.25) также называются материальными по аналогии с электростатическим полем, так как описывают макроскопические свойства вещества в магнитном поле.

### МАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАМКИ С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Простейшим источником МП постоянного тока в природе является электрон, вращающийся с постоянной скоростью вокруг ядра. Орбита электрона образует элементарную рамку.

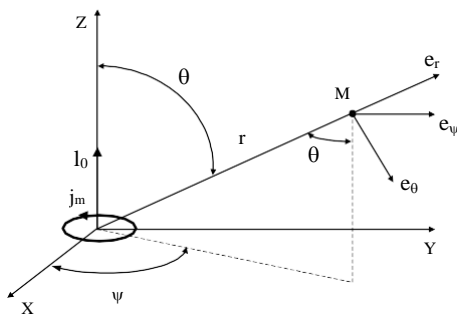


*Элементарная рамка* – плоский замкнутый контур, выполненный из тонкого проводника длиной, много меньшей расстояния до точки наблюдения, с постоянным током.

Поместим рамку в сферическую систему координат подобно тому, как это было сделано при рассмотрении диполя .

Магнитное поле в точке  $M$  ( $r \gg 2\pi a$ ) определится как

$$\vec{H} = \frac{I \pi a^2}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) , \text{ А/м} . \quad (3.26)$$



Данное выражение имеет ту же структуру, что и для электрического диполя, поэтому элементарную рамку ещё называют магнитным диполем. По аналогии с диполем здесь вводится понятие магнитного момента

$$\vec{m} = I\pi a^2 \vec{n} = IS\vec{n}, \quad (3.27)$$

где  $n$  – вектор нормали к плоскости рамки, направление которого определяется как  $\vec{a} \times \vec{j}$  (правило буравчика).

#### ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Магнитное поле обладает запасом энергии

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H} \vec{B} dV, \text{ Дж}, \quad (3.28)$$

распределённым с плотностью

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}, \text{ Дж/м}^3. \quad (3.29)$$

Для изотропных сред

$$w_M = \frac{\mu_0 H^2}{2}, \text{ Дж/м}^3. \quad (3.30)$$

#### 4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ИХ РЕШЕНИЕ

Электромагнитное поле (ЭМП) – это вид материи, оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы, характеризуемый неразрывно связанными друг с другом и меняющимися во времени электрическим и магнитным полями. Используя знания основных уравнений электрического стационарного поля и магнитного поля постоянного тока, получим полную систему уравнений Максвелла (1831 – 1879 гг. В 1857 г. – труд «О фарадеевских силовых линиях»).

Уравнения Максвелла – основа описания любых электромагнитных полей во всевозможных устройствах, поэтому знание этих уравнений – фундамент для грамотной эксплуатации радиоэлектронных средств.

## ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА.ИХ ФИЗИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Рассмотренные нами поля: электростатическое, создаваемое неподвижными и неизменными во времени зарядами ( $v = 0$ ,  $\partial\rho / \partial t = 0$ ); стационарное магнитное постоянного тока ( $v = \text{const}$ ), являются частными случаями электромагнитного поля.

Ясно, что уравнения для электростатического поля  $\text{rot}E = 0$ ;  $\text{div}E = \rho/\epsilon_a$  и уравнения для стационарного магнитного поля  $\text{rot}H = j$ ;  $\text{div}H = 0$  должны вытекать из некоторых обобщённых уравнений, справедливых для электромагнитного поля в целом. Следовательно, необходимо получить систему уравнений, описывающих электромагнитное поле заряженных частиц, состояние которых характеризуется скоростью их движения  $v$  и величиной заряда, являющегося функцией времени, т.е.  $v = f(t)$ ,  $d\rho/dt(t)$ .

Заметим сразу, что полный вывод уравнений Максвелла мы опускаем. Оставим только отправные точки и конечный результат.

Исходя из уравнения непрерывности

$$\text{div}j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

и учитывая, что, например, в диэлектрике помимо тока проводимости присутствует также ток смещения, можно получить первое уравнение Максвелла

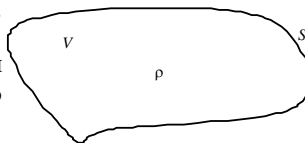
$$\text{rot}H = j + \epsilon_a \frac{\partial E}{\partial t},$$

устанавливающее связь между переменным во времени электрическим полем и возникающим вокруг него магнитным полем.

Физический смысл: магнитное поле возникает не только при движении зарядов, когда имеет место ток проводимости, но и при наличии изменяющегося во времени электрического поля.

Второе уравнение Максвелла вытекает из закона электромагнитной индукции Фарадея (1831 г.):

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt},$$



согласно которому, если через поверхность, ограниченную проводящим контуром, проходит меняющийся во времени магнитный поток  $\Phi$ , то в контуре возникает ЭДС индукции. Второе уравнение Максвелла имеет вид:

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Физический смысл: в электромагнитном поле электрическое поле является вихревым. Причиной электрического поля, помимо электрических зарядов, является изменяющееся во времени магнитное поле.

Итак, полная система дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное поле, включает в себя следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \text{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}; \\ \text{div} \vec{H} = 0. \end{array} \right.$$

Вспомогательные уравнения:  $D = \epsilon_a E$ ;  $B = \mu_a H$ .

### Интегральная форма уравнений Максвелла

Интегральным аналогом первого уравнения Максвелла является так называемый закон полного тока или теорема циркуляции (Циркуляция вектора по замкнутому контуру интегрирования равна полному току, протекающему через площадь, охваченную контуром интегрирования).

$$\int_{\Gamma} H dl = I_{\Pi} = I + I_{\text{см}}.$$

Физический смысл: токи смещения наравне с токами проводимости образуют магнитное поле. Закон изменения электрического поля во времени определяет закон распределения магнитного поля в пространстве.

Интегральным аналогом второго уравнения Максвелла является закон электромагнитной индукции:

$$\int_l \vec{E} dl = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Физический смысл: переменное магнитное поле образует вихревое электрическое поле. Закон изменения магнитного поля во времени определяет закон распределения электромагнитного поля в пространстве.

Интегрируя 3-е уравнение Максвелла по объёму и применяя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\int_S DdS = \int_V \rho dV = q .$$

Это равенство называется теоремой Гаусса: поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность определяется электрическим зарядом  $q$ , содержащимся в объёме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ .

Подобным образом получим интегральную запись последнего уравнения Максвелла:

$$\int_S BdS = 0 ,$$

выражающую непрерывность линий магнитной индукции. Итак, полная система уравнений Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = I_n = I + I_{\text{см}}; \\ \int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \\ \int_S \vec{D} d\vec{S} = q; \\ \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right.$$

Отметим, что уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы лишь тогда, когда параметры среды либо не зависят от координат, либо являются непрерывными функциями их. Уравнения Максвелла в интегральной форме применимы во всех случаях, включая и те, когда параметры среды или хотя бы один из них изменяются скачками.

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА, ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Впервые предположение о том, что электромагнитные возмущения носят волновой характер, было высказано Фарадеем в 1832 г. Теоретическим подтверждением предположения Фарадея о существовании электромагнитных волн послужила система уравнений Максвелла.

В настоящее время известно, что если какое-либо явление описывается волновым уравнением Даламбера

$$\nabla^2 \vec{\Phi}(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial t^2} = f, \quad (4.1)$$

то его решение

$$\vec{\Phi}(r, t) = \Phi_1 \left( t - \frac{r}{v} \right) + \Phi_2 \left( t + \frac{r}{v} \right) \quad (4.2)$$

представляет собой пару бегущих волн, распространяющихся соответственно вдоль и против  $r$  с постоянной скоростью  $v$ . Физический смысл имеет только первое слагаемое, т.е.

$$\vec{\Phi}(r, t) = \Phi_1 \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (4.2a)$$

Это уравнение описывает функцию, изменение которой происходит не моментально, а через время задержки  $t_3 = r/v$ . Эта функция является *запаздывающей*. Распространение электромагнитного поля происходит не моментально, а с задержкой. Эти положения теории дальнего действия на основе ограничений Зоммерфельда получили название *теоремы запаздывающих электродинамических потенциалов*.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Применив операцию rot к обеим частям этого уравнения, используя формулы векторного анализа и принимая во внимание 2- и 4-е уравнения Максвелла, получим

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\text{rot} j. \quad (4.3)$$

Аналогично можно показать, что (из 2-го уравнения Максвелла)

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon_a} + \mu_a \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Для пространства, свободного от зарядов и токов ( $\rho = 0, j = 0$ ), эти уравнения преобразуются к виду

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0; \\ \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (4.5), (4.6)$$

т.е. переходят в однородные *волновые* уравнения.



Уравнения (4.3) – (4.6) имеют вид (4.2) и несут волновой характер.

Сравнивая (4.3.. 4.6) с (4.1), можно записать, что  $\frac{1}{v} = \varepsilon_a \mu_a = 1 / \left( \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \right)^2$ .

С этого момента мы имеем право говорить об электромагнитных волнах, которые распространяются в пространстве со скоростью

$$v = 1 / \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} .$$

Рассмотрим **основную задачу электродинамики**.

Пусть в некотором объёме задано распределение токов и зарядов. Необходимо определить электромагнитное поле, создаваемое ими. Для этого необходимо решить систему уравнений Максвелла относительно  $H$  и  $E$ , или, что то же самое, векторные волновые уравнения (4.3, 4.4) или (4.5, 4.6). Каждое из этих уравнений распадается на систему из трёх скалярных, поэтому общий объём требуемых рассуждений и выкладок оказывается довольно громоздким. Более просто определить  $H$  и  $E$  с помощью так называемых электродинамических потенциалов  $\varphi$  и  $A$ .

Известно, что для электростатического поля

$$E = -\text{grad}\varphi , \quad (4.7)$$

а для магнитного поля постоянного тока

$$B = \text{rot}A . \quad (4.8)$$

Очевидно, для электромагнитного поля эти соотношения видоизменяются. Определим их.

Учитывая (4.8), второе уравнение Максвелла можно записать следующим образом

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot} \frac{\partial A}{\partial t} ,$$

или

$$\text{rot} \left( E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 .$$

Тогда по аналогии с тем, как мы поступили при рассмотрении свойств электростатического поля, и учитывая, что электростатическое поле – частный случай электромагнитного поля, можно записать

$$\vec{E} + \frac{\partial A}{\partial t} = -\text{grad}\varphi . \quad (4.9)$$

Откуда

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t},$$

аналогично  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} A.$

Из этого равенства следует, что электрическая составляющая электромагнитного поля одновременно связана со скалярным  $\varphi$  и векторным  $A$  потенциалами. Зная  $\varphi$  и  $A$ , можно определить  $E$  и  $H$  в соответствии с выражениями (4.8) и (4.9).

К дальнейшему упрощению приводит введение потенциала Герца на основе уравнений связи  $\varphi = -\text{div}\Gamma; A = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Gamma}{\partial t}.$

Вектор Герца  $\Gamma$  также удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\nabla^2 \Gamma - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = \begin{cases} 0, & \text{если источников поля нет;} \\ -\frac{1}{\varepsilon_a} \int j dt, & \text{если источники поля есть.} \end{cases}$$

Если вектор Герца  $\Gamma$  найден, то  $E$  и  $H$  определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{grad div}\Gamma - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Gamma}{\partial t^2}; \\ \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\Gamma); \\ \vec{E} &= -\text{grad}\varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad A = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \Gamma}{\partial t}, \quad \varphi = -\text{div}\Gamma, \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot} A. \end{aligned}$$

Потенциалы  $\varphi$  и  $A$ , входящие в решение, удовлетворяют уравнению (4.2а), поэтому называются *запаздывающими потенциалами*.

Таким образом, можно решить основную задачу электродинамики, зная скалярный и векторный потенциалы и вводя вспомогательный вектор Герца.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Будем рассматривать гармонические электромагнитные поля, создаваемые гармоническими токами и зарядами. В средствах радиосвязи используются узкополосные радиосигналы, модели которых в радиотехнике принято считать квазигармоническими узкополосными сигналами. Их записывают в гармонической форме.

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi); \quad j = j_m \cos(\omega t - \varphi);$$

$$E = E_m \cos(\omega t - \varphi); \quad H = H_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Для анализа таких колебаний удобно воспользоваться символическим методом. Согласно этому методу, гармоническая функция  $a = A_m \cos(\omega t - \varphi)$ , где  $a$  – мгновенное значение функций;  $A_m$  – амплитуда;  $\omega$  – угловая частота;  $\varphi$  – начальная фаза, может быть заменена комплексной

$$\underline{a} = A_m e^{i(\omega t - \varphi)} = A_m e^{i\omega_e t} = \underline{A}_m e^{i\omega t},$$

где  $\underline{A}_m$  – комплексная амплитуда.

Запишем мгновенное значение для векторов в комплексной форме:

$$\underline{j} = \underline{j}_m e^{i\omega t}; \quad \underline{E} = \underline{E}_m e^{i\omega t}; \quad \underline{H} = \underline{H}_m e^{i\omega t}.$$

Подставим их в уравнения Максвелла:

$$\text{rot} \underline{H} = \underline{j} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t};$$

$$\text{rot} \underline{H}_m e^{i\omega t} = \underline{j}_m e^{i\omega t} + i\omega \varepsilon \underline{E}_m e^{i\omega t}.$$

$\text{rot} \underline{H}_m = \underline{j}_m + i\omega \varepsilon \underline{E}_m$  – первое уравнение Максвелла в комплексных амплитудах.

Аналогично

$\text{rot} \underline{E}_m = -i\omega \mu_a \underline{H}_m$  – второе уравнение Максвелла в комплексных амплитудах.

Однородные волновые уравнения

$$\nabla^2 \underline{E}_m + k^2 \underline{E}_m = 0,$$

$$\nabla^2 \underline{H}_m + k^2 \underline{H}_m = 0,$$

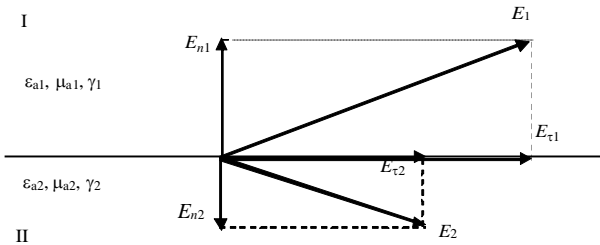
где  $k = \omega / v = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  – коэффициент распространения (волновое число).

## ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

До сих пор мы вели речь о неограниченной среде. Необходимо рассмотреть условия и особенности распространения электромагнитных волн на границе сред с различными параметрами.

В каждой из сред справедливы уравнения Максвелла. Однако скорости распространения электромагнитных волн в различных средах различны. Это приводит к появлению некоторых особенностей, которые нам следует установить.

На рисунке изображена граница раздела двух сред с различными электрическими параметрами. Для примера показано разложение вектора напряжённости электрического поля на тангенциальную (касательную к границе раздела) и нормальную (перпендикулярную к границе раздела) составляющие.



*Первая теорема (о тангенциальных составляющих векторов E и D).*

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряжённости электрического поля непрерывны  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ , а тангенциальные составляющие векторов электрической индукции претерпевают скачок, определяемый отношением диэлектрических проницаемостей сред:

$$D_{\tau 1} = \frac{\epsilon_{a1}}{\epsilon_{a2}} D_{\tau 2} .$$

*Вторая теорема (о нормальных составляющих векторов E и D).*

На границе раздела двух сред нормальные составляющие векторов электрического смещения непрерывны  $D_{n1} = D_{n2}$ , а нормальные составляющие векторов электрического поля претерпевают скачок, определяемый отношением диэлектрических проницаемостей сред:

$$E_{n1} = \frac{\epsilon_{a2}}{\epsilon_{a1}} E_{n2} .$$

*Третья теорема (о тангенциальных составляющих векторов  $H$  и  $B$ ).*

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряжённости магнитного поля непрерывны  $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ , а тангенциальные составляющие векторов магнитной индукции претерпевают скачок, определяемый отношением магнитных проницаемостей сред:

$$B_{\tau 1} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} B_{\tau 2}.$$

*Четвёртая теорема (для нормальных составляющих векторов  $H$  и  $B$ ):*

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$H_{1n} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} H_{2n}.$$

*Пятая теорема (граничные условия для векторов электромагнитного поля при наличии на поверхности свободных зарядов).*

Если по поверхности равномерно распределённые заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_s$ , то

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_s.$$

Наличие поверхностного тока, вызванного свободными зарядами, величина которого  $j_s$ , вызывает скачок

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = j_s.$$

На поверхности идеального проводника ( $\gamma = \infty$ )

$$E_{\tau} = 0, H_n = 0;$$

$$E_n \neq 0, H_{\tau} \neq 0.$$

Тогда поведение силовых линий у поверхности идеального проводника выглядит так, как показано на рисунке.

У поверхности идеального проводника силовые линии напряжённости электрического поля нормальны поверхности проводника. Силовые линии напряжённости магнитного поля касательны к поверхности идеального проводника.



ТЕОРЕМА УМОВА-ПОЙНТИНГА.  
ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ПОДОБИЯ.  
ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Пусть задан источник электромагнитного излучения, характеризуемый мощностью  $P$  (или сторонней ЭДС  $E_{ст}$ ). Окружим его поверхностью, ограничивающей объём  $V$ . Электромагнитное поле источника, как и любой другой вид материи, обладает энергией. Определим, на что она расходуется. С излучением электрического и магнитного полей со временем плотность электрической энергии  $w_э = 1/2\mu_a E^2$  и плотность магнитной энергии  $w_м = 1/2\mu_a H^2$  меняется. Выясним, что происходит с общим запасом энергии электромагнитного поля, сосредоточенным в объёме с течением времени:

$$W = \int_V w dV, \quad (4.10)$$

где  $W$  – энергия электромагнитного поля;  $w$  – объёмная плотность энергии электромагнитного поля.

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_a E^2 + \frac{1}{2} \mu_a H^2. \quad (4.11)$$

Для решения поставленной задачи продифференцируем (4.10) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV; \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \varepsilon_a E \frac{\partial E}{\partial t} + \mu_a H \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Из первого уравнения Максвелла  $\text{rot } H = j + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t}$  следует

$$\varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \text{rot } H - j.$$

Из второго уравнения Максвелла  $\text{rot } E = -\mu_a \frac{\partial H}{\partial t}$  следует

$$\mu_a \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot } E$$

Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = E \text{rot } H - E j - H \text{rot } E. \quad (4.12a)$$

Используя известное тождество  $\operatorname{div}(E \times H) = H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H$ , получим

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{[\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \vec{j}}{\gamma} . \quad (4.126)$$

С учётом стороннего источника энергии уравнение (4.126) примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{[\vec{E} \times \vec{H}] \cdot \vec{j}}{\gamma} + E_{\text{ст}} j . \quad (4.12\text{в})$$

Подставим это выражение под знак интеграла:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_v \operatorname{div} [E \times H] \cdot \vec{j} dV + \int_v E_{\text{ст}} j dV . \quad (4.13)$$

Рассмотрим, что из себя представляет каждый член выражения (4.13):

1. Для первого из них справедлива теорема Остроградского-Гаусса

$$\int_v \operatorname{div} [E \times H] dv = \int_v [E \times H] dS . \quad (4.14)$$

Правая часть (4.14) представляет собой энергию, проходящую через поверхность в единицу времени, т.е. излучающую энергию. Векторное произведение  $E \times H$  определяет количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, нормальную к вектору, а направление характеризует направление переноса электромагнитной энергии. Это векторное произведение обозначают  $\Pi = [E \times H]$  Вт/м<sup>2</sup> и называют вектором Умова-Пойнтинга (вектор плотности потока мощности).

2. Второй интеграл равенства (4.13) представляет собой мощность потерь на нагревание среды с проводимостью  $\gamma$  и обозначается  $P_n$ .

3. Последнее слагаемое (4.13) характеризует мощность стороннего источника  $P$ , создающего электромагнитное поле в объёме  $V$ .

Таким образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_s \Pi dS - P_n + P$$

или  $P - \frac{\partial W}{\partial t} = \int_s \Pi dS + P_n$

Это уравнение называют теоремой Умова-Пойнтинга. Итак, развиваемая источником стороннего электромагнитного поля мощность расходуется на:

- увеличение запаса энергии электромагнитного поля внутри объёма  $V$ ;
- потери, связанные с нагревом среды;
- излучение, связанное с распространением электромагнитной энергии за пределы  $V$  и характеризуемое вектором  $\Pi$ . В частности, если мощность, развиваемая источником, компенсирует потери, то запас энергии в объёме остаётся постоянным и излучаемая мощность определяется по формуле  $P_{\Sigma} = \int_S \Pi dS$ . Теорема Умова-Пойнтинга также называется уравнением баланса мощностей.

### Теорема подобия

В простейшем виде теорема подобия формулируется следующим образом. Конкретного типа излучатель, рассчитанный на работу с колебаниями частоты  $f_1$  и обладающий определёнными параметрами, не изменит их, если при переходе на новую частоту колебаний  $f_2 = n f_1$ , где  $n$  – действительное число, в  $n$  раз изменить его геометрические размеры, удельную проводимость материала при сохранении электрической и магнитной проницаемости материала излучателя и среды.

Это означает, что при  $n > 1$  размеры излучателя необходимо уменьшить, а удельную проводимость материала, из которого он изготовлен, увеличить в  $n$  раз. Действительное число  $n$  называют *коэффициентом масштабного пересчёта*.

На основании теоремы подобия производится моделирование антенных устройств. Следует учитывать, что требование изменения удельной проводимости материала часто невозможно реализовать, поэтому необходимо изменение тех параметров, которые не связаны с удельной проводимостью.

Теорема подобия (принцип электродинамического подобия), являющаяся следствием линейности уравнения Максвелла, позволяет широко использовать моделирование реальных систем в лабораторных условиях.

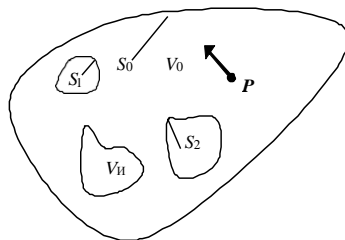
### Граничные задачи электродинамики

Граничная задача – некоторая основная задача электродинамики (нахождение поля по заданным источникам), при которой известны граничные условия и то, что поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Для внутренней и внешней граничных задач можно показать для монохроматического поля, что двух или более различных решений, каждое из которых удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, быть не может – существует только единственное решение (теорема единственности решений уравнений Максвелла).



Пусть имеем объём  $V_0$ , ограниченный поверхностью  $S$ , состоящей из поверхностей  $S_0, S_1, S_2$ . Среда в объёме – линейна, неоднородна и изотропна. В области  $V_{in}$ , находящейся в объёме  $V_0$ , заданы сторонние токи частотой  $\omega$ , возбуждающие поле. На поверхности  $S$  заданы граничные условия, причём на части поверхности (например, на  $S_0$ ) заданы граничные условия для  $E\tau$ , а на оставшейся части поверхности, например для  $S_1$  и  $S_2$  – только для  $H\tau$ ;  $p \in V_0$ .



Доказательство теоремы проведём от противного. Предположим, что существует два решения поставленной задачи:  $E_1, H_1$  и  $E_2, H_2$ . Они удовлетворяют уравнениям Максвелла при одинаковых сторонних токах и одних и тех же граничных условиях. Тогда разность этих решений  $E' = E_1 - E_2$  и  $H' = H_1 - H_2$  удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла  $\text{rot}H' = i\omega\epsilon_a E'$ ;  $\text{rot}E' = -i\omega\mu_a H'$  и однородным граничным условиям на поверхности  $S$ :  $H'\tau = 0$ ;  $E'\tau = 0$ .

Для внутренней граничной задачи объём  $V_0$  конечен. Если в среде есть потери  $\gamma \neq 0$ , решение будет единственным. В противном случае решений бесконечно много (соответствует незатухающим колебаниям в объёмном резонаторе – тема № 7).

Для внешней задачи объём  $V_0$  бесконечен. Эта задача описывает излучение энергии заданным источником. Решение – расходящиеся от источника волны (при выполнении условия А. Зоммерфельда).

Таким образом, уравнения Максвелла полностью описывают электромагнитное поле и позволяют решить задачу по определению составляющих поля. Граничные условия позволяют находить компоненты электромагнитного поля в разных граничащих средах, зная параметры среды. Основные теоремы электродинамики позволяют определить расход энергии на распространение радиоволн и возможность проведения экспериментов с моделями, а не с реальными объектами.

## 5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

### ПОНЯТИЕ ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА

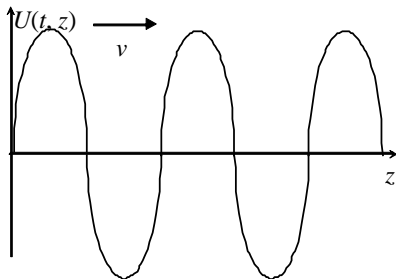
Слова «волна» и «волновой процесс», употребляемые в радиотехнике, получили широкое распространение ввиду наглядности их образа – всем знакомых волн на поверхности воды. Под распространением волны понимается постепенное вовлечение среды в некоторый физический процесс, приводящее к передаче энергии в пространстве.

Предположим, что в пространстве существует некоторый физический процесс, и для простоты рассмотрим зависимость его только от одной координаты  $z$ . Функция, описывающая процесс:

$$U(t, Z) = U(t - Z/v), \quad (5.1)$$

где  $v$  – скорость распространения процесса в среде, представленная на рисунке.

Говорят, что функция (5.1) описывает волну.



В общем случае электромагнитное поле  $E = E(x, y, z, t)$  и  $H = H(x, y, z, t)$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла, называется волной, если  $E$  и  $H$  можно представить как функцию времени  $t$  и некоторого пространственного аргумента  $\xi = \xi(x, y, z)$ .

Если положить

$$\xi = \xi_0 = \text{const},$$

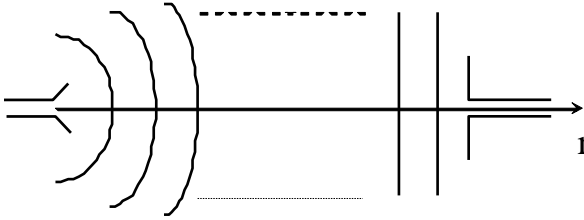
то уравнение

$$\xi(x, y, z) = \xi_0$$

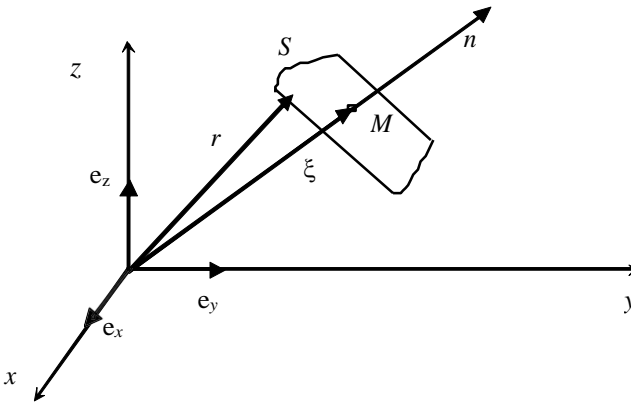
определяет в пространстве некоторую поверхность, которая применительно к электромагнитному полю может быть названа поверхностью равных фаз. Если эта поверхность представляет собой в пространстве плоскость, то такая электромагнитная волна называется плоской. Если поверхность  $\xi = \xi_0$  представляет собой сферу или цилиндр, то волны могут быть названы сферическими или цилиндрическими.

## ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Фазовый фронт электромагнитной волны (ЭМВ) различных излучающих устройств (систем) в зависимости от конструкции антенных систем может иметь различные формы. На расстояниях от источника, значительно больших длины волны излучаемых колебаний и линейных размеров источника, волны считают сферическими, а сам источник – точечным. В этом случае на приёмной стороне, в пределах линейных размеров приёмных устройств (антенн) фронт волны будет плоским. Электромагнитная волна с плоским фазовым фронтом называется плоской.



Рассмотрим свойства плоской ЭМВ. Введём прямоугольную систему координат и рассмотрим в ней участок плоской поверхности фазового фронта ЭМВ.



Уравнение плоскости имеет вид:

$$\xi = nr = n_x x + n_y y + n_z z . \quad (5.2)$$

Если учесть, что

$$n = n_x e_x + n_y e_y + n_z e_z , \quad (5.3)$$

то

$$r = x e_x + y e_y + z e_z . \quad (5.4)$$

Известно, что нормаль к фазовому фронту определяет направление распространения ЭМВ, поэтому вектор нормали  $n$  совпадает с направлением распространения плоской волны. Проекции вектора  $n$  удовлетворяют условию  $n_x, n_y, n_z - \text{const}$ .

Источником плоской ЭМВ может быть излучатель с параллельными лучами, излучающий гармонические колебания

$$\vec{E} = E_m(\xi) e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

Для точки  $M$  неограниченного однородного пространства должно быть справедливо однородное волновое уравнение

$$\nabla^2 \vec{E}_m + k^2 \vec{E}_m = 0, \quad (5.6)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \omega / v$ .

Уравнение (5.6) предполагает, что  $\vec{E}_m = f(r)$ . В нашем случае  $E_m = f(\xi)$ .

Определим однородное волновое уравнение, которому удовлетворяет плоская ЭМВ.

$$\nabla^2 \vec{E}_m(\xi) = \frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial z^2}. \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \vec{E}_m(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{E_m(\xi)}{\partial \xi} n_x \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left( \frac{\partial E_m(\xi)}{\partial \xi} n_x + \frac{\partial E_m(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} \right) n_x = \\ &= \frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial \xi^2} n_x^2. \end{aligned}$$

Рассматривая аналогично другие слагаемые равенства (5.7) и учитывая, что модуль единичного вектора нормали  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ , получим

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_m(\xi)}{\partial x^2} + k^2 \vec{E}_m(\xi) = 0. \quad (5.8)$$

Уравнение (5.8) – однородное волновое уравнение, и его решение, с учётом отсутствия отражённых волн, имеет вид

$$\vec{E}_m(\xi) = E_m e^{-ik\xi}. \quad (5.9)$$

Итак, для плоской электромагнитной волны получено решение волнового уравнения, имеющее огромное практическое значение для всех областей радиотехники, занимающихся распространением радиоволн в различных средах.

### ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ВЕКТОРОВ $E$ И $H$

Определим пространственную ориентацию векторов  $\Pi_m(\xi)$ ,  $H_m(\xi)$ ,  $E_m(\xi)$  для плоской волны. Для этого установим связь между векторами векторного произведения

$$\Pi_m = E_m \times H_m. \quad (5.10)$$

1. Найдем связь между векторами  $E$  и  $H$ . Обратимся к второму уравнению Максвелла для плоской ЭМВ и используем общее выражение решения волнового уравнения для плоской ЭМВ

$$\text{rot} E(\xi) = -i\omega\mu_a H_m(\xi). \quad (5.11)$$

Раскроем левую часть этого равенства, используя справочные формулы для преобразований векторной алгебры:

$$\begin{aligned} \text{rot} E(\xi) &= \text{rot}(E_m e^{-ik\xi}) = (\{\text{rot} a b = \text{rot} a \times b + \text{grad} b \times a\}) = \\ &= e^{-ik\xi} \text{rot} E_m + \text{grad} e^{-ik\xi} \times E_m. \end{aligned}$$

$$\text{rot} E_m = 0,$$

поэтому первое слагаемое обращается в ноль.

$$\text{grad} e^{-ik\xi} = -ike^{-ik\xi} \text{grad} \xi = -ike^{-ik\xi} \vec{n}.$$

Тогда

$$E(\xi) = e^{-ik\xi} \vec{n} \times E_m = -i\omega\mu_a H_m e^{-ik\xi}.$$

Откуда

$$\vec{n} \times E_m = \frac{k}{\omega\mu_a} \vec{n} \times E_m; \quad \vec{n} H_m = 0; \quad \vec{E}_m \vec{H}_m = 0. \quad (5.12)$$

Это равенство справедливо и для комплексных амплитуд, для мгновенных значений и говорит о взаимной перпендикулярности векторов  $E$  и  $H$ .

Амплитудная связь имеет вид

$$H_m = \frac{k}{\omega \mu_a} \vec{E}_m, \quad (5.13)$$

где  $\omega \mu_a / k = \frac{\omega \mu_a}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z$  – волновое сопротивление, которое

для свободного пространства равно  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi \approx 377$  Ом.

*Волновое (характеристическое) сопротивление* – коэффициент, связывающий амплитуды напряжённости электрического и магнитного полей через электрические параметры сред.

2. Определим векторное произведение (5.10):

$$\begin{aligned} \Pi_m &= E_m \times H_m = E_m \times [n \times E_m] = \\ & \vec{E}_m \times [n \times \vec{E}_m] = \\ & = \frac{1}{Z} \left[ n \left( \vec{E}_m \cdot \vec{E}_m \right) - E_m \left( n \cdot \vec{E}_m \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Выясним, чему равно скалярное произведение  $\vec{n} \cdot \vec{E}_m$ , для чего определим дивергенцию вектора  $\vec{E}_m(\xi)$  в точке, свободной от источников электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_m(\xi) &= \operatorname{div} \left( \vec{E}_m e^{-ik\xi} \right) = \\ &= e^{-ik\xi} \operatorname{div} \vec{E}_m + \operatorname{grad}^{-ik\xi} = -ike^{-ik\xi} = 0. \end{aligned}$$

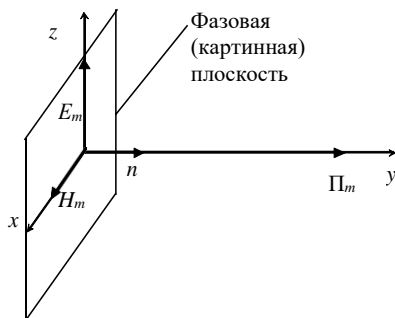
Это соотношение будет выполняться, если

$$\vec{E}_m \cdot \vec{n} = 0, \quad (5.15)$$

т.е. эти вектора перпендикулярны. С учётом (5.15) выражение (5.14) запишется как

$$\Pi_m = \vec{n} E_m^2 / Z, \quad (5.16)$$

т.е. вектор Умова-Пойнтинга совпадает с направлением вектора распространения ЭМВ  $n$ , а вектора  $E$  и  $H$  лежат в фазовой плоскости и взаимно перпендикулярны.



Таким образом, вектора  $E$  и  $H$  взаимно перпендикулярны и лежат в фазовой (картинной) плоскости ЭМВ.

Так как вектора лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, то говорят, что волна – поперечная.

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Наряду с плоской ЭМВ в теории антенн рассматриваются цилиндрические волны, созданные некоторыми типами излучателей (например, бесконечно тонкой нитью, т.е. проводом тока).

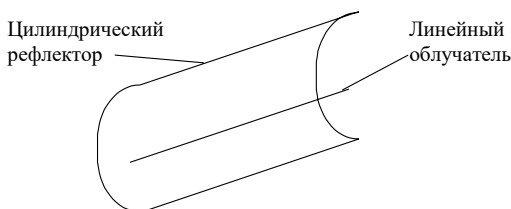
В этом случае однородное волновое уравнение

$$\nabla_{\text{цил}}^2 E(\xi, t) + k^2 E(\xi, t) = 0$$

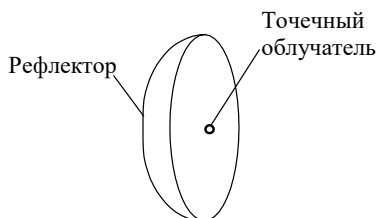
аналогично уравнению (5.6), но используя оператор «набла квадрат» в цилиндрических координатах, можно получить дифференциальное уравнение 2-го порядка – так называемое цилиндрическое уравнение Бесселя, решение которого при отсутствии отражённой волны записывается в виде

$$E_m(\xi) = E_m J_n(\xi),$$

где  $J_n(\xi)$  – цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка.



В некоторых радионавигационных системах используются фазовые методы определения координат объектов. При этом в состав таких систем должны входить антенны, имеющие так называемый фазовый центр. Установлено, что для этого ЭМВ, излучаемая такой антенной, должна быть сферической. Примером такой антенны является симметричный вибратор, или зеркальная сферическая антенна с точечным облучателем.



В этом случае однородное волновое уравнение будет иметь вид:

$$\nabla_{\text{сф}}^2 E(\xi, t) + k^2 E(\xi, t) = 0$$

также аналогичный уравнению (5.6), но используя оператор в сферических координатах, можно получить дифференциальное уравнение 2-го порядка, так называемое сферическое уравнение Бесселя, решение которого при отсутствии отражённой волны записывается в виде

$$E_m(\xi) = E_m J_{n+1/2}(\xi),$$

где  $J_{n+1/2}(\xi)$  – сферическая функция Бесселя 1-го рода ( $n + 1/2$ )-го порядка.

Она выражается через так называемую сферическую присоединительную функцию Лежандра.

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

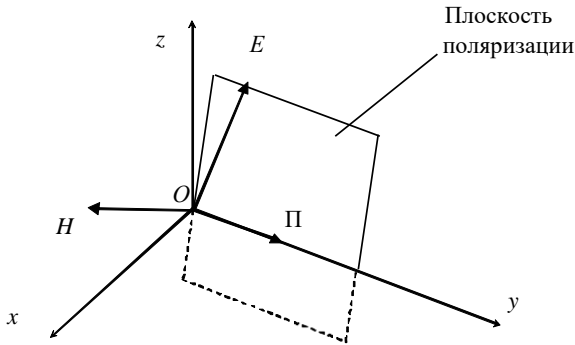
Электромагнитные волны, как и любой колебательный процесс, характеризуются амплитудой, фазой и частотой. Однако для полного описания этих трёх параметров оказывается недостаточно. Существенным параметром для волнового процесса является поляризация электромагнитных волн.

Под поляризацией понимают закон изменения направления и величины вектора  $E$  за период колебаний.



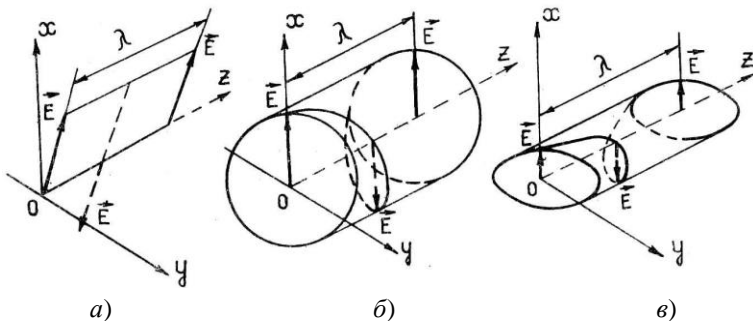
Рассмотрим виды поляризации, для чего введём понятие плоскости поляризации.

Плоскостью поляризации называется плоскость, проведённая через вектор  $E$  и направление распространения волны (вектор  $\Pi$ ).



Если при распространении плоской волны изменение во времени вектора  $E$  по величине и направлению не приводит к изменению ориентации плоскости поляризации в пространстве, то волна называется линейно-поляризованной. При этом поляризация называется вертикальной, если плоскость поляризации перпендикулярна плоскости  $XOY$ . Поляризация называется горизонтальной, если плоскость поляризации параллельна плоскости  $XOY$ . Другие случаи линейной поляризации описывают наклонную поляризацию. Она характеризуется углом наклона относительно плоскости  $XOY$ .

В тех случаях, когда пространственное положение плоскости поляризации изменяется, поляризация называется вращающейся.



Если вектор  $E$  остаётся постоянным по величине, но вращается с угловой скоростью в картинной плоскости (перпендикулярной направлению распространения волны), то поляризация называется круговой. При этом волна считается правого вращения, если, смотря по направлению распространения волны, вектор  $E$  поворачивается по часовой стрелке. В другом случае (вращение против часовой стрелки) – волна левой поляризации.

Если вектор  $E$  за период изменяет свою амплитуду совместно с поворотом плоскости поляризации, волна называется эллиптически поляризованной.

На рисунке показаны также и годографы вектора  $E$ .

Для создания волн с вращающейся поляризацией часто используют сумму двух ортогональных линейно-поляризованных волн с одинаковыми частотами:

$$E_x = E_{mx} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x),$$

$$E_y = E_{my} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y).$$

Обозначим  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ , тогда суммируя эти два колебания, возведя в квадрат левую и правую части, получим

$$\left( \frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 - 2 \left( \frac{E_y}{E_{my}} \right) \left( \frac{E_x}{E_{mx}} \right) \cos \varphi + \left( \frac{E_x}{E_{mx}} \right)^2 - e^{-2\alpha z} \sin^2 \varphi = 0.$$

Это уравнение кривой второго порядка.

При этом, если сдвиг фаз  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pi/2$  и амплитуды колебаний равны между собой  $E_{mx} = E_{my} = E_m$ , получим уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2 e^{-2\alpha z}.$$

Для создания волны с круговой поляризацией можно использовать сумму двух линейно-поляризованных колебаний равных амплитуд со сдвигом фаз  $\pi/2$ .

Если взять два колебания с разными амплитудами и фазовым сдвигом  $\pi/2$ , получим уравнение эллипса. Аналогично уравнение эллипса получается, если суммировать два линейно-поляризованных колебания с одинаковыми амплитудами и фазовым сдвигом  $0 < \varphi < \pi/2$ .

## 6. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Имея представление о параметрах распространения электромагнитных волн в неограниченных средах, опишем их применительно к простейшему случаю – идеальному диэлектрику. Однако вначале введём это понятие и ряд новых определений, касающихся свойств сред и основных параметров ЭМВ в них.

### КЛАССИФИКАЦИЯ СРЕД ПО ИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ. ГРАНИЧНАЯ ЧАСТОТА

По своим электрическим свойствам среды характеризуются первичными электрическими параметрами. В зависимости от соотношений этих величин среды делят на:

- диэлектрики;
- полупроводники;
- проводники.

Характеристикой среды с проводимостью является комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды  $\hat{\epsilon}_a = \epsilon_a(1 - \gamma / \omega \epsilon_a)$ , и для классификации сред надо учитывать соотношение величин  $\gamma$  и  $\omega \epsilon_a$ . Так

при  $\gamma \geq 10 \omega \epsilon_a$  – проводник,

при  $\gamma \leq 0,1 \omega \epsilon_a$  – диэлектрик,

при  $0,1 \omega \epsilon_a \leq \gamma \leq 10 \omega \epsilon_a$  – полупроводник.

Отношение проводимости среды  $\gamma$  к величине  $\omega \epsilon_a$  называется тангенсом угла потерь:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}.$$

Поэтому класс среды может быть определен по тангенсу угла потерь:

при  $\operatorname{tg} \Delta > 10$  – проводник,

при  $\operatorname{tg} \Delta < 0,1$  – диэлектрик,

при  $0,1 < \operatorname{tg} \Delta < 10$  – полупроводник.

На большое число материалов, применяющихся при изготовлении радиокомпонентов, величины тангенса угла потери приведены в справочной литературе.

Отсюда видно, что класс среды определяется не только первичными электрическими параметрами, но и частотой ЭМВ. Одна и та же среда при различных частотах может проходить весь диапазон классов.

Иногда вводят понятие граничной частоты, т.е. частоты, при которой токи проводимости и смещения равны:

$$|j_{\text{пр}}| = |j_{\text{см}}|,$$

$$\left| \gamma \frac{\dot{E}_m}{m} \right| = \left| \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial t} \right| = \left| \omega \varepsilon_a \frac{\dot{E}_m}{m} \right| \Rightarrow \gamma = \omega \varepsilon_a \Rightarrow \omega_{\text{гр}} = \gamma / \varepsilon_a.$$

При

- $\omega > \omega_{\text{гр}}$  – диэлектрик ( $\omega \geq 10\omega_{\text{гр}}$ );
- $\omega \approx \omega_{\text{гр}}$  – полупроводник ( $0,1\omega_{\text{гр}} \leq \omega \leq 10\omega_{\text{гр}}$ );
- $\omega < \omega_{\text{гр}}$  – проводник ( $\omega \leq 0,1\omega_{\text{гр}}$ ).

Граничная частота позволяет определить класс среды по частоте электромагнитной волны.

Коэффициент распространения в средах с проводимостью становится комплексной величиной и может быть представлен в алгебраической  $\mathcal{K} = \beta - i\alpha$  и показательной

$$\mathcal{K} = |\mathcal{K}| e^{-i\psi} \quad (6.1)$$

формах, причём

$$|\mathcal{K}| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (6.2)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad (6.3)$$

поэтому представляется необходимым выразить коэффициент фазы  $\beta$  и коэффициент затухания  $\alpha$  через параметры среды  $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\gamma$ .

Для коэффициентов затухания и фазы имеют место следующие выражения

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} + 1 \right]}, \quad (6.4a)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} - 1 \right]}. \quad (6.4b)$$

В идеальном диэлектрике ( $\gamma = 0$ )  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = k$ .

Среды с потерями ( $\gamma \neq 0$ ), в свою очередь, распределяются на диэлектрические, проводящие и среды, занимающие промежуточное положение. В диэлектрических средах  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \ll 1$  и тем более

$\left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \ll 1$ , поэтому (6.4а) можно упростить, пренебрегая величиной

$\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$ . В этом случае коэффициент фазы будет определяться выражением

$$\beta \cong \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} . \quad (6.5)$$

Однако такое же упрощение для  $\alpha$  неприемлемо, так как обращает его в нуль, т.е. исключается возможность учёта потерь на протяжённых линиях радиосвязи. Более строгим подходом к реальному учёту потерь в распространяющихся волнах будет использование разложе-

ния  $\sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2}$  в степенной ряд, в котором достаточно ограничиться

первыми двумя членами разложения:

$$\sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 + \dots \quad (6.6)$$

С учётом (6.6) формула (6.4б) приобретает вид

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} . \quad (6.7)$$

Величина фазового сдвига соответственно будет определяться выражением

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a} \cong \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a} . \quad (6.8)$$

В проводящих средах  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \gg 1$ ,  $\left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \gg 1$ , и «единица»

в формулах (6.4) можно пренебречь, поэтому формулы (6.4а) и (6.4б) приобретают вид:

$$\alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}, \quad (6.9a)$$

$$|\hat{k}| \cong \sqrt{\omega \mu_a \gamma}, \quad (6.9б)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \cong \arctg 1 \cong \frac{\pi}{4}. \quad (6.9в)$$

В средах, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, коэффициенты фазы и затухания определяются по полным формулам (6.5).

Таким образом, при рассмотрении распространения электромагнитных волн в конкретной среде необходимо определить класс среды (диэлектрик, проводник или среда, занимающая промежуточное положение) по величине  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$ , так как одна и та же среда с потерями

может относиться к разным классам для электромагнитных волн разных частот.

В средах с потерями волновое сопротивление становится комплексной величиной

$$\hat{Z} = \frac{\omega \mu_a}{|\hat{k}|} = \frac{\omega \mu_a}{|\hat{k}|} e^{i\psi}. \quad (6.10)$$

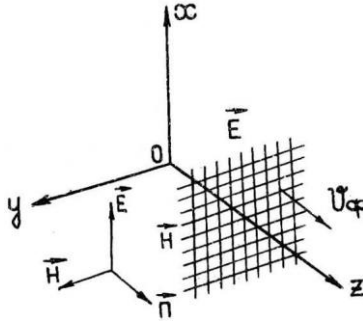
и, соответственно, формулы поля плоской электромагнитной волны должны быть записаны с учётом этого.

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

Идеальный диэлектрик характеризуется определенными диэлектрической ( $\mu_a$ ) и магнитной ( $\mu_a$ ) проницаемостями и  $\gamma = 0$ . В этом случае  $\varepsilon_a$  является величиной вещественной и, следовательно, коэффициент распространения  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$  действителен.

Пусть в идеальном диэлектрике распространяется плоская ЭМВ. Выражения для составляющих ЭМП имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_m(\xi) e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = E_m e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = E_m e^{i(\omega t - k \xi)}; \\ \vec{H} &= \frac{k}{\omega \mu_a} \left[ n \vec{E} \right] e^{i \omega t} = \hat{H}_m(\xi) e^{i \omega t} = H_m(\xi) e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = H_m e^{i(\omega t - k \xi)}. \end{aligned}$$



Или в действительных амплитудах:

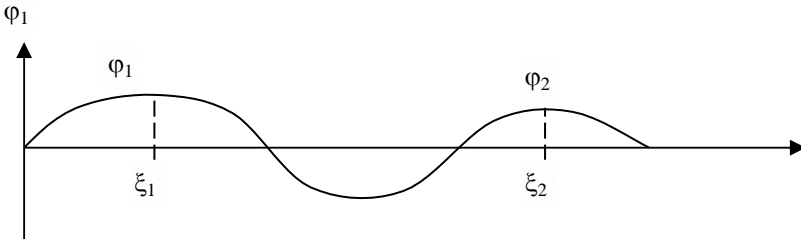
$$E = E_m \cos(\omega t - k\xi);$$

$$H = H_m \cos(\omega t - k\xi).$$

Экспоненциальный множитель характеризует фазовый набег, который приобретают составляющие плоской ЭМВ при распространении. Так как фазовые набег электрической и магнитной составляющих равны, то

- 1) в идеальном диэлектрике вектора  $E$  и  $H$  синфазны;
- 2) скорость распространения фазового фронта постоянна и определяется свойствами среды, т.е.  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ . В вакууме фазовая скорость равна скорости света  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с;

3) ЭМВ в пространстве характеризуется длиной волны. Длина волны – кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве, на котором фаза меняется на  $2\pi$ . Постоянная распространения характеризует набег фазы на единицу расстояния



$$\Rightarrow k\lambda = 2\pi; \lambda = 2\pi/k = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}} = Tv.$$

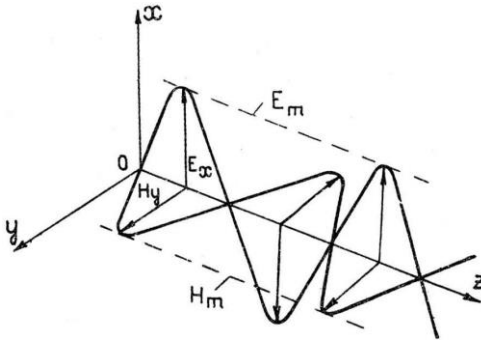
Длина волны – расстояние, на которое распространяется ЭМВ за период колебаний. Так как период колебаний не зависит от свойств среды, а скорость – зависит, фазовый множитель имеет вид  $e^{-ik\xi}$ , то при  $\xi_2 > \xi_1$ ,  $\varphi_1 > \varphi_2$  длина волны будет различна для различных сред (с различными первичными электрическими параметрами);

4) коэффициент распространения для идеального диэлектрика называют волновым числом;

5) волновое сопротивление в идеальном диэлектрике вещественно  $z = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$ .

В идеальном диэлектрике ( $\gamma = 0$ )  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = k$ , т.е. затухания волны по мере её распространения вглубь идеального диэлектрика не происходит.

Свойства плоской ЭМВ в идеальном диэлектрике иллюстрируют следующим рисунком.



## 7. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ПОТЕРЯМИ

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПОТЕРЯМИ

Как ранее было отмечено, коэффициент распространения в средах с проводимостью становится комплексной величиной и может быть представлен в алгебраической  $\hat{k} = \beta - i\alpha$  и показательной

$$\hat{k} = |\hat{k}| e^{-i\psi} \quad (7.1)$$



формах, причём

$$|\kappa| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (7.2)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta}. \quad (7.3)$$

Среды с потерями ( $\gamma \neq 0$ ), в свою очередь, распределяются на диэлектрические, проводящие и среды, занимающие промежуточное положение. В диэлектрических средах  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \ll 1$  и тем более

$\left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \ll 1$ , поэтому можно пренебречь величиной  $\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$ . В этом

случае коэффициент фазы будет определяться выражением

$$\beta \cong \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}. \quad (7.4)$$

Однако такое же упрощение для  $\alpha$  неприемлемо, так как обращает его в нуль, т.е. исключается возможность учёта потерь на протяжённых линиях радиосвязи.

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (7.5)$$

Величина фазового сдвига соответственно будет определяться выражением

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \arctg \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a} \cong \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a}. \quad (7.6)$$

В проводящих средах

$$\alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}, \quad (7.7)$$

$$|\kappa| \cong \sqrt{\omega \mu_a \gamma}, \quad (7.8)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \cong \arctg 1 \cong \frac{\pi}{4}. \quad (7.9)$$

В средах, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, коэффициенты фазы и затухания определяются по полным формулам.

В средах с потерями волновое сопротивление становится комплексной величиной:

$$\underline{Z} = \frac{\omega \mu_a}{k} = \frac{\omega \mu_a}{|k|} e^{i\psi}, \quad (7.10)$$

для диэлектрических сред  $Z \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ ; для проводящих сред  $Z \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}}$ ,

и, соответственно, формулы поля плоской электромагнитной волны с учётом выражения для волнового сопротивления могут быть представлены в показательной форме комплексного изображения

$$\vec{E} = E_m(\xi) e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = E_m e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = E_m e^{-\alpha \xi} e^{i(\omega t - \beta \xi)}, \quad (7.11a)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\underline{Z}} \left[ \vec{n} \times E_m \right] e^{-i k \xi} e^{i \omega t} = \frac{|k|}{\omega \mu_a} \left( \vec{n} \times E_m \right) e^{-\alpha \xi} e^{i(\omega t - \beta \xi - \psi)}, \quad (7.11b)$$

в тригонометрической форме

$$E = E_m e^{-\alpha \xi} \cos(\omega t - \beta \xi), \quad (7.12a)$$

$$\vec{H} = H_m e^{-\alpha \xi} \cos(\omega t - \beta \xi - \psi) = \frac{|k|}{\omega \mu_a} \left( \vec{n} \times E_m \right) e^{-\alpha \xi} \cos(\omega t - \beta \xi - \psi). \quad (7.12b)$$

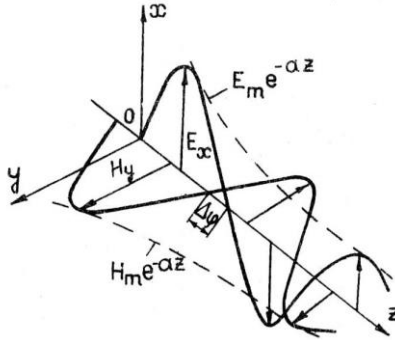
Из (7.11) и (7.12) следует, что поле плоской волны в среде с потерями обладает следующими свойствами:

1. Векторы  $E$  и  $H$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения П волны, т.е. волна является поперечной, но между  $E$  и  $H$  появляется фазовый сдвиг  $\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$ , который тем меньше, чем

меньше коэффициент затухания  $\alpha$ .

2. Амплитуды векторов  $E$  и  $H$  убывают по экспоненциальному закону с увеличением расстояния  $\xi$ .

3. Поверхности равных амплитуд совпадают с поверхностями равных фаз, поэтому они, как и волны в среде без потерь, являются однородными волнами.



Вектор Пойнтинга и средний за период вектор Пойнтинга будут определяться выражениями

$$\vec{\Pi} = \frac{|k|}{2\omega\mu_a} E_m^2 e^{-2\alpha\xi} \left[ \cos\psi + \cos 2\left(\omega t - \beta\xi - \frac{\psi}{2}\right) \right] \vec{n}, \quad (7.13a)$$

$$\vec{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{|k|}{2\omega\mu_a} E_m^2 e^{-2\alpha\xi} \cos\psi \vec{n}, \quad (7.13б)$$

из которых видно, что в среде с потерями вектор Пойнтинга может иметь направление, противоположное направлению распространения волны, в то время как средний за период вектор Пойнтинга всегда совпадает с направлением распространения плоской волны. Ослабление или затухание плотности потока мощности как мгновенного значения  $\Pi$ , так и среднего за период  $\Pi$ , происходит вдвое быстрее, чем амплитуд составляющих.

Затухание измеряется в децибелах:

$$N = 10 \lg \frac{\Pi_{\text{cp}}(\xi)}{\Pi_{\text{cp}}(\xi + \Delta\xi)} = 20 \lg \frac{E_m(\xi)}{E_m(\xi + \Delta\xi)}, \quad \text{дБ.} \quad (7.14)$$

Подставляя, получим

$$N = 8,686\alpha\Delta\xi = \alpha^*\Delta\xi, \quad \text{дБ,} \quad (7.15)$$

где  $\alpha^*$  – погонное затухание (затухание на единицу длины), дБ/м.

Из (7.5) погонное затухание определяется как

$$\alpha^* = 8,686\alpha. \quad (7.16)$$

## ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ. ЯВЛЕНИЕ ДИСПЕРСИИ И ЕЁ ВИДЫ

Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в средах с потерями

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (7.17)$$

определяется коэффициентом фазы и зависит от частоты электромагнитных колебаний. Зависимость фазовой скорости гармонических волн от их частоты называется дисперсией, поэтому в средах с потерями имеет место дисперсия.

Скорость распространения энергии

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (7.18)$$

Таким образом, подтверждается естественный вывод о том, что энергия гармонической волны переносится полем волны и распространяется с фазовой скоростью электромагнитной волны. Этот вывод справедлив для любых однородных изотропных сред.

### Групповая скорость

В средах с потерями или в других условиях, например в волноводных линиях передачи, фазовая скорость зависит от частоты электромагнитных колебаний, т.е. имеет место дисперсия. Проходя один и тот же путь, гармонические волны, составляющие единый пакет волн реального сигнала, получают различные фазовые сдвиги, что ведёт к искажению формы самого сигнала. Очевидно, чем уже спектр сигнала, тем меньше разница между фазовыми скоростями гармонических составляющих сигнала, тем меньше его искажение.

Для характеристики перемещения энергии какого-либо сигнала, относящегося к узкополосным сигналам, вводят понятие групповой скорости сигнала, понимая под этим скорость перемещения максимума огибающей этого сигнала.

В общем случае любой реальный сигнал может быть представлен в виде бесконечной суммы гармонических волн, которую на примере напряжённости электрического поля электромагнитной волны сигнала можем записать в виде интеграла Фурье:

$$\dot{E}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)\xi]} d\omega, \quad (7.19)$$

где  $A_m(\omega)$  – амплитуда каждой из гармонических волн;  $\beta(\omega)$  – коэффициент фазы каждой из этих волн.

Если спектр сигнала достаточно узкий ( $2\Delta\omega \ll \omega_0$ ), т.е. заключён в интервале частот  $-\omega_0 - \Delta\omega \ll \omega_0 + \Delta\omega$ , где  $\omega_0$  – центральная частота спектра сигнала,  $2\Delta\omega$  – активная ширина спектра сигнала, то вне этого интервала  $A_m(\omega) \cong 0$ , поэтому (7.18) представим в виде

$$\dot{E}(t, \xi) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)\xi]} d\omega. \quad (7.20)$$

Коэффициент фазы можно представить рядом Тейлора в окрестности  $\omega_0$

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{\beta''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2}{2!} + \dots \quad (7.21)$$

и для узкополосного сигнала ограничиться лишь первыми двумя членами. Это позволяет перейти к новой переменной  $\Omega = \omega - \omega_0$  для рассмотрения сигнала в пределах спектра и получить

$$\begin{aligned} \dot{E}(t, \xi) &\cong \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A_m(\omega_0 + \Omega) e^{i[\omega_0 t + \Omega t - \beta(\omega_0)\xi - \beta'(\omega_0)\Omega\xi]} d\Omega = \\ &= \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A_m(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega[t - \beta'(\omega_0)\xi]} d\Omega e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)\xi]}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Теперь (7.22) можем представить в виде

$$\dot{E}(t, \xi) \cong \dot{E}_m[t - \beta'(\omega_0)\xi] e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)\xi]}, \quad (7.23)$$

из которого видно, что аргумент  $t - \beta'(\omega_0)\xi$  амплитудного множителя  $\dot{E}_m[t - \beta'(\omega_0)\xi]$  отличается от аргумента, определяющего распространение центральной части спектра. Именно аргумент амплитудного множителя характеризует распространение всех составляющих спектра в целом, т.е. распространение пакета (группы) волн сигнала, его энергии.

При  $t - \beta'(\omega_0)\xi = \text{const}$  с непрерывно меняющимся временем пакет волн будет перемещаться в пространстве со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\beta'(\omega_0)} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}, \quad (7.24)$$

называемой групповой скоростью или скоростью распространения энергии сигнала. Индекс  $\omega = \omega_0$  в (7.24) можно опустить ввиду произвольности выбора центральной частоты.

Условием применимости (7.24) является малая скорость изменения коэффициента фазы вблизи частоты и узость спектра сигнала, так как в разложении (7.21) отброшены члены порядка выше первого. При невыполнении этих условий влияние дисперсии становится весьма заметным и сигнал в процессе распространения так сильно меняет свою форму, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

В средах без потерь ( $\gamma = 0$ )  $\beta = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$ , поэтому групповая скорость совпадает с фазовой:

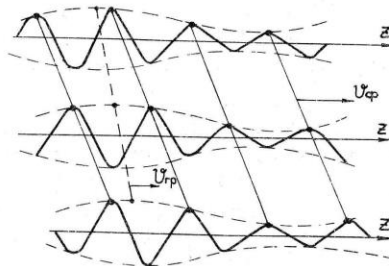
$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}. \quad (7.25)$$

В средах с потерями фазовая и групповая скорости не совпадают, но связаны между собой. Для установки этой связи продифференцируем выражение (7.17) по частоте:

$$\beta \frac{dv}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega} = 1, \quad (7.26)$$

из которого получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{v}{1 - \beta \frac{dv}{d\omega}}. \quad (7.27)$$



Соотношение (7.27) показывает, что в средах с аномальной дисперсией  $\left( \frac{dv}{d\omega} > 0 \right)$ , к которым относятся однородные изотропные среды с потерями, групповая скорость больше фазовой, в то время как в средах или в условиях с нормальной дисперсией  $\left( \frac{dv}{d\omega} < 0 \right)$  она меньше фазовой скорости электромагнитных колебаний в них.

## ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

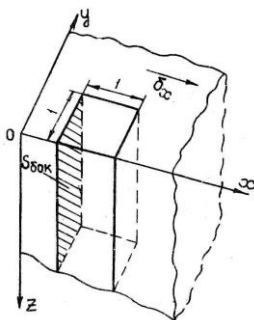
Явление концентрации электромагнитного поля и вызванного им высокочастотного тока у поверхности проводника получило название *поверхностного эффекта*.

Полезным проявлением этого эффекта является возможность применения проводников для экранирования различных радиоустройств и защиты человека от электромагнитных излучений. Однако поверхностный эффект приводит к возрастанию активного сопротивления проводника при протекании высокочастотного тока в нём.

При этом речь ведут о глубине проникновения  $\delta$  электромагнитной волны в материал, которая определяется как глубина проводника, на которой уровень напряженности поля уменьшается в  $e$  раз от исходного, тогда

$$\delta = 1/\alpha. \quad (7.28)$$

Рассмотрим явление поверхностного эффекта и учёт его на примере шлифа проводника с размерами, во много раз меньшими длины волны, падающей на поверхность шлифа.



Под действием электрического поля волны в проводнике протекает ток проводимости, причём амплитуда его плотности и амплитуда электрического поля волны убывает по экспоненциальному закону с увеличением расстояния вглубь проводника, в котором  $\beta \equiv \alpha$ :

$$\vec{j}_m \cong \gamma E_m e^{-\alpha(1+i)\xi}, \quad (7.29)$$

где  $E_m$  – амплитуда поля на поверхности шлица.

Теоретически поле плоской электромагнитной волны проникает в проводник на бесконечно большое расстояние, поэтому комплексная амплитуда тока проводимости, вызванного электромагнитной волной в проводнике и определяемого как поток плотности тока через поверхность  $S = l\xi$ :

$$\vec{k}_m = \frac{\gamma E_m}{\alpha(1+i)} l. \quad (7.30)$$

Ток  $\vec{k}_m$  (7.23) можно считать током, вызванным высокочастотным напряжением с известной амплитудой  $\vec{U}_m$  на поверхности  $\xi = 0$ .

Поверхностное сопротивление

$$\vec{Z}_s = \frac{E_m}{j_{sm}} = \frac{\alpha}{\gamma} + i \frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} + i \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} = R_s + iX_s. \quad (7.31)$$

Понятие поверхностного сопротивления определяет волновое сопротивление электромагнитной волны в проводящей среде. Поверхностное сопротивление (7.31), а значит, и сопротивление проводника, является активно-индуктивным, поэтому потери энергии на нагрев проводника определяются его активной частью

$$R_{\text{пр}} = R_s \frac{L}{l} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \frac{L}{l}. \quad (7.32)$$

Очевидно, что сравнивать потери в проводнике при протекании в нём токов высокой частоты и постоянного тока можно только по величинам погонных сопротивлений для высокочастотных токов и постоянного тока.

Погонное сопротивление постоянному току определяется как

$$R_{\text{оп}} = \frac{1}{\gamma S}, \quad (7.33)$$

где неизвестна только площадь поперечного сечения  $S = l\xi$  из-за неопределённости расстояния. Но эта неопределённость легко устраняется, если ограничиться слоем  $\xi = 3\delta = \frac{3}{\alpha}$ , в котором концентрируется

99 % энергии волны в проводнике, поэтому



$$R_{\text{оп}} \cong \frac{1}{\gamma l 3\delta}. \quad (7.34)$$

В то же время активное погонное сопротивление проводника при протекании в нём высокочастотных токов

$$R_{\gamma} = \frac{R_s}{1} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}}{1}, \quad (7.35)$$

поэтому  $\frac{R_f}{R_{\text{оп}}} = 3$ , т.е. погонное сопротивление проводника при высокочастотных токах практически в три раза превосходит погонное сопротивление того же проводника при постоянном токе.

Для уменьшения погонного сопротивления проводников, применяемых для монтажа радиоаппаратуры, используются высокопроводящие металлы, из которых наиболее употребительна медь. Кроме того, применяются все меры к увеличению поперечного размера  $l$ . Это достигается изготовлением и применением многожильных проводов, нанесением сравнительно широких, но тонких полос проводника на диэлектрическую основу плат.

Вредное воздействие электромагнитного поля оценивается энергией нагрева. Более вредное воздействие оказывают ЭМП более высоких частот. Для защиты организма от вредного воздействия такого поля применяют специальные экранирующие костюмы из медной проволоки. Необходимо помнить, что энергия электромагнитного поля сильно убывает с расстоянием.

## 8. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

### ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМВ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В реальных условиях ЭМВ всегда встречают на своём пути препятствия, оказывающие влияние на их распространение. Рассмотрим случай, когда препятствием является среда, ограниченная бесконечно плоской границей. Будем считать, что плоскость раздела есть граница раздела двух однородных изотропных сред с параметрами  $\epsilon_{a1}$ ,  $\mu_{a1}$ ,  $\gamma_1$  и  $\epsilon_{a2}$ ,  $\mu_{a2}$ ,  $\gamma_2$ . Единичный вектор нормали  $n_0$  к плоскости  $S$  направлен из второй среды в первую. Положение каждой точки пространства будем определять радиус-вектором  $r$ , проведённым из точки  $O$ , расположенной на плоскости  $S$ .

Плоскостью падения называется плоскость, содержащая вектор нормали и вектор падающей волны  $n_1$ .

Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна  $E_1$ , распространяющаяся в среде I. Для удовлетворения граничных условий в точке  $M$  необходимо предположить, что существуют волны: преломлённая  $E_2$  и отражённая  $E_3$ . Направление движения волн будем характеризовать углами: падения –  $\theta_1$ , отражения –  $\theta_3$ , преломления –  $\theta_2$ .

Необходимо определить соотношения между частотами волн, направлениями распространения, амплитудами.

Предположим, что все волны плоские, тогда справедлива запись:

– падающая волна  $\vec{E}_1 = E_{m1} e^{i(\omega_1 t - k_1 \vec{r}_1)}$ . Учитывая, что уравнение плоскости в этом случае имеет вид  $\vec{\xi} = n_1 \cdot \vec{r}$ , запишем

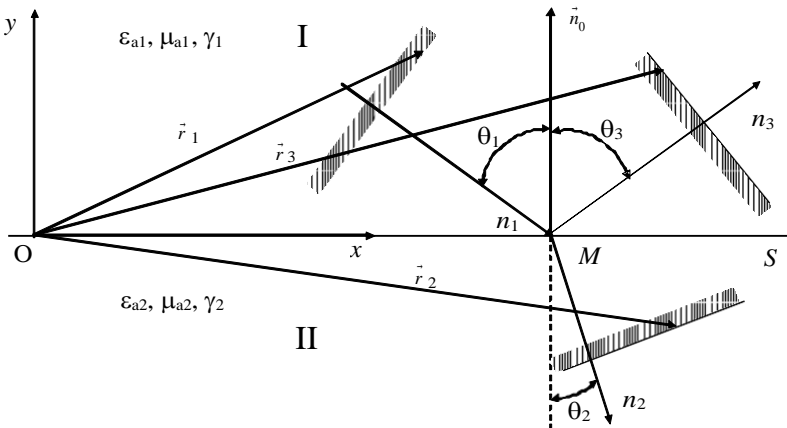
$$\vec{E}_1 = E_{m1} e^{i(\omega_1 t - k_1 r_1)};$$

– отражённая волна (рассуждения аналогичные)

$$\vec{E}_3 = E_{m3} e^{i(\omega_3 t - k_3 r_3)};$$

– преломлённая волна

$$\vec{E}_2 = E_{m2} e^{i(\omega_2 t - k_2 r_2)}.$$



В этих выражениях под  $k$  понимается волновой вектор, имеющий длину, равную волновому числу, и направление, совпадающее с направлением распространения волны, т.е. с вектором  $n$ .

На границе раздела в точке  $M$  должно выполняться граничное условие для тангенциальных компонент напряжённости электрического поля (их непрерывность):

$$\left( \vec{E}_1 + \vec{E}_3 \right) \times n_0 = \vec{E}_2 \times n_0$$

или в развёрнутом виде

$$\left[ E_1 e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} + E_3 e^{i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})} \right] \times n_0 = E_2 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} \times n_0. \quad (8.1)$$

Можно показать, что одно из условий выполнения равенства (8.1) в любой момент времени для любой точки пространства

$$\omega_1 t - k_1 \vec{r} = \omega_2 t - k_2 \vec{r} = \omega_3 t - k_3 \vec{r}, \quad (8.2)$$

а это возможно при

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \quad (8.3)$$

$$k_1 \vec{r} = k_2 \vec{r} = k_3 \vec{r}, \quad (8.4)$$

так как сумма двух гармонических функций будет гармонической функцией только при равенстве частот.

Итак, **соотношение между частотами установлено – они равны.**

Установим теперь связь между направлениями распространения, т.е. между углами  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

Из равенства (8.4) запишем:  $k_1 \vec{r} = k_3 \vec{r} \rightarrow (k_1 - k_3) \vec{r} = 0$ .

Для точки  $M$  вектор  $r$  лежит в плоскости  $S$ , тогда  $(k_1 - k_3) \perp \vec{r}$  и, следовательно, параллелен вектору нормали  $n_0$ .

Тогда справедливо

$$(k_1 - k_3) \times \vec{n}_0 = 0.$$

Раскрывая векторное произведение, получим

$$k_1 \sin \theta_1 = k_3 \sin \theta_3,$$

но рассматриваемые векторы находятся в среде I, поэтому

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_3 \Rightarrow \theta_1 = \theta_3. \quad (8.5)$$

Это равенство получило название **первого закона Снеллиуса** – угол падения равен углу отражения, векторы падающей и отражённой волн лежат в плоскости падения.

Рассуждая аналогично для равенства  $k_1 \vec{r} = k_2 \vec{r}$ , получим

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2$$

или

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (8.6)$$

Это – **второй закон Снеллиуса**, или закон синусов. Отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная, равная обратному отношению коэффициентов распространения граничащих сред.

Введём понятие показателя преломления  $N$ , как отношения скорости распространения ЭМВ в свободном пространстве к скорости распространения в среде, для которой определяется  $N$ .

Для идеальных диэлектриков  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}$ ,  $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}$ , кроме того, для большинства диэлектриков можно считать  $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ , т.е.

$$N = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon}. \quad (8.7)$$

Для идеальных диэлектриков можно записать волновое сопротивление

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (8.7a)$$

Учитывая (8.7) и (8.7a), можно показать, что

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

и

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (8.8)$$

Таким образом, с помощью законов Снеллиуса по известному углу падения определяются углы отражения и преломления. Выражение (8.8) может быть записано и через коэффициенты преломления и через волновые сопротивления сред.

## КОЭФФИЦИЕНТЫ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ВОЛН РАЗЛИЧНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Перейдём к следующей поставленной нами задаче – определению напряжённости полей преломлённой и отражённой волн. Используем введённое понятие плоскости падения, как плоскости, в которой лежат векторы  $n_0$  и  $k_1$ . В общем случае направление вектора  $\vec{E}_1$  падающей волны может быть произвольным, но он всегда может быть разложен на составляющую, лежащую в плоскости падения, и составляющую, перпендикулярную ей (или составляющую, лежащую в плоскости  $S$ ).

Рассмотрим первый случай:

1. Вектор  $\vec{E}_1$  лежит в плоскости падения (считаем волну вертикально поляризованной). Вектор  $\vec{H}_1$  соответственно перпендикулярен  $\vec{E}_1$  и, значит, параллелен  $S$ .

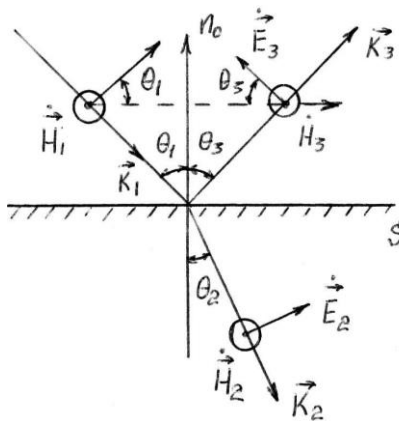
Связь будем искать в виде

$$E_{m2} = T_{\parallel} E_{m1}; \quad E_{m3} = R_{\parallel} E_{m1},$$

где  $R_{\parallel}$  и  $T_{\parallel}$  – коэффициенты Френеля для вертикально поляризованной отражённой и преломлённой волн соответственно. В этом случае векторы

$E_1, E_2, E_3$  лежат в плоскости падения, а векторы  $H_1, H_2, H_3$  перпендикулярны ей и параллельны плоскости раздела сред  $S$ , причём

$$H_1 n_0 = H_2 n_0 = H_3 n_0 = 0.$$



Коэффициенты Френеля для вертикально (параллельно) поляризованной волны имеют вид:

$$T_{\parallel} = \frac{2N_1 \cos\theta_1}{N_2 \cos\theta_1 + N_1 \cos\theta_2}; \quad R_{\parallel} = \frac{N_2 \cos\theta_1 - N_1 \cos\theta_2}{N_2 \cos\theta_1 + N_1 \cos\theta_2}. \quad (8.9)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos\theta_1}{Z_1 \cos\theta_1 + Z_2 \cos\theta_2}; \quad R_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos\theta_1 - Z_2 \cos\theta_2}{Z_1 \cos\theta_1 + Z_2 \cos\theta_2}. \quad (8.9a)$$

2. Во втором случае вектор  $\vec{E}_1$  лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Амплитудную связь будем искать в том же виде

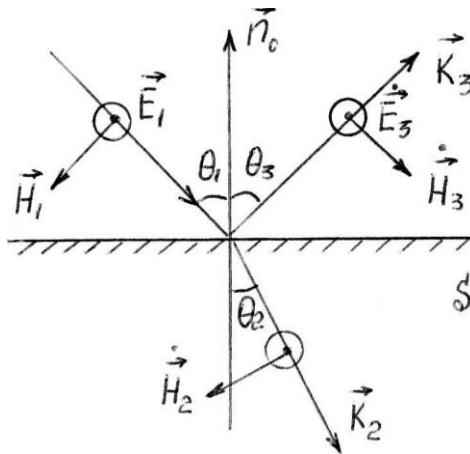
$$E_{m2} = T_{\perp} E_{m1}; \quad E_{m3} = R_{\perp} E_{m1},$$

где  $R_{\perp}$  и  $T_{\perp}$  – коэффициенты Френеля отражённой и преломлённой волн соответственно для случая горизонтальной (перпендикулярной) поляризации вектора  $\vec{E}$ .

Векторы  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  лежат в плоскости  $S$ , причём

$$\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$$

$$E_1 n_0 = E_2 n_0 = E_3 n_0.$$



Векторы  $\vec{H}_1, \vec{H}_2, \vec{H}_3$  лежат в плоскости падения. Коэффициенты Френеля в этом случае имеют вид

$$T_{\perp} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}; \quad R_{\perp} = \frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}, \quad (8.10)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}; \quad R_{\parallel} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}. \quad (8.10a)$$

Иначе коэффициенты Френеля ещё называют коэффициентами отражения и преломления (прохождения).

Иногда интересуются не амплитудными соотношениями между отражёнными, преломлёнными и падающими волнами, а энергетическими. Если среднее за период значение мощности падающей волны обозначим  $\Pi_{cp1}$ , отражённой –  $\Pi_{cp3}$  и преломлённой  $\Pi_{cp2}$ , то в соответствии с законом сохранения энергии запишем

$$\Pi_{cp1} = \Pi_{cp2} + \Pi_{cp3}. \quad (8.11)$$

Пронормируем это выражение:

$$\frac{\Pi_{cp2}}{\Pi_{cp1}} + \frac{\Pi_{cp3}}{\Pi_{cp1}} = 1. \quad (8.12)$$

Первый член равенства (8.12) есть коэффициент прохождения  $T$ , а второй – коэффициент отражения  $R$ . Они определяются из соотношений через коэффициенты Френеля. В общем случае коэффициенты Френеля являются комплексными, поэтому запишем коэффициент отражения через комплексный и комплексно сопряжённый коэффициенты Френеля:

$$T = 1 - R;$$

$$R = \hat{R}_{\parallel} \hat{R}_{\parallel}^*,$$

или для перпендикулярной поляризации

$$R = \hat{R}_{\perp} \hat{R}_{\perp}^*.$$

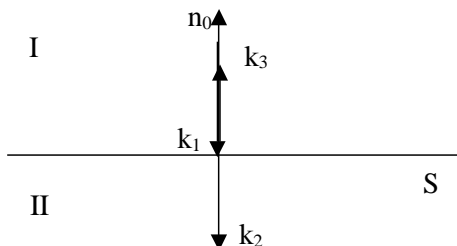
Для идеальных диэлектриков

$$R = R_{\parallel}^2,$$

$$R = R_{\perp}^2.$$

## НОРМАЛЬНОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В этом случае  $\theta_1 = 0$ . Углы отражения и преломления из законов Снеллиуса также равны нулю. Векторы  $\vec{E}_1$  и  $\vec{H}_1$  лежат в плоскости  $S$ .



Подставляя  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$  в (8.10), (8.11), получим

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{2N_1}{N_1 + N_2}; \quad -R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}.$$

Учитывая связь между показателями преломления и волновым сопротивлением сред  $N_2 / N_1 = Z_1 / Z_2$ , можно записать

$$T_{\perp} = -T_{\parallel} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}; \quad R_{\perp} = -R_{\parallel} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}.$$

При  $Z_2 = Z_1$  отсутствует отражение, т.е. имеет место так называемый «режим согласования сред».

## 9. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

### НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМВ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ ИДЕАЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Наклонное падение плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред определяется углом падения  $0 < \theta_1 < \pi/2$ . Среда, в которой распространяется падающая волна по отношению к граничащей с ней может быть оптически менее плотной ( $N_1 < N_2$ ) или более плотной ( $N_1 > N_2$ ). Кроме того, падающая волна может быть поляризована различно.



Все это определяет особенности отражения и преломления ЭМВ при наклонном падении.

Будем полагать, что граничащие среды – идеальные диэлектрики ( $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ ), для которых практически всегда можно считать  $\mu_{a2} = \mu_{a1} = \mu_0$ . Коэффициенты Френеля для вертикально и горизонтально поляризованных волн имеют вид:

$$R_{\parallel} = \frac{N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2}; T_{\parallel} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2};$$

$$R_{\perp} = \frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}; T_{\perp} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}.$$

Целесообразно рассмотреть два случая:  $N_1 < N_2$  и  $N_1 > N_2$ .

В зависимости от этих соотношений коэффициенты Френеля ведут себя по разному. При этом возникают различные явления, которые изучим далее.

### ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ПРЕЛОМЛЕНИЯ. УГОЛ БРЮСТЕРА

1. Наклонное падение:  $N_1 < N_2$ .

Так как  $v_{\phi i} \sim N_i$ , то фазовые скорости волн в среде будут неодинаковы. В результате происходит преломление плоской ЭМВ на границе.

При определённых условиях может наблюдаться явление полного преломнения.

При каких условиях?

В случае полного преломнения (т.е. нет отражения)  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$  должны быть равны нулю, или

$$N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2 = 0, \quad (9.1)$$

$$N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 = 0. \quad (9.2)$$

Одновременно эти равенства удовлетворяться не могут. Значит, явление полного преломления может наблюдаться либо при горизонтальной, либо при вертикальной поляризации. Но при условии  $N_1 < N_2$  должно быть  $\sin \theta_2 < \sin \theta_1$  (из 2-го закона Снеллиуса), поэтому будет выполняться только первое из двух равенств. Следовательно, явление полного преломления существует лишь при вертикальной поляризации падающей волны.

Угол падения  $\theta_1 = \theta_0$ , при котором наблюдается это явление, называется углом Брюстера.

Учитывая равенство (9.1) и закон синусов  $N_1 \sin \theta_0 = N_2 \sin \theta_2$ , получим

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{N_2}{N_1}.$$

В оптике этот угол называют углом полной поляризации на том основании, что если на границу раздела падает произвольно поляризованная волна под углом, то отраженная волна будет горизонтально поляризованной, так как вертикально поляризованная компонента поля падающей волны полностью проходит во вторую среду.

Физическое объяснение представлено на рисунке.

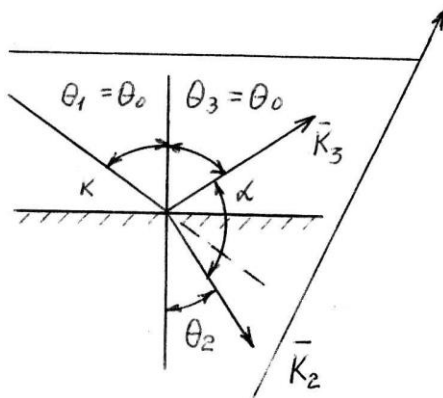
Из выражения (9.1):

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_0 N_2 / N_1 = \cos \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 = \sin \theta_0.$$

Согласно формул приведения, это может быть, если  $\theta_0 + \theta_2 = \pi / 2$ .

Тогда из рисунка видно, что  $\theta_0 + \theta_2 = \pi / 2 = \alpha$ .

Это позволяет дать простое физическое объяснение. Под действием электрического поля преломленной волны молекулы диэлектрика 2-й среды становятся источником вторичных ЭМВ. Каждая из молекул представляет собой элементарный электрический диполь (вibrator), момент которого направлен вдоль  $k_2$ , а ось vibratorа будет направлена вдоль  $k_3$ . Однако известно (рассмотрим в теории излучения более подробно), что вдоль своей оси элементарный vibrator (диполь) не излучает.



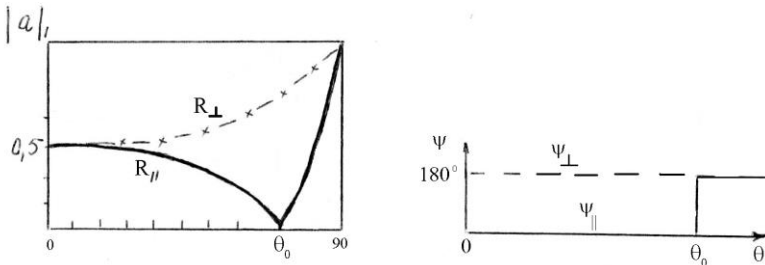
При горизонтальной поляризации падающей волны, как видно из (9.2), при любом  $\theta_1$   $N_2 \cos\theta_2 > N_1 \cos\theta_1$ ,  $R_{\perp} < 0$ .

Вообще говоря, при возникновении преломлённой и отражённой волн последние могут приобретать некоторый фазовый сдвиг относительно падающей ЭМВ. Поэтому в общем виде коэффициенты Френеля носят комплексный характер и имеют вид

$$\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}| \exp(-i\psi)$$

Параллельно поляризованная волна при переходе через угол Брюстера меняет фазу на  $\pi$ . При этом модуль коэффициента Френеля меняется скачком. Перпендикулярно поляризованная волна во всем диапазоне углов падения фазы не меняет. Модуль коэффициента Френеля для отражённой волны плавно возрастает. Фаза коэффициента Френеля при этом составляет  $\pi$ .

Графики зависимостей  $|\mathfrak{R}|$  и  $\psi$  от угла падения  $\theta_1$  имеют вид:



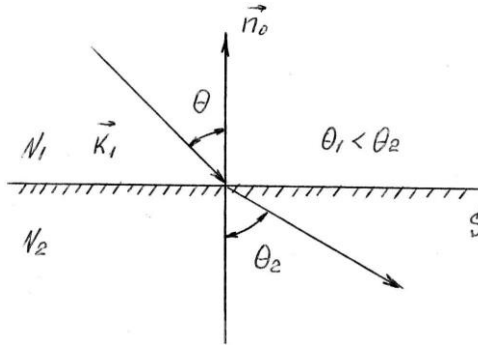
Поэтому волна с горизонтальной поляризацией чаще используется в тех случаях, когда возможны отражения от поверхности в широком диапазоне углов падения.

### ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ВНУТРЕННЕГО ОТРАЖЕНИЯ. КРИТИЧЕСКИЙ УГОЛ

Рассмотрим второй случай, когда  $N_1 > N_2$ . К рассмотрению этого вопроса подойдём несколько иначе, чем в предыдущем случае.

Обратимся ко 2-му закону Снеллиуса:

$$\sin \theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \sin \theta_1.$$



Вводим  $\theta_{\text{кр}} = \theta_1$ , при котором  $\theta_2 = \pi/2$ . Угол преломления будет больше, так как  $N_1 > N_2$ , поэтому при некотором  $\theta_1 = \theta_{\text{кр}}$  угол станет равным  $\pi/2$ , т.е. преломлённая волна будет скользить вдоль поверхности раздела. Это явление поверхностного отражения.

Однако при этом  $T_{\parallel} \neq 0$  и  $T_{\perp} \neq 0$ .

При дальнейшем увеличении угла синус угла преломления должен быть больше единицы, т.е. мы переходим в область комплексных значений коэффициента Френеля. Определим выражения для коэффициентов Френеля:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1} = i \sqrt{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1} = ig.$$

Подставляя это значение в (8.10), (8.11), получим выражение для коэффициентов Френеля в комплексной форме.

Чтобы выяснить суть происходящего физического явления, рассмотрим поле во второй среде. Преломлённую волну будем характеризовать комплексным волновым вектором

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_2' - ik_2'' \quad (9.3)$$

Выясним физический смысл коэффициентов  $k_2''$  и  $k_2''$ .

Учитывая (9.3), запишем фазовый множитель преломлённой волны

$$e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} = e^{-k_2'' z} e^{i(\omega t - k_2' x)},$$

из которого следует:

–  $k_2'$  характеризует направление распространения и степень затухания в этом направлении преломлённой волны;

–  $k_2'$  – фазовый вектор, характеризует направление и скорость распространения преломлённой волны во второй среде.

Определим эти векторы.

Так как вторая среда – идеальный диэлектрик, то  $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_d \mu_a$  или, раскрывая  $k_2^2 = (k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_2''^2 = \omega^2 \epsilon_d \mu_a$ ; приравнявая действительные и мнимые части, получим

$$(k_2')^2 - (k_2'')^2 = \omega^2 \epsilon_d \mu_a, \quad k_2' k_2'' = 0. \quad (9.3a)$$

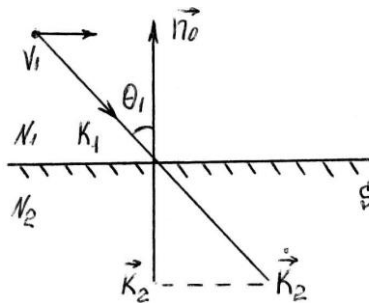
1. Векторы  $k_2'$  и  $k_2''$  ортогональны. Определим векторы  $k_2', k_2''$ .

Известно, что  $\begin{pmatrix} k_2' \\ k_2'' \end{pmatrix} \times \vec{n}_0 = 0$ .

Раскроем  $\vec{k}_2 \times \vec{n}_0$ :

$$k_2' \times \vec{n}_0 - i k_2'' \times \vec{n}_0 - k_2' \times \vec{n}_0 = 0, \quad (9.4)$$

откуда получаем  $k_2'' \times \vec{n}_0 = 0$ .



2. Вектор  $k_2'$  перпендикулярен плоскости и направлен во вторую среду от граничной поверхности вдоль вектора  $n_0$ , а вектор  $k_2''$  перпендикулярен ему. Во второй среде при  $\theta_1 \geq \theta_{кр}$  волна распространяется вдоль границы раздела двух сред. По мере удаления от границы раздела во вторую среду поле убывает по экспоненциальному закону – концентрируется у поверхности раздела.

Такая волна называется поверхностной.

Определим амплитудные значения векторов  $k'_2$  и  $k''_2$ .

Из равенства (9.4) видно, что

$$k'_2 \times \vec{n} - k \times \vec{n} = 0,$$

$$\begin{matrix} & \vec{n} & \\ & \downarrow & \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

т.е.  $k'_2 = k_1 \sin \theta_1$ .

Так как волновое число характеризует ещё и скорость распространения поверхностной волны, то определим и её:

$$v_{2s} = \frac{\omega}{k'_2} = \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_1} = \frac{v}{\sin \theta_1}.$$

Значения  $k_2''$  определим из первого соотношения (9.3а):

$$k_2' = \sqrt{(k_1 \sin \theta_1)^2 - (k_2)^2} = k_2 \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1} = k_2 \sqrt{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1},$$

т.е. ( $N_1 > N_2$ ) при  $\sin \theta_1 \leq N_2 / N_1$  коэффициент  $k_2'$  – мнимая величина, в этом случае затухания нет, волна распространяется во второй среде.

При  $\sin \theta_1 > N_2 / N_1$  коэффициент  $k_2'$  действителен и характеризует затухание во второй среде.

Итак, при  $N_1 > N_2$  и  $\sin \theta_1 > N_2 / N_1$  во второй среде вдоль границы раздела распространяется ЭМВ, амплитуда которой убывает по мере удаления от поверхности. Степень убывания амплитуды пропорциональна величине  $k_2'$  и углу падения  $\theta_1$ .

Данное явление применяется в волоконно-оптических кабелях, в которых распространяется поверхностная волна с отражением от внешней границы волокна.

## ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТЬ ИДЕАЛЬНОГО ПРОВОДНИКА

В качестве первой среды может рассматриваться любой однородный изотропный высококачественный диэлектрик (радиофарфор, слюда, плавленый кварц, воздух и др.), но удобнее считать таким диэлектриком воздух, так как его параметры ( $\epsilon_1 = 1,0006$ ,  $\mu_1 = 1,0000038$ ,  $\gamma \cong 0$ ) близки к параметрам вакуума. Это значительно упрощает анализ рассматриваемого процесса и соответствует реальной картине распространения радиоволн. В качестве второй среды может рассматриваться любой однородный изотропный проводник с плоской поверхностью.

Фазовые скорости плоских электромагнитных волн одной частоты в таких разных по электрическим свойствам средах существенно различаются, причём всегда  $v_1 \gg v_2$ .

Комплексный коэффициент распространения в среде с потерями

$$\mathbb{k}_2 = \beta_2 - i\alpha_2$$

и особенно в проводнике говорит о том, что свойства преломлённой волны в нём могут и должны описываться также с помощью комплексного волнового вектора с условием

$$k^2 = \mathbb{k}_2^2, \quad (9.5)$$

позволяющим учесть граничные условия на поверхности проводника. На основании граничного условия для волновых векторов уравнение

$$(k_2' - ik_2'') \times \vec{n}_0 = k_1 \times \vec{n}_0$$

в результате разделения действительных и мнимых частей распадается на уравнения

$$k_2' \times \vec{n}_0 = k_1 \times \vec{n}_0; \quad k_2'' \times \vec{n}_0 = 0. \quad (9.6a, 9.6b)$$

Из (9.6b) следует коллинеарность векторов  $k_2'', \vec{n}_0$ . Их взаимная противоположность следует из физического смысла, а именно из того, что источником отражённой и преломлённой волн является падающая волна, поэтому вектор  $k_2''$  характеризует ослабление преломлённой волны только в направлении, противоположном направлению нормали  $n_0$  к  $S$ .

Вектор  $k_2'$  направлен под некоторым углом  $\theta_2$  по отношению к направлению  $k_2''$ , причём угол  $\theta_2$  может быть определен как

$$\sin \theta_2 \cong \frac{v_2}{v} \sin \theta_1; \quad \sin \theta_2 \cong \frac{1}{N} \sin \theta_1. \quad (9.7a, 9.7b)$$

Приближённые равенства (9.7) позволяют оценить величину угла преломления  $\theta_2$ . Так, при падении плоской волны под любым углом падения на проводник с параметрами  $\frac{f_{\text{гп2}}}{f} = 100$ ,  $\varepsilon_2 \cong \varepsilon_1$ , угол преломления  $\theta_2 < 8,2^\circ$ , а при падении на проводник с  $\frac{f_{\text{гп2}}}{f} = 1000$  —  $\theta_2 < 1^\circ$ , т.е. угол преломления в рассматриваемом случае очень мал.

Практически можно считать, что единичный вектор  $n_{02}$ , определяющий направление преломлённой волны в проводнике, противоположен вектору нормали  $n_0$ , т.е.

$$n_{02} \cong -n$$

и, соответственно,

$$k'_2 = k'_2 \vec{n}_{02} \cong -k'_2 \vec{n}_0.$$

Таким образом, при падении плоской волны на плоскую границу раздела «идеальный диэлектрик–проводник» под любым углом  $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$  практически можно считать, что фронт преломлённой волны в проводнике параллелен граничной поверхности, т.е. поверхности проводника.



Это допущение является основой так называемых приближённых граничных условий Леонтовича-Щукина.

### ПРИБЛИЖЁННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЛЕОНТОВИЧА-ЩУКИНА

Как известно, в идеальном проводнике электромагнитное поле не существует и в него не проникает, что математически описывается выражениями

$$\vec{E}_{2\tau} = 0; \quad \vec{E}_{2n} = 0; \quad H_2 = 0. \quad (9.8a, 9.8б, 9.8в)$$

Однако при падении на поверхность идеального проводника плоской электромагнитной волны за счёт перегруппирования свободных зарядов, на ней возникают поверхностные токи и заряды с плотностями, обусловленными результирующим полем, т.е.

$$\vec{j}_s = \vec{H}_1 + \vec{H}_3; \quad \sigma = \epsilon_{a1} (\vec{E}_{1n} + \vec{E}_{3n}). \quad (9.9a, 9.9б)$$

Граничное условие с учётом (9.8a) примет вид



$$\vec{E}_{3\tau} = -\vec{E}_{1\tau}, \quad (9.10)$$

из которого следует, что на поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая электрического поля отражённой волны противоположно направлена тангенциальной составляющей падающей волны и равна ей по величине. Вертикальные составляющие электрического поля  $\vec{E}_{1n}$  и  $\vec{E}_{3n}$  на поверхности равны по величине и одинаково направлены, т.е. выполняется равенство

$$\vec{E}_{3n} = \vec{E}_{1n}. \quad (9.11)$$

Равенство (9.11) объясняется отсутствием потерь при отражении от поверхности идеального проводника, а одинаковая направленность векторов – выполнением закона отражения.

$$\vec{H}_{3\tau} = \vec{H}_{1\tau}. \quad (9.12)$$

На поверхности идеального проводника тангенциальные составляющие магнитного поля одинаково направлены и равны по величине.

В соответствии с (9.12) равенство (9.9а) в скалярном выражении примет вид

$$\vec{j}_s = 2\vec{H}_{1\tau}, \quad (9.13)$$

из которого следует, что плотность поверхностного тока на поверхности идеального проводника определяется удвоенной величиной напряжённости магнитного поля падающей параллельно поляризованной волны. При произвольной поляризации падающей волны – определяется удвоенной величиной тангенциальной составляющей ее магнитного поля.

Таким образом, при падении плоской электромагнитной волны на поверхность идеального проводника величины всех одноимённых составляющих отражённой и падающей волн не равны, а тангенциальная составляющая электрического и нормальная составляющая магнитного полей в отражённой волне меняют направление на противоположное соответствующим составляющим падающей волны или, как говорят, меняют фазу на  $180^\circ$ .

При падении плоской электромагнитной волны любой поляризации на поверхность реального проводника часть энергии падающей волны проникает в проводник, поэтому в общем случае в реальном проводнике  $\vec{E}_{2\tau} \neq 0$ ,  $\vec{E}_{2n} \neq 0$ ,  $\vec{H}_{2\tau} \neq 0$ ,  $\vec{H}_{2n} \neq 0$ . Это означает, что составляющие электрического и магнитного полей в первой (диэлектрической) среде и, соответственно, в отражённой волне претерпевают изменение.

Можно считать, что преломлённая волна  $\vec{E}_2$ ,  $\vec{H}_2$  определяется только тангенциальными составляющими электрического и магнитного полей на поверхности проводника, т.е.

$$\vec{E}_2 \approx E_{2\tau}; \quad \vec{H}_2 \approx H_{2\tau}. \quad (9.14a, 9.14b)$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей в комплексном выражении примут вид

$$\vec{E}_2 \times n = E_1 \times n; \quad n \times \vec{H}_2 = n \times H_1, \quad (9.15a, 9.15b)$$

где  $E_2 \times n = E_{2\tau}$ ,  $n \times H_2 = H_{2\tau}$ ,  $E_1 \times n = E_{1\tau}$ ,  $n \times H_1 = H_{1\tau}$  — тангенциальные составляющие векторов поля на границе раздела.

В свою очередь, напряжённость электрического поля волны в проводнике

$$\vec{E}_2 \approx Z_2 \left( n \times \vec{H}_2 \right), \quad (9.16)$$

Равенство (9.16) не изменится, если обе его части умножить векторно на  $n$ :

$$\vec{E}_2 \times n \approx Z_2 \left( n \times \vec{H}_2 \right) \times n. \quad (9.17)$$

Подставляя (9.15 а, б) в (9.17), получим

$$\vec{E}_1 \times n \approx Z_2 \left( n \times H_1 \right) \times n. \quad (9.18)$$

Приближённое равенство (9.18) называют приближённым граничным условием Леонтовича-Шукина в векторной форме. Оно устанавливает связь между тангенциальными составляющими векторов напряжённости электрического и магнитного полей в первой среде на поверхности проводника через его параметры, входящие в  $Z_2$ , т.е. через параметры проводника.

В скалярном выражении условие (9.18) приобретает вид

$$E_{1\tau} \approx Z_2 H_{1\tau}, \quad (9.19)$$

$$E_{1\tau} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu}{a^2 \gamma_2}} H_{1\tau} e^{i \frac{\pi}{4}}. \quad (9.20)$$

Таким образом, приближённое граничное условие Леонтовича-Щукина в скалярном (9.20) выражении показывает, что на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряжённости электрического поля в первой среде опережает тангенциальную составляющую напряжённости магнитного поля в ней на  $\frac{\pi}{4}$ , причём величина

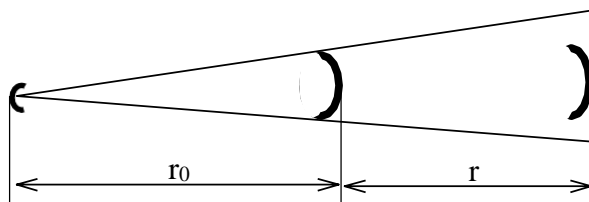
на  $E_{1\tau}$  тем меньше, чем меньше частота электромагнитных колебаний падающей волны и больше проводимость  $\gamma_2$  проводящей среды. Расчёты показывают, что при падении электромагнитной волны на хороший проводник  $\left\{ \begin{matrix} f_{гр} \\ f \end{matrix} > 1000 \right\}$  величина  $E_{1\tau}$  настолько мала, что тангенциальные составляющие падающей и отражённой волн практически равны, а значит, можно пользоваться соотношениями для идеального проводника.

Приближённое граничное условие Леонтовича-Щукина играет существенную роль при необходимости учёта потерь на нагрев проводящей среды, так как именно величина тангенциальной составляющей поля определяет величину мощности  $P_{ср}$ , проходящей по нормали вглубь проводника.

## 10. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

### НАЗНАЧЕНИЕ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ – ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Одной из важнейших задач техники сверхвысоких частот (СВЧ) является передача электромагнитных волн (ЭМВ) на некоторые расстояния. При изучении теории излучения электромагнитных волн было показано, что излучатели (антенны) могут обладать направленностью излучения энергии. Тем не менее направленность излучения антенн оказывается совершенно недостаточной, если необходимо передать энергию с высоким коэффициентом полезного действия  $\eta$  от генератора к потребителю, так как значительная часть энергии будет рассеяна в пространстве на других направлениях.



Для эффективной передачи энергии с высоким КПД необходимо, чтобы электромагнитная волна, переносящая энергию, не рассеивалась бы в пространстве, а концентрировалась вокруг заданного направления.

Электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направляющей границы, называются *направляемыми*, а сама направляющая граница (линия) – *линией передачи (ЛП)* или *фидером*. КПД любых линий передачи не может равняться единице, так как в них наблюдается затухание направляемых волн вследствие потерь энергии из-за неидеальности ЛП. Потери энергии характеризуются *коэффициентом затухания  $\alpha$* .

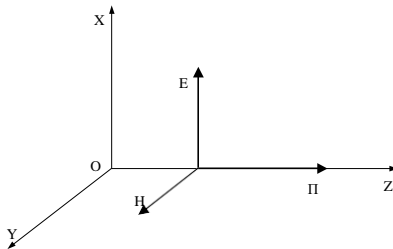
Практически всегда для передачи энергии на небольшие расстояния внутри радиотехнического устройства используются различные виды ЛП. Например, с помощью ЛП осуществляется канализация энергии от передатчика (ПРД) к антенне или от антенны к приемнику (ПРМ).

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

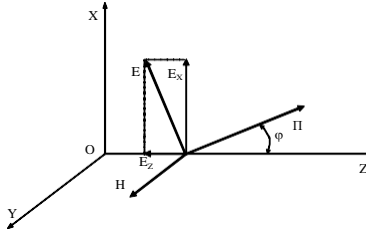
Итак, электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направляющей границы, называются *направляемыми*, а сама направляющая граница (линия) – *линией передачи (ЛП)* или *фидером*.

В теории линий передачи направляемые ЭМВ классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия в них продольных составляющих электрического либо магнитного векторов. При этом под продольным направлением подразумевается направление распространения ЭМВ (продольная ось линии передачи – ось  $Z$ ). Здесь могут быть четыре случая.

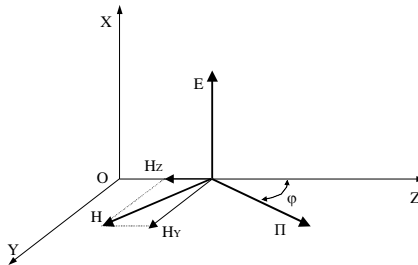
1. Оба вектора, электрический и магнитный, перпендикулярны оси ЛП и, следовательно, не имеют продольных составляющих, т.е.  $H_z = 0$ ,  $E_z = 0$ . Вектор Пойнтинга  $\Pi$  направлен вдоль оси  $Z$ . Такие волны носят название *поперечных* электромагнитных волн – волн типа Т или ТЕМ (Transverse Electromagnetic).



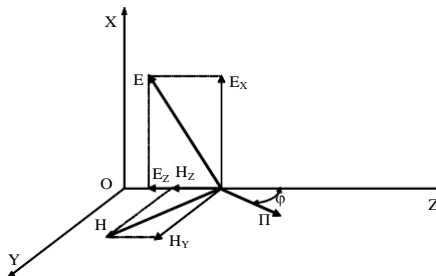
2. Электрический вектор имеет отличную от нуля продольную составляющую  $E_Z \neq 0$ , в то время как магнитное поле волны поперечно, т.е.  $H_Z = 0$ . Вектор Пойнтинга  $\Pi$  лежит в плоскости  $XOZ$  и направлен под углом  $\varphi$  относительно оси  $Z$ . Такие направляемые волны называются волнами типа E (Electric).



3. Продольную составляющую имеет магнитный вектор ( $H_Z \neq 0$ ), а электрическое поле поперечно ( $E_Z = 0$ ). Вектор Пойнтинга  $\Pi$  лежит в плоскости  $YOZ$  и направлен под углом  $\varphi$  относительно оси  $Z$ . Такие направляемые волны называются волнами типа H.



4. В ЛП могут существовать волны, одновременно имеющие продольные составляющие электрического и магнитного полей ( $E_Z \neq 0$ ,  $H_Z \neq 0$ ). Вектор Пойнтинга  $\Pi$  не лежит в плоскости  $YOZ$  или  $XOZ$ . Такие волны получили название смешанных или гибридных.



На основе классификации ЭМВ в линиях передачи проводится классификация самих ЛП.

### Классификация линий передачи

В настоящее время применяется большое количество различных типов ЛП. Общими требованиями к ним являются:

- минимальные потери энергии;
- простота конструкции;
- высокая надёжность;
- малые габариты и масса;
- низкая стоимость.

Классификация ЛП выполняется по различным признакам.

1. Если в направлении передачи энергии (вдоль оси  $Z$ ) ЛП имеет неизменные параметры внутреннего заполнения и геометрические размеры, линия передачи называется *регулярной (продольно однородной)*. В противном случае ЛП называются *нерегулярными (продольно неоднородными)*. Большинство ЛП являются регулярными.

2. Линии передачи подразделяются на линии *открытого и закрытого типов*. В открытых ЛП энергия ЭМП, хотя в основном и сосредоточена в непосредственной близости к её поверхности, распределена во всём пространстве, окружающем линию. В линиях закрытого типа энергия ЭМП заключена в пространстве, ограниченном замкнутой металлической поверхностью, представляющей собой электромагнитный экран.

3. По режиму работы ЛП бывают с *бегущей* или *стоячей* волнами. Чтобы получить режим бегущей волны, надо сопротивление нагрузки и волновое (характеристическое) сопротивление линии сделать равными, т.е. надо согласовать линию с нагрузкой ( $R_H = Z_{л}$ ). На СВЧ режим чисто бегущей волны при коэффициенте бегущей волны (КБВ), равном единице, получить обычно невозможно. Практически очень хорошо, если КБВ = 0,8...0,9. Ухудшение работы линии при этом незначительно. Во многих случаях довольствуются величиной КБВ = 0,5...0,7.

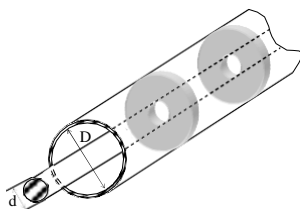
4. По типу волны в ЛП различают линии с Т-волной, ЛП с *E*- и *H*-волнами и линии с поверхностными (замедленными) волнами.

Конструктивное исполнение ЛП зависит прежде всего от типа ЭМВ в них.

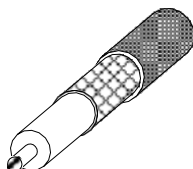
### Т-ВОЛНА В КОАКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

*Коаксиальная ЛП* – два соосных проводника с заданными размерами, центрированные диэлектрическими шайбами или сплошным диэлектрическим заполнением. Одножильный или многожильный внутренний проводник окружён слоем высококачественного диэлек-

трика (полистирол, полиэтилен, фторопласт и т.д.), поверх которого располагается внешний проводник. Внешний проводник может быть выполнен в виде сплошной металлической трубы.



Такая ЛП называется жёстким коаксиальным фидером. При этом часто внутренний проводник центрируется диэлектрическими шайбами. В другом конструктивном исполнении внешний проводник выполняется в виде металлической сетки, для предохранения от внешних воздействий покрытой защитной диэлектрической оболочкой. Такой фидер становится гибким и называется коаксиальным кабелем. Внутреннее заполнение в этом случае выполняют сплошным из высококачественного диэлектрика.



Свойства и параметры коаксиального фидера определяются его геометрическими размерами  $D$  и  $d$ , электрическими параметрами диэлектрика внутреннего заполнения, внешнего и внутреннего проводников.

*Волновое сопротивление коаксиальной ЛП* определяется выражением:

$$Z_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{D}{d} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{D}{d}, \quad (10.1)$$

где  $D$  – внутренний диаметр внешнего проводника;  $d$  – диаметр центрального проводника;  $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu\mu_0$  – соответственно абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика внутреннего заполнения ЛП.

Коаксиальным фидерам присваивается условное обозначение, состоящее из четырёх позиций, поставленных через дефис: букв РК – радиочастотный кабель; величины волнового сопротивления в омах;

среднего диаметра диэлектрического заполнения в миллиметрах; двух цифр, одна из которых обозначает материал диэлектрика внутреннего заполнения (1 – полиэтилен, 2 – фторопласт), другая – порядковый номер разработки, конкретный тип конструкции фидера.

Например, коаксиальный 75-омный фидер с фторопластовым заполнением, имеющим средний диаметр диэлектрика 7 мм, обозначается РК-75-7-21.

В коаксиальной ЛП могут существовать ЭМВ различных типов: Т, Е, Н и гибридные. Основной является Т-волна, остальные считают паразитными.

Для того, чтобы в коаксиальной ЛП распространялась только поперечная волна, выбирают геометрические размеры фидера:

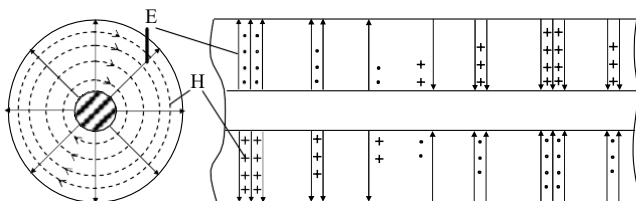
$$\pi(D + d) < \lambda.$$

Для предотвращения излучения геометрические размеры ЛП должны удовлетворять условию:

$$\pi(D - d) \ll \lambda.$$

Поэтому для передачи больших мощностей из-за опасности пробоя невозможно использовать коаксиальную ЛП в диапазоне частот короче дециметровых волн (ДМВ).

Структура Т-волны в поперечном и продольном сечениях коаксиальной ЛП показана на рисунке.



Как следует из рисунка, электрическая составляющая ЭМП имеет только радиальную, а магнитная – только азимутальную компоненты в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ :

$$\hat{E}_r = -ik \frac{A}{r} e^{-ikz}, \quad (10.2)$$

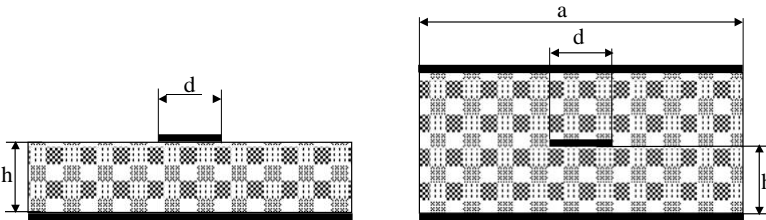
$$\hat{H}_\varphi = -i\omega\epsilon_a \frac{A}{r} e^{-ikz}, \quad (10.3)$$

где  $A$  – некоторая произвольная постоянная, характеризующая амплитуду. Коаксиальные ЛП нашли самое широкое применение в технике связи и РТО для передачи СВЧ-энергии, построения элементов СВЧ-тракта в диапазонах длин волн от декаметровых до дециметровых.



## ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Недостатки коаксиальной ЛП, связанные с высоким уровнем потерь на излучение, а также в диэлектриках внутреннего заполнения с ростом частоты, ограничивают их применение диапазоном дециметровых волн. На дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волнах в последнее время значительное применение получили полосковые ЛП. В большинстве случаев их изготавливают путём нанесения металлических слоёв на диэлектрик с малыми потерями.

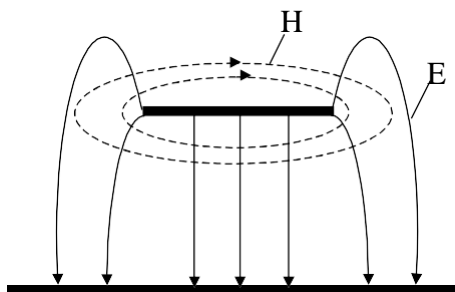


Эти линии являются практически единственно пригодными для применения в интегральных микросхемах (плёночных и полупроводниковых). В этом случае ЛП называют *микроросковыми*. В несимметричной полосковой ЛП имеются два проводника, один из которых представляет собой металлическую полосу (полосок) постоянных размеров, другой – широкую металлическую пластину (подложку). В симметричной полосковой ЛП имеется три проводника. Полосок в большинстве случаев имеет сложную конфигурацию (топологию) и наносится напылением металла сквозь маски либо выполняется фотохимическим способом.

В полосковых ЛП толщина диэлектрика составляет  $h = 1,5 \dots 5$  мм. В большинстве случаев в качестве диэлектрика применяют фторопласт с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2 \dots 7$  и тангенсом угла потерь  $\text{tg}\Delta = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ . В микроросковых ЛП используют более высококачественные твёрдые хрупкие диэлектрики (кварц, ситалл, кремний), для которых  $\epsilon = 2 \dots 7$ ,  $\text{tg}\Delta = 10^{-4}$ . Толщина диэлектрика в микроросковых ЛП  $h = 0,5 \dots 1$  мм.

Полосковые ЛП в основном применяют не для передачи СВЧ-энергии, а для создания сложных разветвлённых конструкций приёмных, реже – передающих СВЧ-трактов. Так как толщина диэлектрика невелика, уровень мощности, передаваемой в полосковой ЛП, не может быть высоким из-за опасности пробоя диэлектрика.

Волновое сопротивление несимметричной ЛП определяется по формуле:  $Z_{\text{ин}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{d}$ .

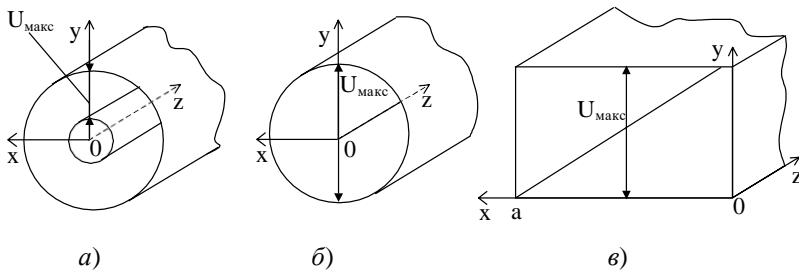


Полосковые линии передачи занимают промежуточное положение между двухпроводными ЛП и волноводами. Можно считать, что в полосковых ЛП распространяется поперечная ЭМВ, хотя наличие твёрдого диэлектрика несколько искажает структуру поля. Такая ЭМВ называется *квазипоперечной*. Её структура в поперечном сечении показана на рисунке.

## ВОЛНОВОДНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Хотя коаксиальные линии передачи широко применяются на СВЧ, но всё же они обладают существенными недостатками, особенно заметными в диапазоне сантиметровых волн.

Эти недостатки можно уменьшить применением *волноводов*, представляющих собой полые металлические трубы различных поперечных сечений, внутри которых распространяются электромагнитные волны. Потери энергии в волноводе меньше, чем в коаксиальной ЛП(*a*), так как в нём нет внутреннего провода и изоляторов. Наибольшее напряжение в волноводе получается между противоположными стенками (при прямоугольном поперечном сечении (*в*)) или диаметрально противоположными точками (если волновод имеет круглое сечение (*б*)). Расстояние между этими точками больше, чем расстояние между внутренним и внешним проводниками коаксиальной ЛП, поэтому опасность пробоя значительно меньше (см. рис.).

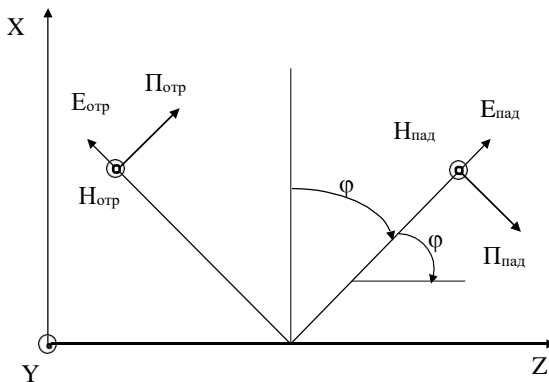


Конструкция волноводов проще, чем коаксиальной ЛП. Исходя из уравнений Максвелла, можно показать, что в полом металлическом волноводе не может существовать Т-волна.

В идеальном случае волновод представляет собой полую трубу из хорошего (идеального) проводника. Будем полагать, что на идеально проводящую плоскость (одна из стенок волновода) под некоторым углом  $\varphi$  падает плоская монохроматическая волна (рис. 13). Предположим, что верхнее полупространство (внутреннее заполнение волновода) – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ .

Вектор суммарного поля будет обладать составляющими, равными суммам составляющих векторов падающей и отражённой волн. В частности, составляющая напряжённости электрического поля вдоль оси Z:

$$\vec{E}_z = (\vec{E}_{\text{пад}} - \vec{E}_{\text{отр}}) \cos \varphi = i2E_0 \cos \varphi e^{-ikz \sin \varphi} \sin(kx \cos \varphi). \quad (10.4)$$



Наличие второго множителя  $e^{-ikz \sin \varphi}$  показывает, что результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль координаты  $Z$  по направлению вдоль продольной оси волновода. Коэффициент распространения зависит от угла падения  $\varphi$ . Будем называть эту постоянную распространения *продольным волновым числом* (*продольным коэффициентом распространения*) и обозначать через  $h$ :

$$h = k \sin \varphi. \quad (10.5)$$

Третий множитель  $\sin(kx \cos \varphi)$  показывает, что поле вдоль поперечной координаты  $x$  изменяется по синусоидальному закону. Амплитуда поля в пределах волнового фронта  $z = \text{const}$  не постоянна, а образует стоячие волны. Скорость изменения амплитуды определяется коэффициентом

$$g = k \cos \varphi, \quad (10.6)$$

который будем называть *поперечным волновым числом* (*поперечным коэффициентом распространения*).

Продольное и поперечное волновые числа связаны соотношением:

$$h^2 + g^2 = k^2. \quad (10.7)$$

Итак, важное свойство направляемых волн заключается в том, что данный волновой процесс является неоднородной волной, распространяющейся вдоль координаты  $Z$ . При этом амплитуда поля вдоль поперечных координат изменяется по закону стоячей волны.

Если поперечную координату ограничить стенкой волновода, например  $x = a$ , то для ограничения стоячей волны стенками волновода необходимо выполнить условие:

$$k a \cos \varphi = m \pi,$$

где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  – индекс типа волны, определяющий количество стоячих полуволн, укладываемых вдоль поперечной координаты  $x$ .

Используя выражение  $k = 2\pi/\lambda$ , получим:

$$\cos \varphi = m \lambda / 2a. \quad (10.8)$$

Действительно, для любого индекса  $m$  при заданном размере  $a$  всегда найдется такая длина волны генератора, называемая *критической длиной волны* данного типа и обозначаемая  $\lambda_{\text{кр}}$ , для которой выполнение условия (10.5, 10.6) возможно лишь при максимальном значении  $\cos \varphi = 1$ , т.е.

$$\lambda_{\text{кр}} = 2a/m. \quad (10.9)$$

Если теперь выбрать значение  $\lambda > \lambda_{кр}$ , граничные условия на стенках волновода не могут быть выполнены для данного типа волны ни при каком значении угла падения  $\varphi$ . Физически это означает невозможность существования колебания данного типа в виде бегущей волны в ЛП.

Таким образом, каждый тип колебаний в волноводе может существовать как бегущая волна в области длин волн

$$\lambda \leq \lambda_{кр}.$$

Волны более длинные, чем  $\lambda_{кр}$ , по волноводу на данном типе колебаний распространяться не могут. Иначе говоря, возможно распространение только тех волн, частота которых выше некоторого нижнего предела, называемого *критической частотой*  $f_{кр}$ .

На основе полученных выражений можно вывести основные соотношения для параметров распространения ЭМВ в волноводах.

Скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты  $Z$  (*фазовая скорость ЭМВ в волноводе*) определяется продольным волновым числом  $h$  и равна

$$v_{ф.в} = \omega/h = \omega/k \sin \varphi = v_{ф}/\sin \varphi; \quad (10.10)$$

$$v_{ф.в} = \frac{v_{ф}}{\sin \varphi} = \frac{v_{ф}}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = \frac{v_{ф}}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}}. \quad (10.11)$$

Фазовая скорость волны в волноводе зависит от частоты ЭМВ, т.е. волновод обладает дисперсией. Эта дисперсия является нормальной, так как с ростом частоты ЭМВ (уменьшением длины волны) фазовая скорость в волноводе уменьшается.

Аналогично находится *длина волны в волноводе*:

$$\lambda_{в} = \frac{v_{ф.в}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{кр}\right)^2}}. \quad (10.12)$$

Длина волны в волноводе превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от типа волны, распространяющейся в волноводе.

*Групповая скорость узкополосного радиосигнала в волноводе* (скорость перемещения максимума огибающей), характеризующая скорость переноса энергии волны по волноводу, определяется:

$$v_{\text{гр.в}} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega}} = v_{\phi} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}. \quad (10.13)$$

Важнейший параметр волноводной ЛП – *волновое (характеристическое) сопротивление*. Оно зависит от типа ЭМВ в волноводе и для волн Н- и Е-типов определяется соответственно:

$$Z_{\text{вН}} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}; \quad (10.14)$$

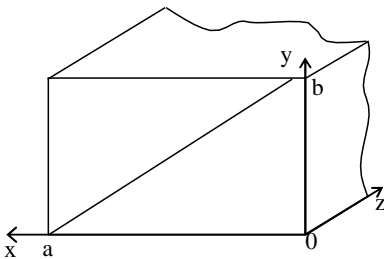
$$Z_{\text{вЕ}} = Z_c \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}, \quad (10.15)$$

где  $Z_c$  – волновое сопротивление среды, являющейся внутренним заполнением волновода.

Таким образом, в полном металлическом волноводе распространяются волны не любых частот, а только превышающих некоторую критическую. Это основной недостаток волноводных ЛП.

## 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Наибольшее распространение на практике для передачи электромагнитной энергии в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн получили прямоугольные волноводы. При решении уравнений, описывающих ЭМВ в прямоугольном волноводе, считаем, что вдоль оси  $z$  волновод не ограничен по длине, удельная электрическая проводимость стенок  $\gamma = \infty$ . Среда, заполняющая волновод – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ . В поперечном сечении геометрические



размеры волновода ограничены: размер широкой стенки волновода обозначим  $a$ , узкой –  $b$ . Считаем, что внутри волновода отсутствуют источники поля ( $\rho = 0, j = 0$ ).

Задача нахождения электромагнитного поля в волноводе сводится к решению уравнений Максвелла в области, свободной от источников:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = i\omega \epsilon_a \vec{E}, \\ \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H} \end{cases} \quad (11.1)$$

при  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  и следующих граничных условиях:

$$E_z = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x = 0, x = a, \\ y = 0, y = b. \end{cases} \quad (11.2)$$

Поскольку осью распространения является ось  $z$ , комплексная амплитуда любой составляющей электромагнитного поля может быть записана в виде:

$$\vec{A}(x, y, z) = A_0(x, y)e^{-ihz}, \quad (11.3)$$

т.е.  $\vec{E}(x, y, z) = E_0(x, y)e^{-ihz}$ ,  $\vec{H}(x, y, z) = H_0(x, y)e^{-ihz}$ . Здесь  $E_0(x, y)$ ,  $H_0(x, y)$  – вещественные функции, описывающие поле в поперечном сечении волновода.

Выполним операцию  $\text{rot}$  от первого уравнения (11.1).

$$\text{rot} H = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Получим уравнения связи, образующие систему, в которой поперечные компоненты ЭМП в прямоугольном волноводе выражены через продольные:

$$\begin{cases} -i \left( \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x} \right) \\ \left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{g^2} \left( h \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{1}{g^2} \left( h \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x} \right) \\ \vec{H}_x &= \frac{1}{g^2} \left( \omega \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} - h \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \right) \\ \vec{H}_y &= \frac{1}{g^2} \left( \omega \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} + h \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Для нахождения поперечных компонент ЭМП согласно (11.4) необходимо определить продольные компоненты  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$ , удовлетворяющие уравнениям типа Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_z = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (11.5)$$

Из (11.5) следует, что продольные составляющие электрического и магнитного полей не связаны между собой. Рассмотрим решения отдельно для магнитных ( $H$ ) и электрических ( $E$ ) волн.

### H-ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Волна типа  $H$  характеризуется тем, что здесь магнитное поле имеет продольную составляющую  $\dot{H}_z$ , в то время как электрическое поле поперечно, т.е.  $\dot{E}_z = 0$ . Тогда из уравнений (11.4) все поперечные компоненты электромагнитного поля могут быть выражены через составляющую  $\dot{H}_z$ :

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \frac{-i\omega\mu_a}{g} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y = \frac{i\omega\mu_a}{g} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{H}_x = \frac{-ih}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{H}_y = \frac{-ih}{g} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \end{cases} \quad (11.6)$$

Для решения системы (11.6) необходимо решить волновое уравнение Гельмгольца для продольной компоненты магнитного поля (11.5).

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями (11.2), образуя *граничную (краевую) задачу*. Рассмотрим аналитический метод её решения. Для записи граничных условий необходимо использовать компоненты  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\ \dot{E}_x = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{cases}$$



Формулы связи (11.6) позволяют записать данные условия через продольную компоненту  $\dot{H}_z$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{cases} \quad (11.7)$$

Таким образом, исследование распространения волн  $H$ -типа в прямоугольном волноводе сводится к решению краевой задачи (11.5) – (11.7). Рассматриваемая задача решается *методом разделения переменных (метод Фурье)*. При этом методе решение краевой задачи ищется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной из поперечных координат:

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y). \quad (11.8)$$

Подставляя (11.8) в (11.5), будем иметь:

$$X''Y + XY'' + g^2XY = 0. \quad (11.9)$$

Здесь двумя штрихами обозначена операция взятия второй производной. Делим почленно (11.9) на правую часть (11.8), получаем:

$$X''/X + Y''/Y = -g^2. \quad (11.10)$$

В левой части равенства (11.10) стоят две функции, каждая из которых зависит только от координаты  $x$  или  $y$ . Для того, чтобы оно было тождеством при любых  $x$  и  $y$ , необходимо, чтобы каждое из слагаемых было также равно постоянной величине:

$$X''/X = -g_x^2, \quad (11.11)$$

$$Y''/Y = -g_y^2, \quad (11.12)$$

где  $g_x, g_y$  – неизвестные числа, удовлетворяющие соотношению

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (11.13)$$

В результате применения метода разделения переменных вместо одного дифференциального уравнения в частных производных получаются два уравнения в обыкновенных производных с постоянными коэффициентами, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$X'' + g_x^2X = 0, \quad (11.14)$$

$$Y'' + g_y^2Y = 0. \quad (11.15)$$

Общие решения уравнений (11.14), (11.15) известны из курса высшей математики и могут быть представлены в форме:

$$X(x) = A\sin(g_x x) + B\cos(g_x x), \quad (11.16)$$

$$Y(y) = C\sin(g_y y) + D\cos(g_y y), \quad (11.17)$$

откуда

$$\dot{H}_z = [A\sin(g_x x) + B\cos(g_x x)][C\sin(g_y y) + D\cos(g_y y)]e^{-ihz}. \quad (11.18)$$

Граничные условия (11.7) выполняются в случае равенства нулю производных:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = [Ag_x \cos(g_x x) - Bg_x \sin(g_x x)][C\sin(g_y y) + D\cos(g_y y)]e^{-ihz},$$

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = [A\sin(g_x x) + B\cos(g_x x)][Cg_y \cos(g_y y) - Dg_y \sin(g_y y)]e^{-ihz}.$$

Условия (11.7) при  $x = 0$ ,  $y = 0$  могут быть выполнены, если  $A = 0$ ,  $C = 0$ . При  $x = a$ ,  $y = b$

$$Bg_x \sin(g_x a) = 0,$$

$$Dg_y \sin(g_y b) = 0.$$

Из первого условия  $\sin(g_x a) = 0$ ; из второго условия  $\sin(g_y b) = 0$ .

Отсюда можно найти постоянные  $g_x$  и  $g_y$ :

$$g_x = m\pi/a, \quad g_y = n\pi/b. \quad (11.19)$$

Здесь  $m$  и  $n$  – натуральные числа:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

Поперечное волновое число  $g$  найдём из (11.13):

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (11.20)$$

Так как  $A = 0$ ,  $C = 0$ , обозначив  $BD = H_0$ , перепишем (11.18):

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}. \quad (11.21)$$

Имея решение волнового уравнения (11.21) для продольной компоненты магнитного поля, из системы уравнений (11.6) получим все компоненты электрического и магнитного полей для Н-волн в прямоугольном волноводе:

$$\begin{cases}
\dot{E}_x = \frac{i\omega\mu_a H_0 n\pi}{g^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\
\dot{E}_y = \frac{-i\omega\mu_a H_0 m\pi}{g^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\
\dot{E}_z = 0, \\
\dot{H}_x = \frac{ihH_0 m\pi}{g^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\
\dot{H}_y = \frac{ihH_0 n\pi}{g^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\
\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}.
\end{cases} \quad (11.22)$$

Анализ системы уравнений, описывающей мгновенные значения составляющих  $H$ -волн в прямоугольном волноводе, позволяет сделать следующие выводы:

– наличие тригонометрических множителей говорит об образовании стоячих волн в плоскости поперечного сечения волновода. При этом число равно числу полуволн, укладываемых вдоль широкой стенки волновода (по  $m$  – размеру  $a$ ),  $n$  – число полуволн, укладываемых вдоль узкой стенки волновода (по размеру  $b$ );

– так как  $m$  и  $n$  – любые целые положительные числа, то это означает, что в прямоугольном волноводе может существовать бесчисленное множество волн типа  $H$ , определяемых значениями  $m$  и  $n$  и обозначаемых символом  $H_{mn}$ . Числа  $m$  и  $n$  характеризуют степень сложности электромагнитного поля: чем больше  $m$  и  $n$ , тем сложнее поле в волноводе;

– из равенств (11.22) видно, что при одновременном обращении в нуль индексов  $m$  и  $n$  ( $m = 0$ ,  $n = 0$ ) все поперечные составляющие оказываются равными нулю. Следовательно, волна  $H_{00}$  не существует. Если один из индексов  $m$  или  $n$  обращается в нуль, то только часть поперечных составляющих в (11.22) обращается в нуль. Низшими типами волн являются  $H_{10}$  и  $H_{01}$ ;

– множитель  $e^{-ihz}$  определяет изменение амплитуды и фазы волны при её распространении вдоль волновода. Если  $h$  – величина мнимая, то функция  $e^{-ihz}$  убывающая и, следовательно, волна не распространяется (затухает) вдоль оси  $z$ . Если  $h$  – величина действительная,

то модуль функции  $e^{-ihz}$  равен единице и, следовательно, волна распространяется вдоль оси  $z$  волновода без затухания.

Рассмотренный метод решения краевой задачи относится к аналитическим и является достаточно сложным даже для волновода простейшего поперечного сечения. На практике широко применяют численные методы решения различных краевых задач, например для волноводов сложных ( $H$ ,  $T$  – образных поперечных сечений), в основном с применением ЭВМ.

### E-ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Для электрических волн  $E \dot{E}_z \neq 0$ ,  $\dot{H}_z = 0$ . При этих условиях поперечные составляющие полей (11.4) будут иметь связь с продольной составляющей  $\dot{E}_z$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = \frac{-ih}{g} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \\ \dot{E}_y = \frac{g^2}{-ih} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{H}_x = \frac{g^2}{g^2 a} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{H}_y = \frac{-i\omega \epsilon_a}{g} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (11.23)$$

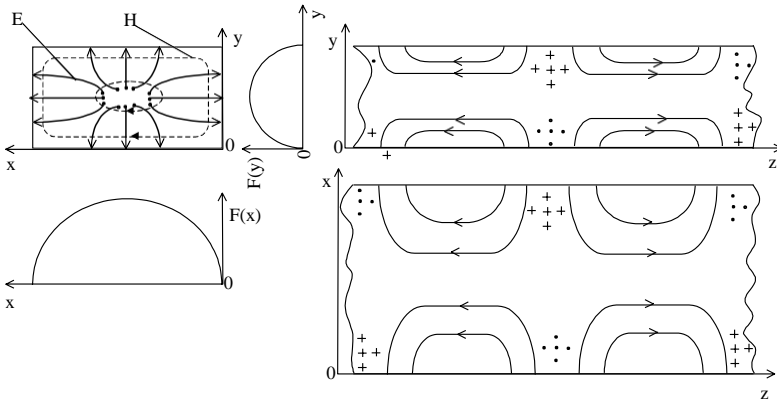
Поскольку  $\dot{E}_z \neq 0$ , можно использовать граничное условие для тангенциальной составляющей напряжённости электрического поля:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_z = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\ \dot{E}_z = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{array} \right. \quad (11.24)$$

Решение уравнений связи аналогично  $H$ -волнам.

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \frac{-ih\mu_a H_0 m\pi}{g^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_y = \frac{-ihH_0 n\pi}{g^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z = H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_x = \frac{i\omega\epsilon_a H_0 n\pi}{g^2} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_y = \frac{-i\omega\epsilon_a H_0 m\pi}{g^2} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_z = 0. \end{cases}$$

Если хотя бы один из индексов  $m$  или  $n$  равен нулю, все поперечные компоненты напряженности электрического и магнитного полей обращаются в нуль. Иначе говоря, в прямоугольном волноводе не могут существовать волны типа  $E_{00}$ ,  $E_{m0}$ ,  $E_{0n}$ . Низшим типом  $E$ -волн в прямоугольном волноводе является волна  $E_{11}$ . (см. рис.).



Волны типа  $E$  в прямоугольных волноводах для передачи энергии практически не используются. Они нашли применение в облучателях антенных систем.

$E$ -волны высших типов – это все типы волн, кроме  $E_{11}$ .

## КРИТИЧЕСКАЯ ЧАСТОТА И КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Так как  $h = \sqrt{k^2 - g^2}$ , то, подставив выражения для коэффициента распространения  $k$  и поперечного коэффициента распространения  $g$ , определяемого (11.20), получим

$$h = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}.$$

Выражение для  $h$  может быть положительным при

$$\omega^2 \varepsilon_a \mu_a > [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2].$$

При  $h = 0$ ,  $\omega^2 \varepsilon_a \mu_a = [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]$ , можно определить минимальную частоту электромагнитной волны, распространяющейся в волноводе, т.е. критическую частоту для прямоугольного волновода:

$$f_{\text{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (11.25)$$

Критическая частота для прямоугольного волновода зависит от геометрических размеров волновода ( $a$  и  $b$ ), типа волны ( $m$  и  $n$ ) и параметров внутреннего заполнения волновода ( $\varepsilon_a$ ,  $\mu_a$ ). Условие прохождения волны в волноводе можно записать в виде

$$f > f_{\text{кр}}.$$

Критическая длина волны определяется как

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{ф}}}{f_{\text{кр}}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (11.26)$$

Тогда условием распространения волны в волноводе будет  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ .

Таким образом, **в полом металлическом волноводе распространяются волны не любых частот, а только превышающих некоторую критическую**. Это основной недостаток волноводных ЛП.

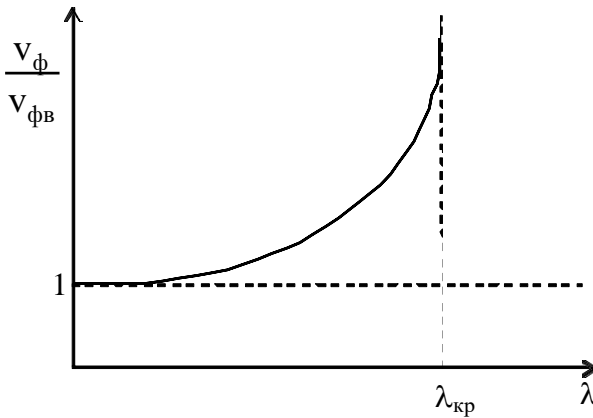
## ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты  $z$  (*фазовая скорость ЭМВ в волноводе*) определяется продольным волновым числом  $h$ .

Знание критической длины волны позволяет для конкретной длины волны генератора определить фазовую скорость на любом типе колебаний:

$$v_{\text{ф.в}} = \frac{v_{\text{ф}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \quad (11.27)$$

Фазовая скорость волны в волноводе зависит от частоты ЭМВ, т.е. волновод обладает дисперсией. Эта дисперсия является нормальной, так как с ростом частоты ЭМВ (уменьшением длины волны) фазовая скорость в волноводе уменьшается.



Аналогично находится *длина волны в волноводе*:

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{v_{\text{ф.в}}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \quad (11.28)$$

Длина волны в волноводе превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от типа волны, распространяющейся в волноводе.

**Групповая скорость узкополосного радиосигнала в волноводе** (скорость перемещения максимума огибающей), характеризующая скорость переноса энергии волны по волноводу, определяется:

$$v_{\text{гр.в}} = \frac{d\omega}{dh} = \frac{1}{\frac{dh}{d\omega}}.$$

$$\text{Используя } h = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{\text{кр}})^2}}{\lambda}, \text{ получим}$$

$$v_{\text{гр.в}} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda}} = v_{\text{ф}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \quad (11.29)$$

Согласно формуле (11.29) можно сделать следующие выводы:

- групповая скорость волн в волноводе всегда меньше фазовой скорости и меньше скорости света;
- фазовая и групповая скорости связаны соотношением  $v_{\text{ф.в}} v_{\text{гр.в}} = v_{\text{ф}}^2$ ;
- групповая скорость сигналов, средняя частота которых стремится к критической частоте данного типа колебаний, стремится к нулю; при повышении средней частоты групповая скорость увеличивается, причём верхним пределом групповой скорости при  $\lambda \rightarrow 0$  является  $v_{\text{гр.в}} = c$  (для вакуумного заполнения волновода).

Важнейший параметр волноводной ЛП – *волновое (характеристическое) сопротивление*. Оно зависит от типа ЭМВ в волноводе и для волн *H*- и *E*-типов определяется соответственно:

$$Z_{\text{вH}} = \frac{Z_{\text{с}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}; \quad (11.30)$$

$$Z_{\text{вE}} = Z_{\text{с}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \quad (11.31)$$

где  $Z_{\text{с}}$  – волновое сопротивление среды, являющейся внутренним заполнением волновода.

Таким образом, параметры распространения волн в волноводе зависят от геометрических размеров волновода, параметров его внутреннего заполнения и типа волны.

## ВОЛНА $H_{10}$ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

*Основной волной* в волноводе является волна, имеющая наименьшую критическую частоту или наибольшую критическую длину волны. При фиксированной частоте электромагнитных колебаний и заданных параметрах внутреннего заполнения волновода основной тип волны требует для передачи волны волновода наименьшего попереч-



ного сечения. Из выражений (11.25), (11.26) следует, что основной волной в прямоугольном волноводе является волна  $H_{10}$ .

Критическая длина волны основного типа в прямоугольном волноводе согласно выражению (11.26) составляет  $\lambda_{кр} = 2a$  и не зависит от высоты прямоугольного волновода.

Критическая частота (11.25) для волны  $H_{10}$  определяется как

$$f_{кр} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}.$$

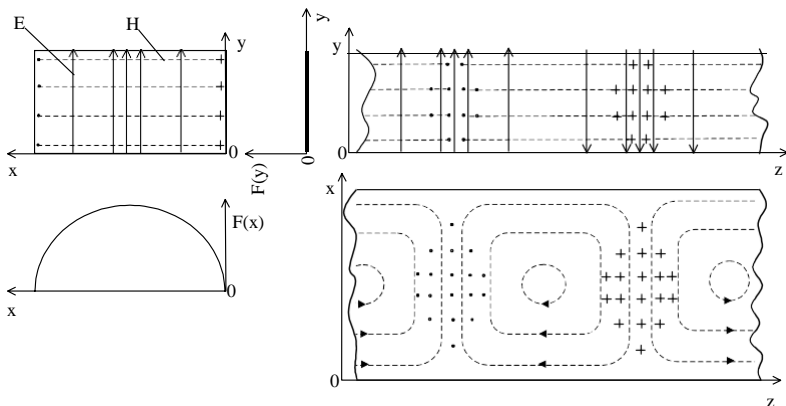
Подставляя в систему (11.22) индексы  $m = 1$  и  $n = 0$ , получим систему уравнений, описывающих составляющие поля волны  $H_{10}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_x = 0, \\ \dot{E}_y = \frac{-i\omega\mu_a H_0 \pi}{2a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_x = \frac{0}{g^2} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{ihz}, \\ \dot{H}_y = 0, \\ \dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}. \end{array} \right. \quad (11.32)$$

На основе системы уравнений (11.32) можно построить мгновенную структуру поля в виде распределения силовых линий по сечениям волновода.

Графическое изображение структуры всех типов волн строится на основе:

- количества стоячих полувольт, укладываемых вдоль соответствующих координат;
- перпендикулярности силовых линий напряжённости электрического и магнитного полей;
- граничных условий у поверхности идеального проводника для векторов напряжённости электрического и магнитного полей;
- изменения направлений силовых линий электрического и магнитного полей через половину длины волны.



Анализ системы уравнений (11.32) и рисунка позволяет сделать следующие выводы:

- вдоль широкой стенки волновода  $a$  укладывается одна стоячая полуволна электрического поля с максимумом при  $x = a/2$ ;
- вдоль узкой стенки волновода (по координате  $y$ ) изменений поля нет. Высота прямоугольного волновода не влияет на структуру поля волны  $H_{10}$ . Она выбирается исходя из требования распространения в волноводе только волны  $H_{10}$ , получения малых потерь в реальном волноводе, а также исключения электрического пробоя между его верхней и нижней стенками;

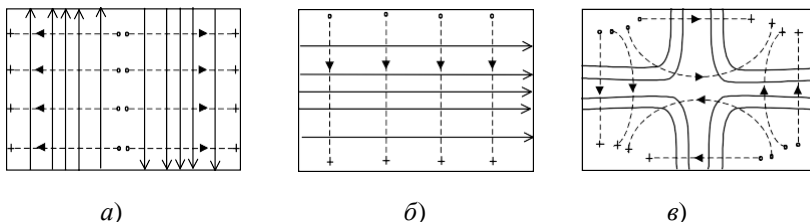
– замкнутые силовые линии магнитного поля лежат в плоскости  $XOZ$ , так как  $H_y = 0$ . Между составляющими  $H_x$  и  $H_z$  имеется сдвиг фаз на  $\pi/2$ . Иными словами, в сечении волновода, где  $H_x$  достигает максимума, проекция  $H_z$  в этот момент времени равна нулю. Составляющая  $H_x$  равна нулю на боковых стенках волновода ( $x = 0$  и  $x = a$ ) и достигает максимума при  $x = a/2$ . Составляющая  $H_z$  максимальна на боковых стенках волновода и равна нулю в середине волновода.

Изображённая картина поля волны в волноводе перемещается вдоль него с фазовой скоростью в волноводе.

Волна  $H_{10}$  нашла широкое применение на практике для передачи электромагнитной энергии в сантиметровом диапазоне. В технике РТО это посадочные радиолокаторы РСП, микроволновые системы посадки типа МСП.

**H-волны высших типов.** Все неосновные типы колебаний называются волнами высших типов. В случае передачи электромагнитной энергии в волноводе волной  $H_{10}$  колебания являются паразитными и принимаются специальные меры борьбы с ними.

В некоторых случаях высшие типы волн применяют в облучателях различных антенных систем техники связи и РТО для создания заданного распределения поля по раскрытию апертурной антенны. Из  $H$ -волн широкое применение нашли волны  $H_{20}$ ,  $H_{01}$  и  $H_{11}$ . Для получения уравнений, описывающих поле этих типов, необходимо в уравнения (11.22) подставить соответствующие индексы  $m$  и  $n$ . Ниже приведены структуры полей  $H_{20}(a)$ ,  $H_{01}(б)$  и  $H_{11}(в)$  в поперечном сечении.



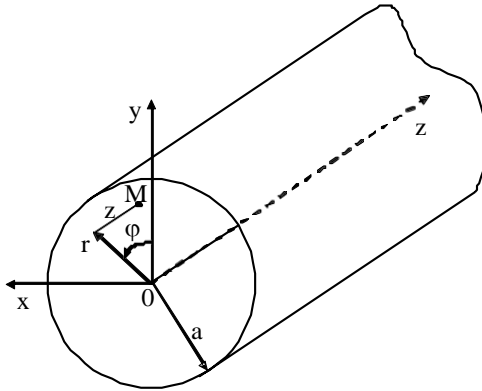
Структура поля волны высшего типа в поперечном сечении волновода получается из основной путем  $m$ - и  $n$ -кратного повторения последней по соответствующей координате. При каждом очередном повторении направления силовых линий электрического и магнитного полей изменяются на обратные. Эти типы волн широко применяются в антенной технике (распределение поля в облучателях).

## 12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

### КРУГЛЫЙ ВОЛНОВОД. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Круглый металлический волновод представляет собой полую металлическую трубу с внутренним радиусом  $a$ , бесконечно протяжённую вдоль оси  $z$ . При описании поля в круглом волноводе удобно использовать цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , так как стенки волновода совпадают с координатной поверхностью  $r = a$ . Уравнения Максвелла для волновода в цилиндрической системе координат принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1 \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial r} = i\omega \varepsilon \dot{E}_z, \\
 r \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = i\omega \varepsilon_a \dot{E}_r, \\
 \frac{\partial \dot{H}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial \varphi} = i\omega \varepsilon_a \dot{E}_z, \\
 1 \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial r} = -i\omega \mu_a \dot{H}_r, \\
 \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} = -i\omega \mu_a \dot{H}_\varphi, \\
 \frac{\partial \dot{E}_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_r}{\partial \varphi} = -i\omega \mu_a \dot{H}_z.
 \end{array} \right. \quad (12.1)$$



Комплексные амплитуды напряжённостей электрического и магнитного полей запишутся в виде:

$$\dot{E}(r, \varphi, z) = E_0(r, \varphi) e^{-ihz}, \quad \dot{H}(r, \varphi, z) = H_0(r, \varphi) e^{-ihz}.$$

Уравнения связи поперечных с продольными компонентами поля для круглого волновода можно получить тем же способом, что и для прямоугольного:

$$\left( \begin{array}{l}
 \& -i \left( \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} \right) \\
 E_r = \frac{1}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} + r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} \right) \\
 E_\varphi = \frac{1}{g^2} \left( \frac{\omega \mu_a}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - \frac{\omega \mu_a}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} \right) \\
 H_r = \frac{1}{g^2} \left( \frac{a}{a} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} \right) \\
 \& -i \left( \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial z} \right) \\
 H_\varphi = \frac{1}{g^2} \left( \omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial r} + r \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \right)
 \end{array} \right) \quad (12.2)$$

Анализ уравнений (12.2) показывает возможность существования колебаний типов  $E$  и  $H$  в отдельности. Для их исследования необходимо решить уравнения Гельмгольца для  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$ :

$$\nabla^2 \dot{E}_z + g^2 \dot{E}_z = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{H}_z + g^2 \dot{H}_z = 0,$$

которые в цилиндрической системе координат принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_z = 0, \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (12.4)$$

Однозначное решение этих уравнений возможно лишь при дополнении их граничными условиями на стенках волновода при  $r = a$ .

Рассмотренная задача также относится к граничным (краевым задачам).

### РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ. $E$ -ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, КРИТИЧЕСКАЯ ДЛИНА ВОЛНЫ И ЧАСТОТА ДЛЯ $E$ -ВОЛН

Для получения всех составляющих электромагнитного поля в волноводе необходимо решить уравнение (12.3) и подставить это решение в систему уравнений (12.2), учитывая  $\dot{H}_z = 0$ ,  $\dot{E}_z \neq 0$ . Граничные условия для уравнения (12.3) должны обеспечивать обращение в

нуль тангенциальных составляющих вектора напряжённости электрического поля на стенках волновода. Компонента  $\dot{E}_r$  всегда нормальна к поверхности волновода, поэтому необходимо потребовать для  $E$ -волн

$$\dot{E}_z = 0 \Big|_{r=a}. \quad (12.5)$$

Граничную (краевую) задачу – уравнение (12.3) при заданных граничных условиях будем решать методом разделения переменных. Положим, что

$$\begin{aligned} \dot{E}_z(r, \varphi) &= R(r)\Phi(\varphi), \quad (12.6) \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + g^2 \dot{E}_z &= 0, \end{aligned}$$

где  $R(r)$ ,  $\Phi(\varphi)$  – неизвестные функции только от  $r$  и  $\varphi$  соответственно. Подставляя (12.6) в (12.3), будем иметь

$$\Phi R'' + \Phi R'/r + R\Phi''/r^2 + g^2 R\Phi = 0.$$

После преобразования, поделив левую и правую части на  $R\Phi$ , получим

$$r^2 R''/R + rR'/R + g^2 r^2 = -\Phi''/\Phi. \quad (12.7)$$

Обе части (12.7) могут быть равны друг другу при любых независимых  $r$  и  $\varphi$ , если каждая из них равна постоянной величине, например  $m^2$ :

$$-\Phi''/\Phi = m^2, \quad (12.8)$$

$$r^2 R''/R + rR'/R + g^2 r^2 = -m^2. \quad (12.9)$$

Решение уравнения (12.8) имеет вид

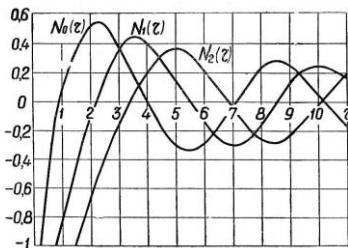
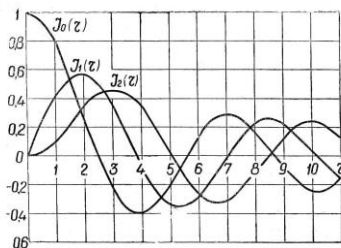
$$\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\sin(m\varphi),$$

где  $A$ ,  $B$  – произвольные постоянные. Чтобы выполнялось физически очевидное требование периодичности решения по углу  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , решение должно быть чётной функцией и  $m$  – натуральным числом ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ ), т.е.

$$\Phi(\varphi) = A\cos(m\varphi). \quad (12.10)$$

Решение (12.10) описывает меридиональное распределение поля (вдоль стенок волновода). Рассмотрим левую часть уравнения (12.7):

$$R' + \frac{1}{r} R' + \left( g^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (12.11)$$



Уравнение (12.11) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами. Оно хорошо изучено в математической физике и носит название уравнения Бесселя. Решение (12.11) имеет вид:

$$R(r) = C_1 J_m(gr) + C_2 N_m(gr),$$

где  $C_1, C_2$  – некоторые произвольные постоянные;  $J_m(gr)$  – функция Бесселя или цилиндрическая функция первого рода  $m$ -го порядка;  $N_m(gr)$  – функция Неймана или цилиндрическая функция второго рода  $m$ -го порядка.

Вблизи начала координат функция Неймана неограниченно велика:

$$\lim_{r \rightarrow 0} N_m(gr) = -\infty,$$

поскольку бесконечно высоких напряжённости полей вблизи оси волновода физически быть не может, примем  $C_2 = 0$  для круглых волноводов, поэтому

$$R(r) = C_1 J_m(gr). \quad (12.12)$$

Функции Бесселя в цилиндрической системе координат играет ту же роль, что и гармонические функции в прямоугольной декартовой системе. Иными словами, функция Бесселя  $m$ -го порядка описывает радиальное распределение поля от оси до стенок волновода.

Окончательно, обозначив произведение  $AC_1 = E_0$ , комплексная амплитуда продольной составляющей  $\dot{E}_z$  будет иметь вид:

$$\dot{E}_z = E_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-ihz}.$$

Чтобы найти поперечное волновое число  $g$ , используем граничное условие (12.5). Оно будет выполнено, если поперечные волновые числа при  $r = a$  принадлежат бесконечной дискретной последовательности  $ga = x_{mm}$ , откуда

$$g = x_{mn}/a, \quad (12.13)$$

где  $x_{mn}$  – абсциссы  $n$ -го пересечения графиком функций Бесселя  $m$ -го порядка оси абсцисс, называемые корнями функции Бесселя. Поскольку индекс  $n$  обозначает порядковый номер пересечения, он не может быть равен нулю, т.е.  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ . Для справочных целей приведём ниже в таблице некоторые начальные значения корней функций Бесселя.

Тогда

$$E_z = E_0 J_m \left| \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \right| \cos(m\varphi) e^{-ihz}. \quad (12.14)$$

Поперечные составляющие полей для любой волны типа  $E_{mn}$  легко находятся из системы уравнений (12.2) при  $\dot{H}_z = 0$ . Таким образом система уравнений, описывающая поле  $E$ -волн в круглом волноводе, примет вид:

$$\begin{cases} \dot{E}_r = -ihaE_0 J'_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_\varphi = ihE_0 \left( \frac{x_{mn}}{a} \right) \frac{1}{r} J_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z = E_0 J_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_r = -i\omega \epsilon_a E_0 \left( \frac{x_{mn}}{a} \right) \frac{m}{r} J_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_\varphi = -i\omega \epsilon_a E_0 \frac{1}{x_{mn}} J'_m \left( \frac{x_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_z = 0. \end{cases} \quad (12.15)$$

$m$	Корни $x_{mn}$ функций Бесселя		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0	2,405	5,520	8,654
1	3,832	7,016	10,173
2	5,136	8,417	11,620
3	6,380	9,761	13,015



Наличие тригонометрических и бесселевых функций свидетельствует об образовании стоячих волн в поперечном сечении волновода. Физический смысл индексов  $m$  и  $n$  очень прост. Первый индекс  $m$  означает число полуволн стоячей волны, укладываемых по угловой координате  $\varphi$  вдоль полуокружности поперечного сечения волновода. Второй индекс типа поля  $n$  – число полуволн стоячей волны, укладываемых по радиальной координате  $r$  вдоль радиуса волновода (от оси волновода до его стенки). Как и в прямоугольном, в круглом волноводе волна тем сложнее, чем больше значения  $m$  и  $n$ .

Критические частота и длина волны находятся на основании того же самого принципа, что и в прямоугольном волноводе. Распространение волны в волноводе происходит при положительных  $h$ :  $h = \sqrt{k^2 - g^2}$ , подставляя (12.13), получим  $h = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - (x_{mn}/a)^2}$ . Выражение для  $h$  может быть положительным при  $\omega^2 \varepsilon_a \mu_a > (x_{mn}/a)^2$ . При  $h = 0$ ,  $\omega^2 \varepsilon_a \mu_a = (x_{mn}/a)^2$ , отсюда можно определить минимальную частоту ЭМВ, распространяющейся в волноводе, т.е. критическую частоту для  $E$ -волн в круглом волноводе:

$$f_{\text{кр}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \frac{x_{mn}}{a}. \quad (12.16)$$

Критическая длина волны определяется как

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v_{\text{ф}}}{f_{\text{кр}}} = \frac{2\pi a}{x_{mn}}. \quad (12.17)$$

Параметры распространения волн в круглом волноводе находятся аналогично прямоугольному волноводу:

$$v_{\text{ф.в}} = \frac{v_{\text{ф}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}; \quad \lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}};$$

$$v_{\text{гр.в}} = v_{\text{ф}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2};$$

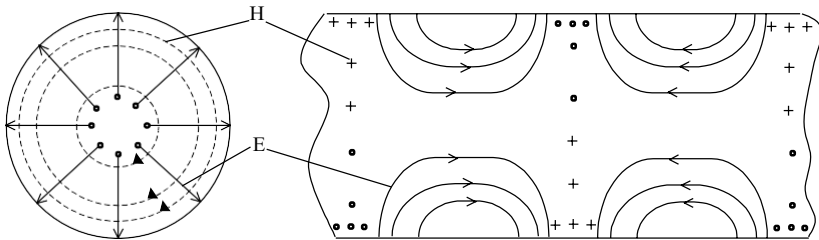
$$Z_{\text{в.Е}} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

## ВОЛНА $E_{01}$ . $E$ -ВОЛНЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Из  $E$ -волн простейшей (нижнего типа) является волна  $E_{01}$ . Из  $E$ -волн она имеет наименьшую критическую частоту или наибольшую критическую длину волны. Для получения уравнений, описывающих её структуру, в формулы (12.15) необходимо подставить  $n = 1$ ,  $x_{01} = 2,405$ . Критическая длина волны  $E_{01}$  определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{2,405} \approx 2,615a .$$

Картина силовых линий ЭМП волны  $E_{01}$  в круглом волноводе изображена на рисунке.



Анализ структуры электромагнитного поля колебания типа  $E_{01}$  показывает, что волна обладает осевой симметрией. Вследствие этого она нашла широкое применение во вращающихся сочленениях, например при механическом сканировании антенн, когда требуется поворот одних частей волноводного тракта относительно других. Структура поля может быть получена непрерывной деформацией структуры типа  $E_{11}$  в прямоугольном волноводе, поэтому в плавных волноводных переходах с круглого на прямоугольный волноводы эти типы волн переходят друг в друга.

Высшими типами  $E$ -волн являются другие колебания, имеющие индексы  $m > 0$ ,  $n \geq 1$ . Для определения критических длин волн этих колебаний необходимо использовать выражение (12.17). Ближайшей волной высшего типа является  $E_{11}$ . Критическая длина волны этого типа определяется как

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{3,832} .$$

Эта волна является несимметричной и во вращающихся сочленениях не используется.

## РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ. $H$ -ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, КРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТОТА И ДЛИНА $H$ -ВОЛНЫ

Для  $H$ -волн:  $\dot{H}_z \neq 0$ ,  $\dot{E}_z = 0$ . Граничные условия для уравнения (12.3) должны обеспечивать обращение в нуль тангенциальных составляющих вектора напряжённости электрического поля на стенках волновода. В случае волн  $H$ -типа электрическое поле имеет только поперечные составляющие, из которых только составляющая  $\dot{E}_\varphi$  касательна к стенкам волновода, поэтому необходимо потребовать для  $E$ -волн

$$\dot{E}_\varphi = 0 \Big|_{r=a}.$$

Поскольку из (12.2)

$$\dot{E}_\varphi = \frac{i\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r},$$

граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (12.18)$$

Граничная (краевая) задача – уравнение (12.4) решается аналогично  $E$ -волнам методом разделения переменных при заданных граничных условиях. Его решение, т.е. комплексная амплитуда продольной составляющей  $\dot{H}_z$  будет иметь вид:

$$\dot{H}_z = H_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-ihz}. \quad (12.19)$$

Чтобы найти поперечное волновое число  $g$ , используем граничное условие (12.18). Вычислим частную производную

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} = H_0 \frac{dJ_m(gr)}{dr} \cos(m\varphi) e^{-ihz}.$$

Граничные условия (12.18) будут тождественно выполнены, если

$$\frac{dJ_m(gr)}{dr} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (12.20)$$

Равенство (12.20), рассматриваемое как уравнение относительно  $gr$ , имеет бесконечное число корней, обозначаемых как  $\xi_{mn}$ . Значения

$\xi_{mn}$ , при которых производные функций Бесселя обращаются в нуль, называются корнями производных функций Бесселя. Наиболее часто применяющиеся значения  $\xi_{mn}$  приведены ниже в таблице. Таким образом, краевая задача, описывающая распространение волн магнитного типа, имеет бесконечное множество решений, причём для каждого из этих решений

$$g_{mn}a = \xi_{mn},$$

откуда

$$g_{mn} = \xi_{mn}/a. \quad (12.21)$$

Поперечные компоненты полей  $H$ -волн находятся на основании формул перехода (12.2). Полная система уравнений, описывающая составляющие  $H$ -волн в круглом волноводе, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_r = -iH_0\omega\mu_a \frac{m}{\xi_{mn}} \left( \frac{a}{\xi_{mn}} \right)^2 J_m \left( \frac{\xi_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \& \dot{E}_\varphi = -iH_0\omega\mu_a \frac{J'_m \left( \frac{\xi_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}}{a \xi_{mn}}, \\ \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_r = -ihH_0 \frac{J'_m \left( \frac{\xi_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}}{a \xi_{mn}}, \\ \& \dot{H}_\varphi = -ihH_0 \frac{\xi_{mn}}{a} \left( \frac{a}{\xi_{mn}} \right)^2 J'_m \left( \frac{\xi_{mn}}{a} r \right) \sin(m\varphi) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_z = H_0 \frac{J_m \left( \frac{\xi_{mn}}{a} r \right) \cos(m\varphi) e^{-ihz}}{a \xi_{mn}}. \end{array} \right. \quad (12.22)$$

$m$	Корни $\xi_{mn}$ производных функций Бесселя		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
0	3,832	7,016	10,173
1	1,841	5,332	8,570
2	3,054	6,705	9,970
3	4,201	8,015	11,340

Критические частота и длина  $H$ -волны находятся на основании того же самого принципа, что и для  $E$ -волн в круглом волноводе. Распространение волны в волноводе происходит при положительных  $h$ :  $h = \sqrt{k^2 - g^2}$ , подставляя (12.13), получим  $h = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - (\xi_{mn}/a)^2}$ . Выражение для  $h$  может быть положительным при  $\omega^2 \varepsilon_a \mu_a > (\xi_{mn}/a)^2$ . При  $h = 0$ ,  $\omega^2 \varepsilon_a \mu_a = (\xi_{mn}/a)^2$ , отсюда можно определить минимальную частоту ЭМВ, распространяющейся в волноводе, т.е. критическую частоту для  $H$ -волн в круглом волноводе:

$$f_{\text{кр}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \frac{\xi_{mn}}{a}. \quad (12.23)$$

Критическая длина волны определяется как

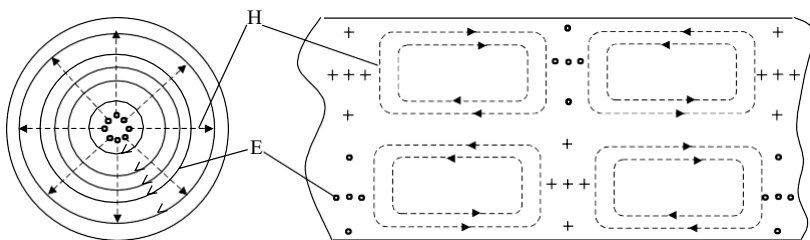
$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v_{\phi}}{f_{\text{кр}}} = \frac{2\pi a}{\xi_{mn}}. \quad (12.24)$$

Параметры распространения  $H$ -волн в круглом волноводе находятся аналогично  $E$ -волнам, за исключением волнового сопротивления, которое определяется как  $Z_{вH} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}$ .

### ВОЛНА $H_{11}$ .

#### $H$ -ВОЛНЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

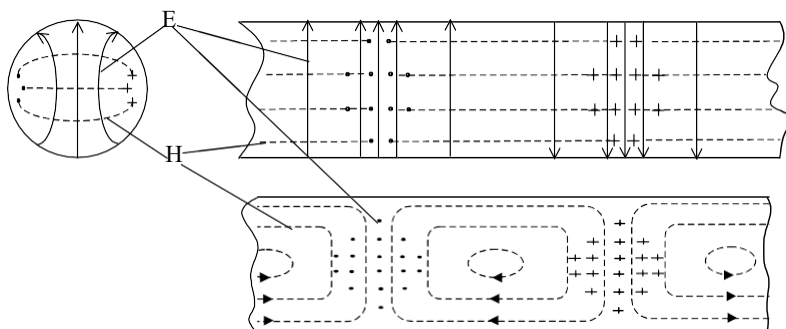
Из  $H$ -волн простейшей (низшего типа) является волна  $H_{01}$ . Её структура приведена ниже.



Однако из  $H$ -волн не  $H_{01}$  имеет наименьшую критическую частоту или наибольшую критическую длину волны, следовательно, не она является основной. Как следует из (12.17), (12.24), максимальную критическую длину волны в круглом волноводе имеет тип волны, у которого минимальное значение корня либо функции Бесселя, либо её производной. Следовательно, **основной волной в круглом волноводе является волна  $H_{11}$** . Для получения уравнений, описывающих её структуру, в формулы (12.22) необходимо подставить  $m = 1$ ,  $\xi_{11} = 1,841$ . Критическая длина волны  $H_{11}$  определяется по формуле:

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi a}{1,841} \approx 3,41a .$$

Структура волны  $H_{11}$  изображена ниже.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии подробно рассматриваются основные положения электродинамики. Излагаются вопросы теории электромагнитных полей и волн. Описываются пассивные линейные устройства антенно-фидерных трактов радиотехнических систем и волоконно-оптических линий связи. Приводятся сведения о методах анализа, технических характеристиках и конструктивных особенностях таких устройств, как регулярные волноводы и устройства СВЧ.

В пособии систематически и подробно рассматриваются основные положения электродинамики и их применение к исследованию различных электромагнитных явлений, которые играют важную роль в технике. При изложении материала особое внимание уделяется чёткому и последовательному введению системы понятий электродинамики, физической интерпретации получаемых результатов и выявлению общих закономерностей, присущих различным родственным явлениям.

Рассмотрены перспективы развития СВЧ-техники на основе использования современных информационных технологий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фальковский, О.И. Техническая электродинамика : учебник / О.И. Фальковский. – 2-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2009. – 432 с.
2. Пименов, Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн : учебник для вузов / Б.М. Пименов. – 2-е изд., испр. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 558 с.
3. Пименов, А.Д. Техническая электродинамика / А.Д. Пименов. – М. : Радио и связь, 2005. – 483 с.
4. Конструирование экранов и СВЧ устройств / под. ред. А.М. Чернушенко. – М. : Радио и связь, 1990. – 445 с.
5. Сазонов, Д.М. Антенны и устройства СВЧ. – М. : Высшая школа, 1988. – 430 с.
6. Малков, Н.А. Основы технической электродинамики : учебное пособие / Н.А. Малков, Г.А. Барышев. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2003. – 128 с.
7. Малков, Н.А. Антенны СВЧ : учебное пособие / Н.А. Малков. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2000. – 104 с.
8. Малков, Н.А. Гиротропные среды в технике СВЧ : учебное пособие / Н.А. Малков. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2005. – 104 с.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ .....	4
Электростатическое поле зарядов. Закон Кулона .....	4
Напряжённость электрического поля. Потенциал .....	5
2. ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ..	8
Теорема Остроградского-Гаусса, материальные уравнения.....	9
Энергия электростатического поля .....	12
3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ.....	13
Постоянный электрический ток. Вектор плотности тока .....	13
Закон Ома в дифференциальной форме. Уравнение непрерывности .....	14
3.3 Закон Ампера. Магнитная индукция.....	16
Напряжённость магнитного поля .....	18
Магнитное поле рамки с постоянным током.....	19
Энергия магнитного поля.....	20
4. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ИХ РЕШЕНИЕ.....	20
Полная система уравнений Максвелла. Их физическое содержание. Интегральная форма уравнений Максвелла	21
Решение уравнений Максвелла, волновых уравнений. Теорема запаздывающих электродинамических потенциалов.....	23
Уравнения Максвелла в комплексной форме.....	27
Граничные условия для векторов электромагнитного поля .....	28
Теорема Умова-Пойнтинга. Энергия электромагнитного поля. Теорема подобия. Граничные задачи электродинамики....	30
5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ.....	33
Понятие волнового процесса .....	33
Плоские электромагнитные волны.....	34
Ортогональность векторов $E$ и $H$ .....	37

	Цилиндрические и сферические волны .....	39
	Поляризация электромагнитных волн .....	40
6.	РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ .....	43
	Классификация сред по их электрическим свойствам. Граничная частота .....	43
	Распространение плоских электромагнитных волн в идеальном диэлектрике.....	46
7.	ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ С ПОТЕРЯМИ .....	48
	Распространение плоских электромагнитных волн в среде с потерями .....	48
	Фазовая и групповая скорости электромагнитных волн. Явление дисперсии и её виды.....	52
	Поверхностный эффект .....	55
8.	ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД .....	57
	Основные соотношения, описывающие падение плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред ...	57
	Коэффициенты Френеля для волн различной поляризации .....	61
	Нормальное падение плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред .....	64
9.	НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД .....	64
	Наклонное падение плоской электромагнитной волны на границу раздела двух идеальных диэлектриков.....	64
	Явление полного преломления. Угол Брюстера.....	65
	Явление полного внутреннего отражения. Критический угол.....	67
	Падение плоской электромагнитной волны на поверхность идеального проводника.....	70
	Приближённые граничные условия Леонтовича-Щукина	72
10.	ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ .....	75
	Назначение направляющих систем – линий передачи .....	75
	Определение и классификация электромагнитных волн в линиях передачи. Классификация линий передачи .....	76
	Т-волна в коаксиальной линии передачи.....	78

Полосковые линии передачи .....	81
Волноводные линии передачи .....	82
11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ .....	86
..... <i>H</i>	
-волны в прямоугольном волноводе. Аналитические и численные методы решения граничных задач .....	88
<i>E</i> -волны в прямоугольном волноводе .....	92
Критическая частота и критическая длина волны в прямоугольном волноводе .....	94
..... <i>O</i>	
сновные параметры распространения электромагнитной волны в прямоугольном волноводе .....	94
Волна $H_{10}$ в прямоугольном волноводе.....	96
12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ .....	99
Круглый волновод. Граничная задача.....	99
Решение граничной задачи. <i>E</i> -волны в круглом волново- де, критическая длина волны и частота для <i>E</i> -волн.....	101
Волна $E_{01}$ . <i>E</i> -волны высших порядков .....	106
Решение граничной задачи. <i>H</i> -волны в круглом волново- де, критические частота и длина <i>H</i> -волны.....	107
Волна $H_{11}$ . <i>H</i> -волны высших порядков .....	109
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	112

